Aktuárské vědy

Hans Koeppler

# Zur Theorie des mittleren Risikos der ferneren Dauer von Versicherungen mit kontinuierlicher Prämienberechnung, die auf zweiändrigen Ausscheideordnungen beruhen

*Aktuárské vědy*, Vol. 3 (1932), No. 2, 75–85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144569

# Zur Theorie des mittleren Risikos der ferneren Dauer von Versicherungen mit kontinuierlicher Prämienberechnung, die auf zweiändrigen Ausscheideordnungen beruhen.

Von *Hans Koeppler,* Berlin.

Die Theorie des mittleren ferneren Risikos soll in diesem kurzen Aufsatz auf Versicherungsformen angewendet werden, die nicht nur auf den Todes- und Erlebensfall abgeschlossen werden, sondern bei denen auch noch der Eintritt eines anderen Ereignisses die vorzeitige Auflösung des Versicherungsvertrages und gegebenenfalls auch die Realisierung einer versicherten Leistung bewirken kann. Während des Verlaufs der Versicherungsdauer mögen die Ereignisse $E^I$ und $E^{II}$ eintreten können. Die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb der Zeitstrecke $t$ bis $t + dt$

das Ereignis $E^I$ eintritt, sei ${\mu^I}_{x+t}\, dt$

das Ereignis $E^{II}$ eintritt, sei ${\mu^{II}}_{x+t}\, dt$.

Diese Wahrscheinlichkeiten für einen unendlich kleinen Zeitraum, die bekanntermaßen auch die Intensitäten des Eintreffens der Ereignisse genannt werden, beziehen sich auf einen zu Anfang der Versicherung $x =$ Jährigen.

Es sollen zwei Arten von Versicherungen unterschieden werden. Bei der einen Versicherungsart wird bei Eintritt des Ereignisses $E^I$ die Summe ${S_t}^I$ fällig, während bei Eintritt des Ereignisses $E^{II}$ keine Leistung erfolgt. Bei der zweiten Vertragsart wird bei Eintritt des Ereignisses $E^I$ die Summe ${S_t}^I$ und bei Eintritt des Ereignisses $E^{II}$ die Summe ${S_t}^{II}$ fällig. Tritt keines der beiden Ereignisse bis zum Ablauf der Versicherungsdauer „$n$“ ein, so soll bei beiden Versicherungsarten die Summe $Sn$ fällig werden.

Wenn zur Abkürzung

$${\mu^I}_{x+t} + {\mu^{II}}_{x+t} = \mu_{x+t}$$

gesetzt wird, so läßt sich bei Anwendung kontinuierlicher Prämienberechnung die einmalige Prämie der ersten Versicherungsart durch die Formel

$${A^I}_{x,\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\delta)\,dt} {\mu^I}_{x+t}\, {S^I}_t\, dt + e^{-\int_0^n (\mu_{x+t}+\delta)\,dt} S_n \qquad (a)$$

und die einmalige Prämie der zweiten Vertragsart durch die Formel

$$A^{II}_{x,\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\delta)\,dt} \left(\mu^I_{x+t}\, S^I_t + \mu^{II}_{x+t}\, S^{II}_t\right) dt + e^{-\int_0^n (\mu_{x+t}+\delta)\,dt}\, S_n \qquad (b)$$

darstellen. Die Schreibweise entspricht der von Jörgensen[1]) verwendeten. Das Quadrat des mittleren Risikos der ferneren Versicherungsdauer läßt sich für den Zeitpunkt $t$ nach Beginn der Versicherung in der Grundform

$$\begin{aligned} {}_t\overline{M}_x^{\,2} = &\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, \mu^I_{x+\vartheta} \left(S^I_\vartheta - {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t|}}\right)^2 d\vartheta \,+ \\ &+ \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, \mu^{II}_{x+\vartheta} \left({}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} + \overline{P}_{x\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t|}}\right)^2 d\vartheta \,+ \\ &+ e^{-\int_t^n (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta} \left(S_n - {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{n-t|}}\right)^2 \end{aligned} \qquad (\mathrm{I}, a)$$

für die erste Vertragsart und in der Grundform

$$\begin{aligned} {}_t\overline{M}_x^{\,2} = &\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, \mu^I_{x+\vartheta} \left(S^I_\vartheta - {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t|}}\right)^2 d\vartheta \,+ \\ &+ \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, \mu^{II}_{x+\vartheta} \left(S_\vartheta^{II} - {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t|}}\right)^2 d\vartheta \,+ \\ &+ e^{-\int_t^n (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta} \left(S_n - {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{n-t|}}\right)^2 \end{aligned} \qquad (\mathrm{I}, b)$$

für die zweite Vertragsart.

In diesen Ausdrücken bezeichnet

$${}_t\overline{V}_x = \overline{A}^{\,I \text{ oder } II}_{x+t,\,\overline{n-t|}} - \overline{P}_{x\overline{n|}}\, \bar{a}_{x+t,\,\overline{n-t|}}$$

das Deckungskapital nach Ablauf der Zeit $t$ und

$$\bar{s}_{\overline{\vartheta-t|}} = \int_t^\vartheta e^{(u-t)\delta}\, du = \frac{e^{(\vartheta-t)\delta} - 1}{\delta}$$

die Summe der kontinuierlichen Zeitrente.

Der in den quadrierten Gewinn- und Verlustbeträgen auftretende Diskontierungsfaktor $e^{-(\vartheta-t)\delta}$ ist abgesondert worden, sodaß die quadrierten Gewinn- und Verlustbeträge genau für ihre etwaigen Fällig-

[1]) N. R. Jörgensen, Grundzüge der Theorie der Lebensversicherung, Jena 1913.

keitszeitpunkte berechnet erscheinen. Mit Benutzung kontinuierlicher Prämienberechnung ist das mittlere Risiko einfacher Lebensversicherungen offenbar zuerst von dem dänischen Mathematiker Gram in einer dänischen Zeitschrift[2]) dargestellt worden, der auch einen diesen Gegenstand behandelnden Beitrag (Über die Sicherheitsreserven der Lebensversicherung) dem Sechsten internationalen Kongreß für Versicherungswissenschaft (Wien 1909) geliefert hat. Für jährliche Prämienzahlung und verschiedene Realisierungsmöglichkeiten hat wohl zuerst Spitz[3]) das mittlere fernere Risiko berechnet. Unabhängig von diesen beiden Aufsätzen hat der Verfasser einen Aufsatz[4]) im 36ten Band des Assekuranzjahrbuchs (Wien 1915) veröffentlicht.

Das mittlere fernere Risikoquadrat stellt stets ein Minimum in Bezug auf die am Anfang der Betrachtung vorhandene Reserve dar; denn man erhält für die erste Vertragsart

$$\frac{d_t \overline{M}_x^2}{d_t \overline{V}_x} = -2 \left\{ \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_x + \vartheta + \delta)\, d\vartheta} \mu^I{}_{x+\vartheta} \left(S^I{}_\vartheta - {}_t\overline{V}_x e^{(\vartheta - t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta - t|}}\right) d\vartheta - \right.$$

$$- \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_x + \vartheta + \delta)\, d\vartheta} \mu^{II}{}_{x+\vartheta} \left({}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta - t)\delta} + \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta - t|}}\right) d\vartheta +$$

$$\left. + e^{-\int_t^n (\mu_x + \vartheta + \delta)\, d\vartheta} \left(S_n - {}_t\overline{V}_x\, e^{(n-t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{n-t|}}\right) \right\} = -2\overline{G}^I{}_t = o,$$

für die zweite Vertragsart

$$\frac{d_t \overline{M}_x^2}{d_t \overline{V}_x} = -2 \left\{ \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_x + \vartheta + \delta)\, d\vartheta} \mu^I{}_{x+\vartheta} \left(S^I{}_\vartheta - {}_t\overline{V}_x e^{(\vartheta - t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta - t|}}\right) d\vartheta + \right.$$

$$+ \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_x + \vartheta + \delta)\, \overline{d\vartheta}} \mu^{II}{}_{x+\vartheta} \left(S^{II}{}_\vartheta - {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta - t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta - t|}}\right) d\vartheta +$$

$$\left. + e^{-\int_t^\vartheta (\mu_x + \vartheta + \delta)\, \overline{d\vartheta}} \left(S_n - {}_t\overline{V}_x\, e^{(n-t)\delta} - \overline{P}_{x\,\overline{n|}}\, \bar{s}_{\overline{n-t|}}\right) \right\} = -2\, \overline{G}^{II}{}_t = o$$

---

[2]) On Middelfejl paa vaerdien af Livsforsikringen. Alf J. P. Gram. — Tidsskrift for Matematik, Femte Raekke, Kjobenhavn 1887.

[3]) Studien zur Theorie des Zufallsrisikos in der Personenversicherung. Von Arnold Spitz. — Mitteilungen des Österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungs-Anstalten, Neue Folge, 2. Band, 3 Heft, Wien 1906.

[4]) Die Darstellung des Risikos einer Rente auf den Invaliditätsfall bei kontinuierlicher Prämienberechnung. Von Hans Koeppler, Berlin.

Das Zeichen $\overline{G}_t$ zeige an, daß sich durch die Differentiation der Null betragende Barwert der Gewinne und Verluste ergibt, der umgekehrt auch zur elementaren Darstellung des Quadrats des mittleren ferneren Risikos benutzt werden kann, wenn man die Gewinne und Verluste quadriert. Durch nochmalige Differentiation nach ${}_t\overline{V}_x$ der ersten Differentialquotienten ergibt sich für beide Vertragsarten

$$\frac{d_t{}^2\overline{M}_x{}^2}{d_t\overline{V}_x{}^2} = 2\left\{\int\limits_t^n e^{-\int\limits_t^{\vartheta}\mu_{x+\vartheta}\,d\vartheta}(\mu^I{}_{x+\vartheta}+\mu^{II}{}_{x+\vartheta})\,d\vartheta + e^{-\int\limits_t^n\mu_{x+\vartheta}\,d\vartheta}\right\} = 2$$

Diese Betrachtung gilt auch für den Anfang der Versicherung, für welchen man $t = 0$ und auch ${}_t\overline{V}_x = 0$ zu setzen hat, weil die Reservebildung erst einsetzt. Man erhält

$$\lim_{t=0}\frac{d_t\overline{M}_x{}^2}{d_t\overline{V}_x} = -2\,\overline{G}_0 = 0 \text{ und } \lim_{t=0}\frac{d_t{}^2\overline{M}_x{}^2}{d_t\overline{V}_x{}^2} = 2 > 0,$$

während gleichzeitig auch die Forderung

$$\lim_{t=0}\ {}_t\overline{M}_x{}^2 = {}_0\overline{M}_x{}^2$$

erfüllt wird.

Die Differentiation der Ausdrücke (I, $a$) und (I, $b$) nach $t$ erfordert einige Aufmerksamkeit und ergibt unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\overline{G}_t = 0$$

und nach Umformung die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d_t\overline{M}_x{}^2}{dt} = (\mu_{x+t}+2\delta)\,{}_t\overline{M}_x{}^2 - \mu^I{}_{x+t}\,(S^I{}_t - {}_t\overline{V}_x)^2 - \mu^{II}{}_{x+t}\,({}_t\overline{V}_x)^2 \qquad \text{(II, } a\text{)}$$

und

$$\frac{d_t\overline{M}_x{}^2}{dt} = (\mu_{x+t}+2\delta)\,{}_t\overline{M}_x{}^2 - \mu^I{}_{x+t}\,(S^I{}_t - {}_t\overline{V}_x)^2 - \mu^{II}{}_{x+t}\,(S^{II}{}_t - {}_t\overline{V}_x)^2. \qquad \text{(II, } b\text{)}$$

Will man umgekehrt diese Differentialgleichungen integrieren und verwendet hierzu den integrierenden Faktor

$$e^{-\int\limits_0^t(\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}$$

so kann man sie umformen in

$$d\left\{{}_t\overline{M}_x{}^2\,e^{-\int\limits_0^t(\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\right\} = -e^{-\int\limits_0^t(\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\,{}_t\overline{\varrho}_x{}^2\,dt,$$

wobei für beide Fälle

$$\left.\begin{array}{l}\mu^{I}{}_{x+t}\,(S^{I}{}_{t} - {}_{t}\overline{V}_{x})^{2} + \mu^{II}{}_{x+t}\,({}_{t}V_{x})^{2} \\ \mu^{I}{}_{x+t}\,(S^{I}{}_{t} - {}_{t}\overline{V}_{x})^{2} + \mu^{II}{}_{x+t}\,(S^{II}{}_{t} - {}_{t}V_{x})^{2}\end{array}\right\} = {}_{t}\overline{\varrho}_{x}{}^{2}$$

gesetzt wurde. Die Integration nach $t$ zwischen $t$ und $n$ ergibt sodann

$${}_{n}\overline{M}_{x}{}^{2}\, e^{-\int_{0}^{n}(\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta} - {}_{t}\overline{M}_{x}{}^{2}\, e^{-\int_{0}^{t}(\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta} = -\int_{t}^{n} e^{-\int_{0}^{\vartheta}(\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\; {}_{\vartheta}\overline{\varrho}_{x}{}^{2}\,d\vartheta. \tag{III}$$

Um späteren Irrtümern vorzubeugen, ist auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen für die Urvariable der Buchstabe $\vartheta$ gewählt worden. Aus der Natur der Aufgabe geht hervor, daß ${}_{n}\overline{M}_{x}{}^{2} = 0$ sein muß. Für das mittlere Risikoquadrat nach Ablauf der Zeit $t$ ergibt sich daher der Ausdruck

$${}_{t}\overline{M}_{x}{}^{2} = \int_{t}^{n} e^{-\int_{t}^{\vartheta}(\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\; {}_{\vartheta}\overline{\varrho}_{x}{}^{2}\,d\vartheta. \tag{IV}$$

Will man das Quadrat des mittleren Risikos für den Beginn der Versicherungsdauer berechnen, so braucht man in dem vorstehenden Ausdruck nur $t = 0$ zu setzen. Man kann den gefundenen Ausdruck als das Analogon zum Hattendorf'schen Risiko[3]) bei Anwendung kontinuierlicher Prämienberechnung ansehen und ihn auch leicht unmittelbar berechnen, wenn man sich vergegenwärtigt, wie wohl das mittlere Risikoquadrat des Zeitintervalls $\vartheta$ bis $\vartheta + d\vartheta$ beschaffen ist. In Analogie zu der Definition des mittleren jährlichen Risikos definiere man dieses unendlich kleine Risikoquadrat als die Summe der Hoffungswerte der quadrierten Gewinn- und Verlustbeträge für das Zeitintervall $\vartheta$ bis $\vartheta + d\vartheta$. Man erhält so für dieses differentiale Risikoquadrat bei der ersten Vertragsart

$${}_{\vartheta}\overline{m}_{x}{}^{2}\,d\vartheta = \mu^{I}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,(S^{I}{}_{\vartheta} - {}_{\vartheta}\overline{V}_{x} - {}_{\vartheta}\overline{\Pi}_{x}\,d\vartheta)^{2} + \mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,({}_{\vartheta}\overline{V}_{x} + {}_{\vartheta}\overline{\Pi}_{x}\,d\vartheta)^{2} + \\ + (1 - \mu^{I}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta - \mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta)\,({}_{\vartheta}\overline{\Pi}_{x}\,d\vartheta)^{2},$$

bei der zweiten Vertragsart

$${}_{\vartheta}\overline{m}_{x}{}^{2}\,d\vartheta = \mu^{I}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,(S^{I}{}_{\vartheta} - {}_{\vartheta}\overline{V}_{x} - {}_{\vartheta}\overline{\Pi}_{x}d\vartheta)^{2} + \mu^{II}{}_{x+\vartheta}d\vartheta\,(S^{II}{}_{\vartheta} - {}_{\vartheta}\overline{V}_{x} - {}_{\vartheta}\overline{\Pi}_{x}d\vartheta)^{2} + \\ + (1 - \mu^{I}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta - \mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta)\,({}_{\vartheta}\overline{\Pi}_{x}\,d\vartheta)^{2},$$

wenn man mit

---

[3]) Das Risiko bei der Lebensversicherung von K. Hattendorf (Zweiter Zusatz) — Rundschau der Versicherungen von E. A. Masius, Leipzig 1868. Vergl. auch Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, zweiter Band, Leipzig und Berlin 1910.

$$
{}_{\vartheta}\overline{\Pi}_x\,d\vartheta = \begin{cases} \mu^I{}_{x+\vartheta}\,(S^I{}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)\,d\vartheta - \mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,{}_\vartheta\overline{V}_x\,d\vartheta \\ \mu^I{}_{x+\vartheta}\,(S^I{}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)\,d\vartheta + \mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,(S^{II}{}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)\,d\vartheta \end{cases}
$$

die Risikoprämie des Zeitintervalls $\vartheta$ bis $\vartheta + d\vartheta$ bezeichnet. Durch Umformung erhalten wir einerseits

$$
{}_\vartheta\overline{m}_x{}^2\,d\vartheta = \mu^I{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,(S^I{}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 + \mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,({}_\vartheta\overline{V}_x)^2 - ({}_\vartheta\overline{\Pi}_x\,d\vartheta)^2
$$

und andrerseits

$$
{}_\vartheta\overline{m}_x{}^2\,d\vartheta = \mu^I{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,(S^I{}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 + \mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,(S^{II}{}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 - ({}_\vartheta\overline{\Pi}_x\,d\vartheta)^2.
$$

Nun ist aber $({}_\vartheta\overline{\Pi}_x\,d\vartheta)^2$ eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, die vernachlässigt wer den kann. Als mittleres Risiko des Zeitdifferentials $d\vartheta$ können daher die Ausdrücke

$$
{}_\vartheta\overline{m}_x{}^2\,d\vartheta = \begin{cases} \mu^I{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,(S^I{}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 + \mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,({}_\vartheta\overline{V}_x)^2 \\ \mu^I{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,(S^I{}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 + \mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,d\vartheta\,(S^{II}{}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 \end{cases} \tag{V}
$$

angesehen werden. Gleichzeitig erkennt man, daß die oben eingeführte Größe ${}_\vartheta\overline{\varrho}_x{}^2\,d\vartheta$ gleich ${}_\vartheta\overline{m}_x{}^2\,d\vartheta$ ist. Werden die Ausdrücke (V) auf den Beginn der Betrachtung diskontiert, wobei zu beachten ist, daß der Diskontfaktor mit Rücksicht auf das Quadrat der Risikobeträge ebenfalls zu quadrieren ist, und durch Multiplikation mit der Erlebenswahrscheinlichkeit ihre Hoffnungswerte gebildet, so stellen diese Produkte den Integranden des mit dem Ausdruck (IV) identischen Ausdrucks

$$
{}_t\overline{M}_x{}^2 = \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta} + 2\delta)\,d\vartheta}\;{}_\vartheta\overline{m}_x{}^2\,d\vartheta. \tag{IV, 1}
$$

dar.

Die Kenntniß des Ausdrucks (IV, 1) bietet uns die Möglichkeit zur Anwendung einer Rekursionsformel, aus welcher dann die Differentialgleichungen (II, *a*) und (II, *b*) hergeleitet werden können. Die Rekursionsformel für jährliche Intervalle ist anscheinend zuerst von A. Spitz (s. a. a. O.) aufgestellt worden. Bei der hier gewählten kontinuierlichen Betrachtung findet man

$$
{}_{t+dt}\overline{M}_x{}^2 = \frac{[{}_t\overline{M}_x{}^2 - {}_t\overline{m}_x{}^2\,dt]\,(1 + 2\delta\,dt)}{1 - \mu_{x+t}\,dt},
$$

und wenn man noch

$$
{}_{t+dt}\overline{M}_x{}^2 = {}_t\overline{M}_x{}^2 + d_t\overline{M}_x{}^2
$$

setzt und den Wert des Differentials $d_t\overline{M}_x{}^2$ zu bestimmen anstrebt,

$$
d_t\overline{M}_x{}^2 = \frac{{}_t\overline{M}_x{}^2\,(\mu_{x+t} + 2\delta)\,dt - {}_t\overline{m}_x{}^2\,dt\,(1 + 2\delta\,dt)}{1 - \mu_{x+t}\,dt}.
$$

Da im Zähler die unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ${}_t\overline{m}_x^2 dt \times \times 2\delta\, dt$ und im Nenner die unendlich kleine Größe $\mu_{x+t}\, dt$ neben 1 vernachlässigt werden kann, so folgt in Übereinstimmung mit den Gleichungen (II, $a$) und (II, $b$)

$$d_t\overline{M}_x^2 = (\mu_{x+t} + 2\delta)\, {}_t\overline{M}_x^2\, dt - {}_t\overline{m}_x^2\, dt.$$

Des Öfteren schon hat die Versicherungsmathematiker die algebraische Übereinstimmung der Ausdrücke (I) und (IV) interessiert. Für jährliche Prämienberechnung wurde der dem Ausdruck (I) entsprechende in den dem Ausdruck (IV) entsprechenden von A. Spitz (s. a. a. O.) und von Dr. R. Rothauge[4]) umgeformt. Bei kontinuierlicher Prämienberechnung gestaltet sich die Darstellung natürlich etwas anders, auch wenn sie, wie alle Berechnungen dieser Art auf der Beziehung

$${}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} + \overline{P}_{x\overline{n}|}\, \overline{s}_{\overline{\vartheta-t}|} = {}_\vartheta\overline{V}_x + \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du \quad (t < \vartheta \leqq n)$$

beruht, welche sich auch durch Integration der mittels des Begriffs der differentialen Sparprämie $d_t\overline{V}_x - {}_t\overline{V}_x \delta dt$ zu bildenden Differentialgleichung

$${}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du = \overline{P}_{x\overline{n}|}\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du - d\left\{{}_u\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\right\}$$

(zwischen $t$ und $\vartheta$) herleiten läßt. Nachdem man von vorstehender Substitution Gebrauch gemacht und die Quadrate der Gewinn- und Verlustbeträge in der Weise aufgelöst hat, daß man

$$(S_\vartheta - {}_t\overline{V}_x - \overline{P}_{x\overline{n}|}\, \overline{s}_{\overline{\vartheta-t}|})^2 = (S_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x - \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du)^2 =$$

$$= (S_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 - 2\,(S_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x) \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du + \left(\int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du\right)^2$$

und

$$({}_t V_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} + \overline{P}_{x\overline{n}|}\, \overline{s}_{\overline{\vartheta-t}|})^2 = \left({}_\vartheta\overline{V}_x + \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du\right)^2 =$$

$$= ({}_\vartheta\overline{V}_x)^2 + 2\, {}_\vartheta\overline{V}_x \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du + \left(\int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du\right)^2$$

[4]) Die formale Ausgestaltung des Zufallrisikos in der Lebensversicherung von Dr. R. Rothauge. — Mitteilungen des oesterreichisch-ungarischen Verbandes der Privat-Versicherungs-Anstalten, Neue Folge, 6. Band, 1. Heft, Wien 1911.

setzt, erhält man nach einfacher Umformung zunächst für die erste Vertragsform

$$
{}_t\overline{M}_x^{\,2} = \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta} \left\{\mu^I_{x+\vartheta}\,(S^I_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 + \mu^{II}_{x+\vartheta}\,({}_\vartheta\overline{V}_x)^2\right\} d\vartheta -
$$
$$
- 2\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, {}_\vartheta\overline{\Pi}_x \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du\, d\vartheta +
$$
$$
+ \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, \mu_{x+\vartheta} \left(\int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du\right)^2 d\vartheta +
$$
$$
+ e^{-\int_t^n (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta} \left(\int_t^n {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(n-u)\delta}\, du\right)^2
$$

und zunächst für die zweite Vertragsform

$$
{}_t\overline{M}_x^{\,2} = \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta} \left\{\mu^I_{x+\vartheta}\,(S^I_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 + \mu^{II}_{x+\vartheta}\,(S^{II}_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2\right\} d\vartheta -
$$
$$
- 2\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, {}_\vartheta\overline{\Pi}_x \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du\, d\vartheta +
$$
$$
+ \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, \mu_{x+\vartheta} \left(\int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du\right)^2 d\vartheta +
$$
$$
+ e^{-\int_t^n (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta} \left(\int_t^n {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(n-u)\delta}\, du\right)^2.
$$

Mittels partieller Integration findet man aber die Beziehung

$$
2\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta \mu_{x+\vartheta}\,d\vartheta}\, e^{-(\vartheta-t)\delta}\, {}_\vartheta\overline{\Pi}_x \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{-(u-t)\delta}\, du\, d\vartheta =
$$
$$
= \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta \mu_{x+\vartheta}\,d\vartheta}\, d\left[\int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{-(u-t)\delta}\, du\right]^2 =
$$

$$= \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, \mu_{x+\vartheta} \left( \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x e^{(\vartheta-u)\delta}\, du \right)^2 d\vartheta +$$

$$+ e^{-\int_t^n (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta} \left( \int_t^n {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(n-u)\delta}\, du \right)^2, \qquad \text{(VI)}$$

deren Anwendung auf das zweite Glied der beiden vorhergehenden Gleichungen die Kompensation des dritten und vierten Gliedes herbeiführt. In ähnlicher Weise können wir auch die Formel (IV) in die Formeln (I, $a$) und (I, $b$) ungestalten. Wir setzen hierzn

$${}_\vartheta\overline{V}_x = {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} + \overline{P}_{x\overline{n}|}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t}|} - \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du$$

und schreiben für das Quadrat der Risikosumme nach Ablauf der Zeit $\vartheta$

$$(S_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x)^2 = \left( S_\vartheta - {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} - \overline{P}_{x\overline{n}|}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t}|} + \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du \right)^2 =$$

$$= (S_\vartheta - {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} - \overline{P}_{x\overline{n}|}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t}|})^2 + 2\,(S_\vartheta - {}_\vartheta\overline{V}_x) \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du -$$

$$- \left( \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du \right)^2$$

und für das Quadrat der Prämienreserve nach Ablauf der Zeit $\vartheta$

$$({}_\vartheta\overline{V}_x)^2 = \left( {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} + \overline{P}_{x\overline{n}|}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t}|} - \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du \right)^2 =$$

$$= ({}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} + \overline{P}_{x\overline{n}|}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t}|})^2 - 2\, {}_\vartheta\overline{V}_x \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du - \left( \int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\, e^{(\vartheta-u)\delta}\, du \right)^2$$

Mit Anwendung dieser Umformungen erhält man für die erste Vertragsart

$${}_t\dot{\overline{M}}_x^2 = \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\, \mu^I{}_{x+\vartheta}\, (S^I{}_\vartheta - {}_t\overline{V}_x\, e^{(\vartheta-t)\delta} - \overline{P}_{x\overline{n}|}\, \bar{s}_{\overline{\vartheta-t}|})^2\, d\vartheta +$$

$$+\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\,\mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,({}_t\overline{V}_x\,e^{(\vartheta-t)\delta}+\overline{P}_{x\overline{n|}}\,\overline{s}_{\overline{\vartheta-t|}})^2\,d\vartheta\,+$$

$$+\,2\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\,{}_\vartheta\overline{\Pi}_x\int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\,e^{(\vartheta-u)\delta}\,du\,d\vartheta\,-$$

$$-\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\,\mu_{x+\vartheta}\left(\int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\,e^{(\vartheta-u)\delta}\,du\right)^2 d\vartheta$$

und für die zweite Vertragsart

$${}_t\overline{M}_x^2=\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\,\mu^{I}{}_{x+\vartheta}\,(S^I{}_\vartheta-{}_t\overline{V}_x\,e^{(\vartheta-t)\delta}-\overline{P}_{x\overline{n|}}\,\overline{s}_{\overline{\vartheta-t|}})^2\,d\vartheta\,+$$

$$+\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\,\mu^{II}{}_{x+\vartheta}\,(S^{II}{}_\vartheta-{}_t\overline{V}_x\,e^{(\vartheta-t)\delta}-\overline{P}_{x\overline{n|}}\,\overline{s}_{\overline{\vartheta-t|}})^2\,d\vartheta\,+$$

$$+\,2\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\,{}_\vartheta\overline{\Pi}_x\int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\,e^{(\vartheta-u)\delta}\,du\,d\vartheta\,-$$

$$-\int_t^n e^{-\int_t^\vartheta (\mu_{x+\vartheta}+2\delta)\,d\vartheta}\,\mu_{x+\vartheta}\left(\int_t^\vartheta {}_u\overline{\Pi}_x\,e^{(\vartheta-u)\delta}\,du\right)^2 d\vartheta.$$

Wenden wir nun auf das dritte Glied dieser beiden Ausdrücke die oben gefundene Beziehung (VI) an, so bekommen wir wieder die Ausdrücke (I, $a$) und (I, $b$).

Unsere Betrachtungen mögen durch zwei wohl nicht uninteressante Darstellungen beschlossen werden. Da man die Differentialgleichungen (II, $a$) und (II, $b$) auch in den Formen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d_t\overline{M}_x^2}{dt}-2\delta_t\overline{M}_x^2=-\mu^I{}_{x+t}\,[(S^I{}_t-{}_t\overline{V}_x)^2-{}_t\overline{M}_x^2]-\\
&\qquad\qquad-\mu^{II}{}_{x+t}\,[({}_t\overline{V}_x)^2-{}_t\overline{M}_x^2]\\
&\text{und}\\
&\frac{d_t\overline{M}_x^2}{dt}-2\delta_t\overline{M}_x^2=-\mu^I{}_{x+t}\,[(S^I{}_t-{}_t\overline{V}_x)^2-{}_t\overline{M}_x^2]-\\
&\qquad\qquad-\mu^{II}{}_{x+t}\,[(S^{II}{}_t-{}_t\overline{V}_x)^2-{}_t\overline{M}_x^2]
\end{aligned}\right\}=-\varphi\,(x,t)$$

schreiben kann, so erhält man durch Anwendung des integrierenden Faktors $e^{-2t\delta}$

$$d\left\{{}_t\overline{M}_x^2\, e^{-2t\delta}\right\} = -e^{-2t\delta}\,\varphi(x, t)\,dt,$$

und wenn man diese Gleichung zwischen $t$ und $n$ integriert

$${}_t\overline{M}_x^2 = \int_t^n e^{-2(\vartheta - t)\delta}\,\varphi(x, \vartheta)\,d\vartheta. \qquad \text{(VII)}$$

Zur besseren Übersicht ist auf der rechten Seite $t$ mit $\vartheta$ vertauscht worden. Die Funktion $\varphi(x, \vartheta)$ hat die ihr im Vorhergehenden erteilte Bedeutung.

Beachtet man, daß gesetzt werden kann

$$d\int_t^\vartheta e^{-2(\vartheta - t)\delta}\,{}_\vartheta\overline{m}_x^2\,d\vartheta = e^{-2(\vartheta - t)\delta}\,{}_\vartheta\overline{m}_x^2\,d\vartheta,$$

so kann man die Formel (IV) auch in der Form

$${}_t\overline{M}_x^2 = \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta \mu_{x+\vartheta}\,d\vartheta}\, d\int_t^\vartheta e^{-2(\vartheta - t)\delta}\,{}_\vartheta\overline{m}_x^2\,d\vartheta.$$

schreiben. Wendet man nun die partielle Integration an, so erhält man die Formel

$${}_t\overline{M}_x^2 = \int_t^n e^{-\int_t^\vartheta \mu_{x+\vartheta}\,d\vartheta}\,\mu_{x+\vartheta}\int_t^\vartheta e^{-2(\vartheta - t)\delta}\,{}_\vartheta\overline{m}_x^2\,d\vartheta\,d\vartheta\, +$$

$$+\, e^{-\int_t^n \mu_{x+\vartheta}\,d\vartheta}\int_t^n e^{-2(\vartheta - t)\delta}\,{}_\vartheta\overline{m}_x^2\,d\vartheta. \qquad \text{(VIII)}$$

Diese beiden Ergebnisse können auch zu den Untersuchungen Anlaß geben, die Dr. Berger mit Hilfe von Integralgleichungen im ersten Teil seines Aufsatzes „Über simultane Versicherungswerte"[5]) angestellt hat.

Diese Untersuchungen, die der Verfasser ihrem mathematischen Inhalte nach schon im Jahre 1917 zu veröffentlichen beabsichtigte, dürfen wohl als eine kleine Ergänzung der neueren Lehrbucher, die der kontinuierlichen Prämienberechung größere Aufmerksamkeit widmen, angesehen werden.

---

[5]) Versicherungswissenschafliche Mitteilungen des Deutschen Vereins für Versicherungswesen in der Tschechoslowakischen Republik, Sechstes Heft, Prag 1930.