In the same manner we arrive at the general formula for the value of an annuity payable, when out of m lives $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ there are alive at least r lives

$$a_{\overline{x_1:x_2:x_3:\ldots:x_m}^{\,r}} = \int_0^\infty \Bigg\{ 1 + \sum_{k=0}^{\frac{m-r-1}{2}} \binom{r+2k-1}{2k} \sum (\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + \ldots +$$

$$+ \mu_{x_{m-r-2k}+t})\, a_{x_{m-r-2k+1}+t:x_{m-r-2k+2}+t:\ldots:x_m+t} \Bigg\} e^{-\int_0^t (\Sigma \mu_{x_1+u}+\delta)du}\, dt -$$

$$- \int_0^\infty \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\frac{m-r}{2}-1} \binom{r+2k}{2k+1} \sum (\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + \ldots +$$

$$+ \mu_{x_{m-r-2k-1}+t})\, a_{x_{m-r-2k}+t:x_{m-r-2k+1}+t:\ldots:x_m+t} \Bigg\} e^{-\int_0^t (\Sigma \mu_{x_1+u}+\delta)du}\, dt,$$

where k can be every integer from 0 to the greatest integer in the upper limit.

Généralisations des formules d'amortissement.

Josef Bílý.

Dans la théorie des opérations financières, il y a deux formules d'amortissement, par lesquelles on peut arriver de la valeur initiale du bilan B_0 après un nombre de n années à une valeur fixée B_n.

Pour la valeur balancée après r années depuis le commencement d'amortissement, on reçoit

a) en cas d'amortissement par décompte annuel $d = \dfrac{B_0 - B_n}{nB_0}$ de la valeur initiale de bilan B_0:

$$B_r = B_0(1 - rd) = \left(1 - \frac{r}{n}\right) B_0 + \frac{r}{n} B_n;$$

b) en cas d'amortissement par décompte annuel

$$d' = 1 - \sqrt[n]{\frac{B_n}{B_0}} \tag{1a}$$

de la valeur dernièrement balancée:

$$B_r = B_0 (1 - d')^r = B_0 \left(\sqrt[n]{\frac{B_n}{B_0}} \right)^r$$

ou bien
$$\log B_r = \left(1 - \frac{r}{n}\right) \log B_0 + \frac{r}{n} \log B_n. \tag{1b}$$

La pratique présente ce problème dans une forme plus générale. Une partie de la propriété au prix courant, variant avec le temps (par exemple des titres), est estimée, à la base des décrets particuliers ou d'une permission spéciale, au dessus de son prix courant, toutefois il est déterminé que l'écart entre le prix courant et la valeur balancée doit être amorti graduellement en n années.

Ce problème se présente en cas, où il s'agit d'un assainissement, ou l'entreprise reçoit au lieu des actifs devalorisés, dont le retranchement semble necéssaire, des titres au cours nominal, avec l'engagement d'amortir dans un certain nombre d'années l'écart entre leur valeur nominale et leur valeur de bourse. Ce problème s'est également présenté à l'étranger, lorsqu'une forte baisse des valeurs a forcé les gouvernements de permettre à évaluer les titres aux cours dernièrement balancés, sous condition d'amortissement de la différence entre le cours balancée et le cours réel dans un bref délai (de 3 à 5 ans). Si les cours montaient avant l'écoulement du délai déterminé pour l'amortissement au dessus des cours dernièrement balancés, l'allègement du bilan pourra être atteint plutôt.

Tout au contraire du problème du premier alinéa, où il est connu d'avance, à quelle valeur B_n on doit parvenir en n années, on ne connait point dans le problème ultérieurement cité la valeur effective après n années, que l'on doit atteindre par l'amortissement successif.

La solution la plus simple est d'évaluer le prix courant après n années et de faire ensuite l'amortissement d'après l'une des formules du premier alinéa et de mettre la différence éventuelle, se montrant au bout de n années, au compte de la réserve pour les fluctuations des cours ou bien dans un autre fonds.

Cependant, il est possible d'appliquer également d'autres méthodes.

Si K_r est le prix courant d'une partie de propriété qui est l'objet d'amortissement, il y a donc après r années, depuis le commencement de l'amortissement,

$$K_r < B_0, \; 0 \leqq r \leqq n.$$

Pour la valeur balancée après r années B_r on peut écrire, par analogie aux formules (1a) [et (1b)]

$$B_r = B_0 - \frac{r}{n}(B_0 - K_r) = \left(1 - \frac{r}{n}\right) B_0 + \frac{r}{n} K_r, \tag{2a}$$

ou bien

$$\log B_r = \left(1 - \frac{r}{n}\right) \log B_0 + \frac{r}{n} \log K_r. \tag{2b}$$

En effet, il y a pour $r = 0$ $B_0 = B_0$, pour $r = n$ $B_n = K_n$.

Ces formules excluent l'atteinte prématurée du but d'amortissement, car ce n'est que pour $r = n$ que $B_r = K_r$, autrement $B_r > K_r$, parce que d'après la supposition il est $K_r < B_0$, par conséquent il est également possible d'écrire la formule ($2a$) dans la forme

$$B_r = K_r + \left(1 - \frac{r}{n}\right) (B_0 - K_r).$$

Les formules citées facilitent le contrôle, mais elles ont le désavantage, que dans certains cas on pourrait trouver que $B_{r+1} > B_r$. [Cela se produit par exemple dans ($2a$), quand $K_{r+1} - K_r > (B_0 - K_{r+1})/r$.] Cette possibilité doit être éliminée, car il est absurde, qu'une partie de propriété qui est l'objet d'amortissement, atteigne une valeur supérieure à celle qui la représentait dans le bilan de l'année précédente.

Par conséquent, on recommande d'employer une autre formule: Avant chaque bilan on divise la différence entre la valeur dernièrement balancée et le prix courant à la date, où l'on dresse le bilan, par le nombre d'années qui reste encore jusqu'au terme final de l'amortissement. On décompte ensuite cette partie de sorte qu'on reçoit

$$\left.\begin{array}{l}
\text{1-ère année: amortissement } o_1 = \dfrac{B_0 - K_1}{n}, \\
\text{valeur balancée à la fin d'année } B_1 = B_0 - o_1; \\
\text{2-ème année: amortissement } o_2 = \dfrac{B_1 - K_2}{n - 1}, \\
\text{valeur balancée à la fin d'année } B_2 = B_1 - o_2; \\
r\text{-ème année: amortissement } o_r = \dfrac{B_{r-1} - K_r}{n - r + 1}, \\
\text{valeur balancée à la fin d'année } B_r = B_{r-1} - o_r; \\
\text{dans la dernière année l'amortissement est } o_n = B_{n-1} - K_n, \\
\text{et la valeur balancée à la fin d'année } B_n = B_{n-1} - o_n = K_n.
\end{array}\right\} \tag{3a}$$

Cette manière d'amortissement contient la possibilité que $B_r \leqq K_r$, ou bien qu'en cas d'une hausse des cours on peut atteindre le but d'amortissement plutôt. Un désavantage présente tout de même le fait, que la formule indépendante, nécessaire pour le contrôle de B_r, si l'on ne veut pas recompter toutes les valeurs précédentes, est trop compliquée:

$$B_r = \left(1 - \frac{r}{n}\right) B_0 + (n - r) \left[\frac{K_1}{n(n-1)} + \frac{K_2}{(n-1)(n-2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{K_3}{(n-2)(n-3)} + \ldots + \frac{K_r}{(n-r+1)(n-r)}\right]. \tag{3b}$$

Si
$$K_1 = K_2 = K_3 = \ldots = K_n = K,$$

alors les formules ($2a$), ($2b$) passent dans les formules ($1a$), ($1b$). Puisqu'il est

$$\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(n-r+1)(n-r)} = \frac{1}{n-r} - \frac{1}{n},$$

on peut écrire la formule ($3b$) également ainsi

$$B_r = \left(1 - \frac{r}{n}\right) B_0 + (n-r) K \left(\frac{1}{n-r} - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{r}{n}\right) B_0 + \frac{r}{n} K,$$

ce qui est donc la formule ($1a$).

La solution infinitésimale du problème est bien intéressante, si l'on considère $K(t)$ et $B(t)$ comme des fonctions continues du temps, ayant une dérivation dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq n$. La méthode continue ne change pas les formules ($2a$), ($2b$):

$$B(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right) B(0) + \frac{t}{n} K(t), \tag{4a}$$

$$\log B(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right) \log B(0) + \frac{t}{n} \log K(t). \tag{4b}$$

L'analogie des formules (3) se présente en passant à la limite, de la manière suivante:

$$o(t + \Delta t) = \frac{B(t) - K(t + \Delta t)}{n - t}$$

$$B(t + \Delta t) = B(t) - o(t + \Delta t) \,.\, \Delta t \left(\text{ou } o(t + \Delta t) = \frac{B(t) - B(t + \Delta t)}{\Delta t}\right)$$

$$\Delta t \to 0: \; \bar{o}(t) = - \frac{d\,B(t)}{dt} = \frac{B(t) - K(t)}{n - t},$$

ce qu'on peut écrire dans la forme

$$\frac{d\,B(t)}{dt} + \frac{B(t)}{n - t} - \frac{K(t)}{n - t} = 0, \quad 0 \leqq t \leqq n.$$

En résolvant cette équation différentielle linéaire on obtient [on trouve la constante de la condition initiale $B(0)$]

$$B(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right) B(0) + (n - t) \int_0^t \frac{K(z)}{(n - z)^2}\, dz. \tag{4c}$$

D'après la règle des expressions indéterminées la formule (4c) est aussi applicable pour $t = n$.

Si l'on écrit au lieu de $B(t)$ et $K(t)$ dans la formule (4c) log $B(t)$ et log $K(t)$, on obtient analogie de l'amortissement composé d'après la formule (4b):

$$\log B(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right) \log B(o) + (n - t) \int_0^t \frac{\log K(z)}{(n - z)^2}\, dz. \tag{4d}$$

Si $K(t)$ est constante, les formules (4c) et (4d) passent dans les formules (1a) [et (1b)].

Le fonctions $B(t)$ et $K(t)$ possèdent des qualités que l'on peut facilement examiner.

Il est donc évident, que les formules d'amortissement, appliquées habituellement, représentent des cas spéciaux des formules générales. Pour la pratique on recommande la formule (3); la formule (2b), donnant en général des résultats plus petits que la formule (2a), ne convient pas. La formule (2a) pourrait être appliquée en cas où une hausse rapide des cours semble exclue.

LITERATURA.

Journal of the Institute of Actuaries. Ročník LXIII., č. 306.

E. E. Rhodes: **Is Disability Insurance Practicable?** V letech 1926—1930 pojišťovny státu New-York provádějící invalidní pojištění utrpěly v něm značné ztráty. Autor má za to, že není to důkaz, že toto pojištění nelze prováděti, ale vidí příčinu jednak v silné konkurenci, jednak v neopatrné definici invalidity. Podle jeho názoru je především nutný velmi opatrný výběr risik a dále musí býti invalidita definována přísně, a to tak, že ztráta pracovní schopnosti musí býti větší než 75%.

H. P. Clay: **On Disability Benefits.** Referát o stavu invalidního pojištění ve V. Britanii, pokud je prováděno v souvislosti s životním pojištěním. Britské pojišťovny samotné nemají rozsáhlejších zkušeností v tomto směru, a také toto pojištění není nijak rozšířeno. Autor nepovažuje dnešní stav za účelný a doporučuje, aby aspoň bylo propagováno více životní pojištění s osvobozením od placení pojistného v případě trvalé pracovní neschopnosti.

A. Hunter: **Selections of Risks for Life Insurance.** Práce zabývá se vlastně zkušenostmi amerických pojišťoven s extrarisiky. V Americe podrobně se zvláštními risiky zabývá Joint Comitee on Mortality of the Medical Directors' Association — komise lékařských odborníků pojišťoven — která