Ota Fischer

Une remarque sur l'article de M. A. Guldberg: "On discontinuons frequency functions and statistical series."

Aktuárské vědy, Vol. 4 (1933), No. 4, 169–174

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144613`

Hierbei ist zur Abkürzung

$$v^t S^{(1)}_{k_\lambda+t} - P_{x_\lambda} a_{\overline{t|}} = a_{(t,\lambda)}, \; v^t S^{(2)}_{k_\lambda+t} - P_{x_\lambda} a_{\overline{t|}} = b_{(t,\lambda)}, \; v^{\nu_\lambda} S^{(3)}_{n_\lambda} - P_{x_\lambda} a_{\overline{\nu_\lambda|}} = c_{\nu_\lambda}$$

gesetzt worden.

Das Thema dieser Arbeit war bereits in dem seinerzeit nicht mehr veröffentlichten Schluß des im 14. Heft (1919) der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungs-Mathematiker abgedruckten Aufsatzes kurz behandelt und mußte vegen Raummangels auch aus dem im 28. Heft der genannten Zeitschrift veröffentlichten Aufsatz fortgelassen werden.

Une remarque sur l'article de M. A. Guldberg: „On discontinuous frequency functions and statistical series."[1])

Dr. *Ota Fischer.*

Dans l'article cité, M. A. Guldberg déduit d'équations aux différences finies des quattre fonctions de fréquence (binômial, de Poisson, de Pascal et hypergéometrique) tantôt des formules pour les moments complets même incomplets de ces fonctions, tantôt des critères si on peut représenter le collectif donné par une de ces fonctions. On peut trouver des résultats analogues même pour la loi de Polya.[2])

La loi de Polya

$$\mathrm{f}(x) = \binom{\frac{h}{d} + x - 1}{x} \frac{d^x}{(1+d)^{\frac{h}{d}+x}}, \quad x \geq 0 \tag{1}$$

satisfait à l'équation

$$\frac{\mathrm{f}(x+1)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{h + dx}{(1+d)(x+1)}. \tag{2}$$

Ecrivons l'équation (2) dans la forme

$$(1+d)(x+1)\,\mathrm{f}(x+1) = h\,\mathrm{f}(x) + dx\,\mathrm{f}(x)$$

et en la multipliant par

$$(x+1)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{1} x + 1$$

---

[1]) Skandinavisk Aktuarietidskrift 1931.

[2]) Dr. M. Vacek: Sur la loi de Polya régissant les faits corrélatifs. — Aktuárské vědy III.

nous obtenons

$$
\begin{aligned}
(1+d)\,(x+1)^{n+1}\,\mathrm{f}(x+1) = {} \\
= h\,\mathrm{f}(x)\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{1}x + 1\right] \\
+ d\,\mathrm{f}(x)\left[x^{n+1} + \binom{n}{1}x^{n} + \binom{n}{2}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{1}x^2 + x\right].
\end{aligned} \tag{3}
$$

Formons la somme par rapport à x dans les limites $(0, \infty)$ et en désignant par

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^n\,\mathrm{f}(x) = m_n$$

le moment de puissance d'ordre n calculé par rapport à l'origine et par

$$\sum_{x=0}^{\infty} (x-m_1)^n\,\mathrm{f}(x) = \mu_n$$

le moment calculé par rapport à moyenne arithmétique m_1, et

parce que $\sum_{x=0}^{\infty}(x+1)^{n+1}\,\mathrm{f}(x+1) = m_{n+1}$, nous avons

$$
\begin{aligned}
(1+d)\,m_{n+1} = h\left[m_n + \binom{n}{1}m_{n-1} + \binom{n}{2}m_{n-2} + \ldots + \binom{n}{1}m_1 + m_0\right] \\
+ d\left[m_{n+1} + \binom{n}{1}m_n + \binom{n}{2}m_{n-1} + \ldots + \binom{n}{1}m_2 + m_1\right]
\end{aligned}
$$

ou une formule recurrente

$$
\begin{aligned}
m_{n+1} = h\left[m_n + \binom{n}{1}m_{n-1} + \binom{n}{2}m_{n-2} + \ldots + \binom{n}{1}m_1 + m_0\right] \\
+ d\left[\binom{n}{1}m_n + \binom{n}{2}m_{n-1} + \ldots + \binom{n}{1}m_2 + m_1\right].
\end{aligned} \tag{4}
$$

Posons dans (4)

$$
\begin{aligned}
n = 0 \qquad & m_1 = hm_0 = h \\
n = 1 \qquad & m_2 = h\,[m_1 + m_0] + dm_1 = h^2 + h + hd \\
& \mu_2 = m_2 - m_1{}^2 = h\,(1+d) \\
n = 2 \qquad & m_3 = h\,[m_2 + 2m_1 + m_0] + d\,[2m_2 + m_1] = \\
& \quad = h^3 + 3h^2\,(1+d) + h\,(2d^2 + 3d + 1) \\
& \mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1{}^3 = h\,(1+d)\,(1+2d)
\end{aligned}
$$

Par un moment incomplet d'ordre n calculé par rapport à l'origine nous désignons la somme

$${}_t m_n = \sum_{x=t}^{\infty} x^n\,\mathrm{f}(x)$$

et par

$$ {}_t\mu_n = \sum_{x=t}^{\infty} (x - m_1)^n \, \mathrm{f}(x) $$

le moment incomplet calculé par rapport à moyenne arithmétique.

Si dans l'équation (3) nous formons la somme par rapport à x dans les limites (t, ∞) et parce que

$$ \sum_{x=t}^{\infty} (x+1)^{n+1} \, \mathrm{f}(x+1) = \sum_{x=t}^{\infty} x^{n+1} \, \mathrm{f}(x) - t^{n+1} \, \mathrm{f}(t) = {}_t m_{n+1} - t^{n+1} \, \mathrm{f}(t) $$

nous obtenons une formule recurrente pour les moments incomplets

$$ \begin{aligned} {}_t m_{n+1} = (1+d)\, t^{n+1} \, \mathrm{f}(t) + h \Bigg[{}_t m_n + \binom{n}{1} {}_t m_{n-1} + \binom{n}{2} {}_t m_{n-2} + \ldots \\ \ldots + \binom{n}{1} {}_t m_1 + {}_t m_0 \Bigg] + d \Bigg[\binom{n}{1} {}_t m_n + \binom{n}{2} {}_t m_{n-1} + \ldots \\ \ldots + \binom{n}{1} {}_t m_2 + {}_t m_1 \Bigg]. \end{aligned} \tag{5} $$

Posons dans (5) $n = 0$

$$ {}_t m_1 = (1+d)\, t \, \mathrm{f}(t) + h \, {}_t m_0 $$

$$ {}_t\mu_1 = \sum_{x=t}^{\infty} (x-h)\, \mathrm{f}(x) = {}_t m_1 - h \, {}_t m_0, $$

ainsi que

$$ {}_t\mu_1 = (1+d)\, t \, \mathrm{f}(t). \tag{6} $$

Calculons le moment ${}_t m_0$:

$$ \begin{aligned} {}_t m_0 = \sum_{x=t}^{\infty} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(t) + \frac{(h+dt)}{(t+1)(1+d)} \mathrm{f}(t) + \\ + \frac{(h+dt)\,[h + d(t+1)]}{(t+1)(t+2)(1+d)^2} \mathrm{f}(t) + \ldots = \mathrm{f}(t) \Bigg[1 + \frac{\left(\frac{h}{d} + t\right)}{(t+1)} \cdot \left(\frac{d}{1+d}\right) + \\ + \frac{\left(\frac{h}{d} + t\right)\left(\frac{h}{d} + t + 1\right)}{(t+1)(t+2)} \left(\frac{d}{1+d}\right)^2 + \ldots \end{aligned} $$

En usant le symbole $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma; z)$ pour la série hypergéometrique

$$ 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \,.\, \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1) \,.\, \beta(\beta+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma(\gamma+1)} z^2 + \ldots = $$

$$ = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} (1-zx)^{-\beta} \, dx $$

nous voyons que

$$
{}_t m_0 = \mathrm{f}(t)\, \mathrm{F}\left(1, \frac{h}{d} + t,\ t + 1; \frac{d}{1+d}\right) =
$$

$$
= t\, \mathrm{f}(t) \int_0^1 (1 - x)^{t-1} \left(1 - \frac{dx}{1+d}\right)^{-\frac{h}{d} - t} dx. \tag{7}
$$

Afin d'obtenir les critères pour décider si on peut représenter le collectif donné par la loi de Polya, écrivons l'équation (2) dans la forme

$$
\frac{\mathrm{f}(x+1)}{\mathrm{f}(x)} (x + 1) - \frac{dx}{1+d} = \frac{h}{1+d}
$$

et éliminons h et d de formules

$$
m_1 = h, \qquad \mu_2 = h\,(1 + d)
$$

alors

$$
d = \frac{\mu_2 - m_1}{m_1}, \qquad \frac{1}{1+d} = \frac{m_1}{\mu_2}
$$

ainsi que nous obtenons en posant ces valeurs dans l'équation précédente

$$
\frac{\mathrm{f}(x+1)}{\mathrm{f}(x)} (x + 1) - \frac{\mu_2 - m_1}{\mu_2}\, x = \frac{m_1^{\,2}}{\mu_2}. \tag{8}
$$

M. Ragnar Frisch dans son article „On the use of the difference equation in the study of frequency functions"[3]) désigne les critères de cette espèce „local criteria" c'est à dire les critères qui indiquent si on peut exprimer aux environ du point x la fonction de fréquence $\mathrm{H}(x)$ $x = 0, 1, \ldots$ de collectif empirique par la fonction donné. Une autre critère, nous la pouvons obtenir si nous éliminons de l'équation

$$
\mu_3 = h\,(1 + d)\,(1 + 2d)
$$

h et d:

$$
\mu_3 = \mu_2 \left(1 + 2\,\frac{\mu_2 - m_1}{m_1}\right)
$$

respectivement

$$
\frac{\mu_3 m_1}{\mu_2\,(2\mu_2 - m_1)} = 1. \tag{9}
$$

M. Ragnar Frisch apelle les critères de cette espèce „total criteria".

Si nous désignons par $\psi(x)$ la fonction

$$
\frac{\mathrm{f}(x+1)}{\mathrm{f}(x)} (x + 1) - \frac{\mu_2 - m_1}{\mu_2}\, x
$$

et par $\alpha(x)$ la fonction $\frac{\mu_2}{m_1^{\,2}}\,\psi(x)$, nous avons $\alpha(x) = 1$.

---

[3]) Metron 1932.

Etant donné un collectif empirique $H(x)$, $x = 0, 1, \ldots$, nous en pouvons calculer les moments

$$m'_1 = \Sigma\, x\, H(x)$$
$$\mu'_2 = \Sigma\, (x - m'_1)^2\, H(x)$$
$$\mu'_3 = \Sigma\, (x - m'_1)^3\, H(x)$$

et alors la fonction

$$\alpha'(x) = \frac{\mu'_2}{m'^2_1}\left[\frac{H(x+1)}{H(x)}(x+1) - \frac{\mu'_2 - m'_1}{\mu'_2}x\right]$$

et l'expression

$$\frac{\mu'_3 m'_1}{\mu'_2\,(2\mu'_2 - m'_1)}.$$

Les deux valeurs doivent s'approcher de 1 si nous voulons user la loi de Polya. Si nous posons dans les résultats trouvés pour la loi de Polya $d = 0$, nous obtenons des formules valables pour la loi de Poisson, parce que pour $d = 0$ la loi de Polya passe en loi de Poisson.

Comme exemple est calculé la fonction $\alpha(x)$ de collectif cité dans le travail de M. Vacek, concernant les décès des femmes par suite de scarlatine de 1921 jusqu'à 1929:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$H(x)$	6	3	6	7	11	8	10	7	11	7
$H^*(x)$	3,3	4,4	6,1	7,3	8,8	8,9	9,1	8,7	8,7	7,8
$\alpha'(x)$	0,52	0,83	0,90	1,13	0,96	1,12	1,10	1,35	1,13	1,18

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$H(x)$	7	6	4	4	2	2	2	1	1	1	2
$H^*(x)$	6,9	5,2	4,6	3,6	2,7	2,1	1,7	1,3	1,2	1,1	1
$\alpha'(x)$	1,03	1,00	0,91	0,80	1,01	1,25	0,98	2,15	2,25	2,20	

x = nombre de mois, $H(x)$ = nombre de décès.

$$m'_1 = 7{,}41$$
$$\mu'_2 = 21{,}44$$
$$\mu'_3 = 60{,}56$$
$$\psi(x) = \frac{H^*(x+1)}{H^*(x)}(x+1) - 0{,}65\,x$$
$$\alpha'(x) = 0{,}39\,\psi'(x)$$

Pour le calcul on a usé des valeurs $H^*(x)$ obtenus de $H(x)$ au moyen de la formule

$$H^*(x) =$$
$$= \tfrac{1}{9}\,[H(x-2) + 2H(x-1) + 3H(x) + 2H(x+1) + H(x+2)]$$

parce que les valeurs de $H(x)$ balancent beaucoup à cause de la brieveté des observations (pas plus que 9 ans).

Le critère (9) donne

$$\frac{\mu'_3 m'_1}{\mu'_2 (2\mu'_2 - m'_1)} = \frac{448,75}{760,48} = 0,59.$$

A la fin il faut faire remarquer qu'avec la question des équations aux différences finies dans l'analyse des fonctions de fréquence discontinues s'est occupé systématiquement M. Ragnar Frisch dans son article cité plus haut et pour les fonctions de fréquence discontinues de deux variables de nouveau M. A. Guldberg dans son travail „On discontinuous frequency functions of two variables" dans Skandinavisk Aktuarietidskrift 1933.

Les Conférences du prof. René Risser à Prague.

Monsieur René Risser, professeur au Conservatoire des arts et métiers et l'ancien chef du Actuariat du ministère du travail à Paris a été récemment à Prague, où il a eu plusieurs Conférences.

Dans la conférence, tenue à l'Institut social tchécoslovaque, il nous a donné une vue sur le développement de la loi sur les assurances sociales en France, passant par les rapports des experts jusqu'à la loi définitive de 1930. Les raisons principales qui ont exigé l'introduction de cette loi en France sont les suivantes: les conséquences de la guerre mondiale sur la morbidité de la population en France, la mortalité augmentée de la masse ouvrière, l'insuffisance des lois anciennes sur l'assurance maladie et l'assurance-pension et finalement l'aplication des lois sur les assurances sociales en Alsace et Lorraine.

La nouvelle loi sur les assurances sociales est appliquée depuis le 1er juillet 1930. Le nombre d'assuré a atteint le chiffre de 11,320.000 à la fin de l'année 1932, donc une augmentation de plus de 1,250.000 en comparaison avec l'effectif de l'année 1931. Le total des cotisations fait à la fin de l'année 1931 environ 5,2 milliards Frs et à la fin de l'année 1932 environ 8,7 milliards Frs. Le nombre des caisses d' assurances diminue; au commencement de la mise en application de la loi, le nombre des caisses d'assurance a été de 846 et à la fin de l'année 1932 leur nombre n'a fait que 775, pour les assurés non-agricoles. En 1931, on a payé pour les prestations plus de 820 millions Frs, dont 81,8% pour les prestations d'assurance-maladie.

Actuellement, on voit déjà une légère diminution de la morbidité en France, grâce à l'introduction des assurances sociales.

Les Conférences tenues au cercle des Actuaires tchécoslovaques seront publiées verbalement dans le prochain numéro de notre revue.

1ère Conférence à la Faculté des Sciences de Prague:

De la dispersion afférente à la somme de n erreurs dans le cas où chacune des erreurs composantes est régie par une loi simple.

Essai d'une représentation analytique. — Généralisation. Le problème en question se présente journellement aux expérimentateurs lorsqu'ils effectuent des sommations de nombres définis à une unité d'un