Alfred Tauber

Die Zufallsverträge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. II

*Aktuárské vědy*, Vol. 5 (1935), No. 2, 65–73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144625

# Die Zufallsverträge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von Prof. Dr. *Alfred Tauber* (Wien). (Schluß.)

Als Beispiel für eine genauere Berechnung der Hauptkonstante mögen $k$ Verträge einfachster Art in Kombination mit $k'$ anderen Verträgen, ebenfalls einfachster Art, gebracht werden. Die ersteren vereinbaren für das mit der Wahrscheinlichkeit $u$ erwartete Eintreffen eines Ereignisses den Preis $\mathfrak{A}$ gegen den Einsatz $\mathfrak{C}$ und für die letzteren sollen die entsprechenden Werte $u'\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ gelten. Sowohl $k$ als $k'$ werde als große Zahl angenommen. Nun kann die Kombination des $(k - \nu)$-maligen Eintreffens des ersten Ereignisses mit dem $(k' - \nu')$-maligen Eintreffen des zweiten Ereignisses auf $\binom{k}{\nu}\binom{k'}{\nu'}$-fache Weise vorkommen und ruft jedesmal zu Lasten des Unternehmers einen finanziellen Effekt

$$(k - \nu)\mathfrak{A} + (k' - \nu')\,\mathfrak{A}' - k\mathfrak{C} - k'\mathfrak{C}'$$

hervor, die korrespondierende Wahrscheinlichkeit ist

$$u^{k-\nu}\ (1 - u)^{\nu}\ u'^{k'-\nu'}\ (1 - u')^{\nu'},$$

daher wird das kombinierte Risiko $\widehat{R}$ gleich

$$u^k u'^{k'} \sum\sum \binom{k}{\nu}\binom{k'}{\nu'}\left(\frac{1-u}{u}\right)^{\nu}\left(\frac{1-u'}{u'}\right)^{\nu'} \times$$
$$\times\,[k\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) + k'\,(\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}') - \nu\mathfrak{A} - \nu'\mathfrak{A}'],$$

die Summe ausgedehnt über alle $\nu$, $\nu'$, welche den Ausdruck in der eckigen Klammer positiv machen. Um die Summation über $\nu'$ auszuführen und die Bezeichnungsweise (45) anwenden zu können, definiert man

$$\varrho_\nu = \frac{k'\mathfrak{A}'}{k\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) + k'\,(\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}') - \nu\mathfrak{A}},\quad \sigma = \frac{1}{1-u},\quad \sigma' = \frac{1}{1-u'},\tag{60}$$

dann geht der Wert von $\widehat{R}$ in die Summe über

$$\hat{R} = \mathfrak{A}' u^k u'^{k'} \sum_\nu \binom{k}{\nu} (\sigma - 1)^{-\nu}\, Z_{k'}(\varrho_\nu, \sigma') \tag{61}$$

mit der Bedingung für $\nu$, daß $\varrho_\nu$ positiv ausfällt. Wieder wie bei dem Problem des vorigen Abschnittes, lassen sich alle zulässigen Werte von $\nu$ in drei Teilsysteme zerlegen, jenachdem

$$0 < \varrho_\nu \leqq 1, \quad 1 < \varrho_\nu < \sigma', \quad \varrho_\nu \geqq \sigma',$$

statthat. Für den ersten Teil gibt dies die Bedingung für $\nu$

$$\nu \mathfrak{A} \leqq k(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) - k'\mathfrak{C}'$$

er entfällt bei $k(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) < k'\mathfrak{C}'$, während sonst die Zahl $\nu$ kleiner als

$$\mu = \frac{k(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) - k'\mathfrak{C}'}{\mathfrak{A}} + \delta, \; 0 \leqq \delta < 1, \tag{62}$$

sein muß. Dieser Teil von $\hat{R}$, auf die Werte $\nu = 0$ bis $\mu - 1$ bezüglich, ist in geschlossener Form darstellbar, vgl. (45$a$),

$$\hat{R}^I = \mathfrak{A}' u^k \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \binom{k}{\nu} (\sigma - 1)^{-\nu} \left(\frac{k'}{\varrho_\nu} - \frac{k'}{\sigma'}\right). \tag{62a}$$

Die Werte $\nu$ des zweiten Teiles $R^{II}$ von $\hat{R}$ haben die Bedingung $\varrho_\nu < \sigma'$ oder

$$\nu \mathfrak{A} < k(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) + k'(\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}') - k'\mathfrak{A}'(1 - u')$$

zu erfüllen, dies erfordert, daß die rechte Seite positiv und

$$\nu < \mu', \; \mu' = \frac{k(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) - k'S'}{\mathfrak{A}} + \delta', \; S' = \mathfrak{C}' - u'\mathfrak{A}' \tag{63}$$

ist. Dann läßt sich $\hat{R}^{II}$, bei Ersetzung des Wertes $Z_{k'}(\varrho_\nu, \sigma')$ durch

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma' - 1}\right)^{k'} \left(\frac{k'}{\varrho_\nu} - \frac{k'}{\sigma'}\right) + \frac{Z_{k'}\left(\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu - 1}, \frac{\sigma'}{\sigma' - 1}\right)}{(\sigma' - 1)^{k'}},$$

vgl. (45$b$), mit $\hat{R}^I$ vereinigen zu

$$\begin{aligned} \hat{R}^I + \hat{R}^{II} = \mathfrak{A}' u^k \sum_{\nu=0}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} (\sigma - 1)^{-\nu} \left(\frac{k'}{\varrho_\nu} - \frac{k'}{\sigma'}\right) + \\ + \mathfrak{A}' u^k u'^{k'} \sum_{\nu=\mu}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} (\sigma - 1)^{-\nu} (\sigma' - 1)^{-k'} Z_{k'}\left(\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu - 1}, \frac{\sigma'}{\sigma' - 1}\right) \end{aligned} \tag{63a}$$

Die erste Zeile rechts hat gemäß (60) den Wert

$$u^k \sum_{\nu=0}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} (\sigma - 1)^{-\nu} [k(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) - k'S' - \nu\mathfrak{A}],$$

der mit $\mathfrak{A} u^k Z_k(\varrho, \sigma)$ übereinstimmt, wenn die Größe

$$\varrho = \frac{k\mathfrak{A}}{k(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) - k'S'} = \frac{1}{1 - u - \frac{S}{\mathfrak{A}} - \frac{k'S'}{k\mathfrak{A}}}, \quad S = \mathfrak{C} - u\mathfrak{A} \tag{64}$$

eingeführt wird. Die Hauptdimension von $u^k Z_k(\varrho, \sigma)$ ist aber, wegen $\varrho > \sigma_k$,

$$\left[\frac{\varrho}{\sigma}\left(\frac{\sigma - 1}{\varrho - 1}\right)^{1 - \frac{1}{\varrho}}\right]^k, \tag{64a}$$

daher jene Konstante $\beta^I$, deren $(k + k')$-te Potenz den Betrag (64*a*) besitzt

$$\beta^I = \left[\frac{\varrho}{\sigma}\left(\frac{\sigma - 1}{\varrho - 1}\right)^{1 - \frac{1}{\varrho}}\right]^{\frac{k}{k + k'}}, \tag{64b}$$

und bei Äquivalenz ($\varrho = \sigma$) gleich der Einheit.

Für den Ausdruck in der zweiten Zeile von (63*a*) richtet sich die Hauptdimension nach derjenigen der Funktionen

$$Z_{k'}\left(\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu - 1}, \frac{\sigma'}{\sigma' - 1}\right) \sim (\sigma' - 1)^{k' - \mu_\nu} \binom{k'}{\mu_\nu}, \; \mu_\nu = \frac{k'}{\varrho_\nu} - \delta_\nu, \tag{65}$$

vgl. (51), wird also vergleichbar mit

$$u^k u'^{k'} \sum_{\nu=\mu}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} \binom{k'}{\mu_\nu} (\sigma - 1)^{-\nu} (\sigma' - 1)^{-\mu_\nu}$$

Der dritte Teil von $\widehat{R}$ bezieht sich auf die Werte von $\nu$, welche $\varrho_\nu \gtreqless \sigma'$ bewirken mit der Obergrenze

$$m = \frac{k(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) + k'(\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}')}{\mathfrak{A}} - \delta^*, \tag{66}$$

und kann wegen $Z_{k'}(\varrho_\nu, \sigma') \sim \binom{k'}{\mu_\nu} (\sigma' - 1)^{-\mu_\nu}$ mit (65a) vereinigt werden zu

$$u^k u'^{k'} \sum_{\nu=\mu}^{m-1} \binom{k}{\nu} \binom{k'}{\mu_\nu} (\sigma - 1)^{-\nu} (\sigma' - 1)^{-\mu_\nu}. \tag{66a}$$

Da zwischen den ganzen Zahlen $\mu_\nu$, $m$, $\nu$ die Beziehung

$$\mu_\nu = \mathfrak{b}(m - \nu) + \mathfrak{b}\delta^* + \delta_\nu, \; \mathfrak{b} = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$$

besteht, ist die zu untersuchende Summe

$$u^k u'^{k'} \sum_{\nu=\mu}^{m-1} \binom{k}{\nu} \binom{k'}{\mathfrak{b}m - \mathfrak{b}\nu + \mathfrak{b}\delta^* + \delta_\nu} \xi^\nu, \quad \xi = \frac{(\sigma' - 1)^{\mathfrak{b}}}{\sigma - 1}; \tag{67}$$

ihre Struktur unterscheidet sich von jener in (52$a$) nur dadurch, daß hier $k'$ im zweiten Binomialkoeffizienten die Oberstelle einimmt. Nach ähnlichem Vorgange wie dort zieht man aus dem angenäherten Werte des Summanden

$$\xi^\nu \left[\frac{k}{\nu}\left(\frac{k}{\nu} - 1\right)^{\frac{\nu}{k} - 1}\right]^k \left[\frac{k'}{\mathfrak{b}m - \mathfrak{b}\nu}\left(\frac{k'}{\mathfrak{b}m - \mathfrak{b}\nu} - 1\right)^{\frac{\mathfrak{b}m - \mathfrak{b}\nu}{k'} - 1}\right]^{k'}$$

die $k$-te Wurzel und erhält, wenn

$$t = \frac{\nu}{k}, \quad \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{b}m}{k}, \quad g = \frac{k'}{k} \tag{67a}$$

als abkürzende Bezeichnungen verwendet werden,

$$\xi^t \frac{g^g (g - \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t)^{\mathfrak{a} - g - \mathfrak{b}t}}{t^t (1 - t)^{1-t} (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t)^{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t}}, \quad \mathfrak{b}t < \mathfrak{a} < g + \mathfrak{b}t. \tag{68}$$

Nun ist jener Wert von $t < 1$ zu ermitteln, für welchen der Ausdruck (68) sein Maximum erreicht. Zu diesem Zwecke wird der bezüglich $t$ genommene Differentialquotient des Logarithmus von (68) Null gesetzt

$$0 = \lg \xi - \lg t + \lg (1 - t) + \mathfrak{b} \lg (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t) - \mathfrak{b} \lg (g - \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t).$$

so daß die Gleichung für den gesuchten Wert von $t$ lautet

$$0 = \mathfrak{f}(t) = \xi - \frac{t}{1 - t}\left(\frac{g - \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t}{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t}\right)^{\mathfrak{b}}. \tag{69}$$

Sie hat wegen $\mathfrak{f}'(t) < 0$ nicht mehr als eine Wurzel. Durch Entnahme von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t$ aus dieser Gleichung und Eintragen des Wertes in den Ausdruck (68) wird dessen Maximum $\eta$

$$\eta = \frac{1}{1 - t}\left(\xi \frac{1 - t}{t}\right)^{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}} \left(\frac{g}{g - \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t}\right)^g, \quad \mathfrak{f}(t) = 0, \tag{69a}$$

womit die Hauptkonstante $\beta^{II}$ von (67) bestimmt ist

$$(\beta^{II})^{k + k'} = u^k u'^{k'} \ (\sigma - 1)^{-\mathfrak{b}m} \, \eta^k.$$

Beiderseits die $k$-te Wurzeln gezogen und $\xi$ durch seinen Wert $\dfrac{(\sigma' - 1)^{\mathfrak{b}}}{\sigma - 1}$ ersetzt, resultiert mit Rücksicht auf (60)

$$(\beta^{II})^{1+g} = \frac{u}{1 - t}\left(\frac{1 - u}{t}\,\frac{1 - t}{u}\right)^{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}} \left(\frac{g u'}{g - \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t}\right)^g, \quad \mathfrak{f}(t) = 0. \tag{69b}$$

Nur im Äquivalenzfalle nimmt, wie auch hier zu zeigen, $\beta^{II}$ den Maximalwert 1 an, sonst ist $\beta^{II}$ ein echter Bruch und die Größenordnung des kombinierten Risiko's wird durch den größeren der beiden Beträge in (64b), (69b) gegeben.

Anschließend an diese Bestimmung von $\widehat{R}$ wäre das Problem zu behandeln, ob in dem besonderen Falle

$$u' = u, \quad \mathfrak{A}'/\mathfrak{A} = \mathfrak{C}'/\mathfrak{C},$$

d. h., daß der zweite Vertrag dieselbe Wahrscheinlichkeit und dasselbe Verhältnis der finanziellen Effekte aufweist, wie der erste, den Verträgen ein gegenseitiges „Kombinationsgewicht" beigemessen werden kann, etwa derart, daß wenn das kombinierte Risiko von je $k$ Verträgen der ersten und zweiten Kategorie in der Größenordnung mit jenem von $(k + k_1)$ Verträgen der ersten Kategorie übereinstimmt, der zweite Vertrag das Kombinationsgewicht $k_1/k$ gegenüber dem ersten haben soll.

Verallgemeinert, würde eine solche Gewichtsbestimmung gestatten, den obigen Vorbehalt bezüglich der Verträge, für welche das kombinierte Risiko zu bilden ist, dahin zu restringieren, daß sich die Verträge auf Gruppen verteilen sollen, deren jede eine große Zahl Verträge mit denselben Wahrscheinlichkeiten und mit proportionalen finanziellen Effekten enthält.

## Anhang.

1. Die Größenordnung der Polynome $\Psi_\lambda(\varrho, \sigma)$ bei $\varrho > \sigma$. An Stelle des in (23) definierten Polynoms $\Psi_\lambda(\varrho, \sigma)$ werde die Funktion

$$\psi_\lambda(\varrho, \sigma) = \frac{1}{\varrho^{\lambda+1}} (\varrho - 1)^{\lambda-\mu} (\sigma - 1) \Psi_\lambda(\varrho, \sigma), \; \frac{\lambda}{\varrho} = \mu - \delta, \; 0 \leqq \delta < 1 \quad (70)$$

betrachtet, und deren Größenordnung $\mu^{-\frac{1}{2}}$ nachgewiesen, gemäß der Formel

$$\psi_\lambda(\varrho, \sigma) \backsim \left[\frac{\tau}{(1-\tau)^2} - \frac{\delta\tau}{1-\tau}\right] \sqrt{\frac{\varrho}{2\pi(\varrho - 1)\mu}}, \quad \tau = \frac{\sigma - 1}{\varrho - 1} < 1. \quad (70a)$$

Nach der Definition (23) ist nämlich, wenn $\tau = \dfrac{\sigma - 1}{\varrho - 1}$ gesetzt wird,

$$\psi_\lambda(\varrho, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \left(\frac{\lambda}{\varrho} - \nu\right) \binom{\lambda}{\nu} \frac{(\varrho - 1)^{\lambda-\nu} \tau^{\mu-\nu}}{\varrho^\lambda}$$

oder bei Eintragung des Wertes $\lambda = \mu\varrho - \delta\varrho$

$$\psi_\lambda(\varrho, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} (\mu - \nu - \delta) \binom{\mu\varrho - \delta\varrho}{\nu} \frac{(\varrho - 1)^{\mu\varrho-\delta\varrho-\nu} \tau^{\mu-\nu}}{\varrho^{\mu\varrho-\delta\varrho}}.$$

Dann zeigt die Substitution des Stirling'schen Näherungswertes (29a) für den hier auftretenden Binomialkoeffizienten (vom Summanden für $\nu = 0$ darf abgesehen werden) die Vergleichbarkeit von $\psi_\lambda(\varrho, \sigma)$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{(\mu-\nu-\delta)\,(\mu\varrho-\delta\varrho)^{\mu\varrho-\delta\varrho+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\nu^{\nu+\frac{1}{2}}}\,(\mu\varrho-\delta\varrho-\nu)^{\mu\varrho-\delta\varrho-\nu+\frac{1}{2}}}\;\frac{(\varrho-1)^{\mu\varrho-\delta\varrho-\nu}\,\tau^{\mu-\nu}}{\varrho^{\mu\varrho-\delta\varrho}}.$$

Zieht man zunächst den Fall $\delta = 0$ in Behandlung und bringt den Summanden durch die Zerlegung $(\mu\varrho-\nu)^{\mu\varrho-\nu+\frac{1}{2}} = \mu^{\mu\varrho-\nu+\frac{1}{2}}\left(\varrho-\frac{\nu}{\mu}\right)^{\mu\varrho-\nu+\frac{1}{2}}$ in die Form

$$\frac{(\mu-\nu)\,\tau^{\mu-\nu}\sqrt{\varrho}}{\sqrt{2\pi\,\nu\left(\varrho-\frac{\nu}{\mu}\right)}}\left[\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{\mu}}\left(\frac{\varrho-\frac{\nu}{\mu}}{\varrho-1}\right)^{\varrho-\frac{\nu}{\mu}}\right]^{-\mu}, \tag{70b}$$

so wird seine Dimension, wofern man vorerst den Fall $1-\nu/\mu < \varrho - 1$ betrachtet, der für $\nu \geq \nu_0$ erfüllt sei, aus der Reihenentwicklung ersichtlich, die für den Logarithmus des Ausdruckes in der eckigen Klammer

$$(1-h)\lg(1-h) + (\varrho-1+h)\lg\left(1+\frac{h}{\varrho-1}\right),\quad h = 1-\frac{\nu}{\mu} \tag{70c}$$

nach Potenzen von $h$ vorzunehmen ist. Diese Potenzreihe, für $h < \varrho - 1$, lautet

$$\frac{\varrho}{\varrho-1}\,\frac{h^2}{2} + \frac{\varrho^2-2\varrho}{(\varrho-1)^2}\,\frac{h^3}{6} + \ldots,$$

somit ist $\psi_\lambda(\varrho, \sigma)$ auch mit der Summe

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\mu-1} \frac{(\mu-\nu)\,\tau^{\mu-\nu}\sqrt{\varrho}}{\sqrt{2\pi\nu\left(\varrho-\frac{\nu}{\mu}\right)}}\,e^{-\mu\left[\frac{\varrho}{\varrho-1}\frac{(\mu-\nu)^2}{2\mu^2}+\frac{\varrho^2-2\varrho}{(\varrho-1)^2}\frac{(\mu-\nu)^3}{6\mu^3}+\ldots\right]}$$

vergleichbar, die bei Substitution von $\mu - n$ statt $\nu$ übergeht in

$$\sum_{n=1}^{\mu-\nu_0} \frac{n\tau^n\sqrt{\varrho}}{\sqrt{2\pi\,(\mu-n)\left(\varrho-1+\frac{n}{\mu}\right)}}\,e^{-\frac{\varrho}{\varrho-1}\frac{n^2}{2\mu}-\frac{\varrho^2-2\varrho}{(\varrho-1)^2}\frac{n^3}{6\mu^3}-\cdots}.$$

Aber infolge des Einflusses der Exponentialfunktion haben die Glieder für Werte von $n$, welche die Dimension $\sqrt{\mu}$ überschreiten, relativ kleine Beträge, deshalb ist

$$\psi_\lambda(\varrho, \sigma) \sim \sqrt{\frac{\varrho}{2\pi\,(\varrho-1)\,\mu}}\sum_{n=1}^{\sim\sqrt{\mu}} n\tau^n e^{-\frac{\varrho}{\varrho-1}\frac{n^2}{2\mu}} \tag{71}$$

und diese vereinfachte Summe darf nachträglich wieder bis $\mu$ oder darüber hinaus erstreckt werden, ohne die Dimension zu ändern. Anderseits nimmt in dem oben ausgeschlossenen, nur bei $\varrho < 2$ möglichen Fall $h \geqq \varrho - 1$ der Ausdruck (70$c$) sein Minimum für $h = \varrho - 1$ an, sodass die betreffenden Summanden von (70$b$), als mit einer positiven Potenz von $e^{-\mu}$ vergleichbar, irrelevant für die Gesamtsumme bleiben. Eine Obergrenze für $\psi$ erhält man sofort, da $\tau < 1$ ist, durch gänzliche Vernachlässigung der Exponentialfunktion

$$\psi_\lambda(\varrho, \sigma) \lesssim \sqrt{\frac{\varrho}{2\pi(\varrho-1)\mu}} \sum_1^\infty \nu\tau^\nu = \frac{\tau}{(1-\tau)^2}\sqrt{\frac{\varrho}{2\pi(\varrho-1)\mu}} \tag{71a}$$

und analog, allgemeiner — in (71$a$) tritt dann $(\nu - \delta)\,\tau$ statt $\nu\tau$ auf — für $\delta$ zwischen 0 und 1, die in (70$a$) angegebene Obergrenze. Mit Rücksicht auf die Formel

$$\frac{(\varrho-1)^{\lambda-\mu}}{\varrho^\lambda}\binom{\lambda}{\mu} \sim \sqrt{\frac{\varrho}{2\pi(\varrho-1)\mu}}, \quad \frac{\lambda}{\varrho} = \mu - \delta,$$

deren Richtigkeit daraus folgt, daß die linke Seite den Näherungswert

$$\frac{(\varrho-1)^{\lambda-\mu}}{\varrho^\lambda}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^\lambda\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)^{\mu-\lambda}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda-\mu)}} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu\varrho}\right)^\lambda\left(\frac{\mu\varrho-\mu}{\lambda-\mu}\right)^{\lambda-\mu}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda-\mu)}}$$

besitzt, vgl. (29$a$), (29$b$), findet man aus (70) für das Polynom $\Psi_\lambda(\varrho, \sigma)$ die Größenordnung

$$\Psi_\lambda(\varrho, \sigma) \sim \frac{\varrho}{\sigma-1}\left[\frac{\tau}{(1-\tau)^2} - \frac{\delta\tau}{1-\tau}\right]\binom{\lambda}{\mu}. \tag{72}$$

Die in Formel (31) angeführten Konstanten $\alpha$, $b$ haben hier die Werte

$$\alpha = 0, \; b = \varrho\left[\frac{\varrho-1}{(\varrho-\sigma)^2} - \frac{\delta}{\varrho-\sigma}\right].$$

Indes wird bei geringem Unterschiede zwischen $\varrho$ und $\sigma$ diese Dimensionsangabe mit einer an Betrag großen Konstanten $b$ behaftet, und es erscheint zweckmäßig, eine Obergrenze für $\Psi$ zu ermitteln, welche keinen solchen Nachteil hat: Entweder man interpoliert die beiden Werte, die sich aus (23) resp (26) ergeben

$$\Psi_\lambda(\varrho, 1) = \varrho(1-\delta)\binom{\lambda}{\mu-1} = \mu\varrho\frac{1-\delta}{\lambda-\mu+1}\binom{\lambda}{\mu} \sim \frac{\varrho}{\varrho-1}\binom{\lambda}{\mu},$$

$$\Psi_\lambda(\varrho, \varrho) = \mu\binom{\lambda}{\mu}$$

geometrisch zwischen $\tau = 0$ und $\tau = 1$

$$\Psi_\lambda(\varrho, \sigma) \sim \left[\left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}\right)^{1-\tau} \mu^\tau\right] \binom{\lambda}{\mu}, \tag{72a}$$

was für Formel (31) die Konstanten $\alpha = \tau$, $b = \frac{\varrho^{1-2\tau}}{(\varrho - 1)^{1-\tau}}$ liefert. Oder noch einfacher, man wendet die Ungleichung an

$$\Psi_\lambda(\varrho, \sigma) < \Psi_\lambda(\varrho, \varrho) = \mu \binom{\lambda}{\mu} \sim \frac{\lambda}{\varrho} \binom{\lambda}{\mu} \tag{72b}$$

und erhält $\alpha = 1$, $b = 1/\varrho$.

2. **Beweis der Formel** (45*a*). Die für $\sigma > 1$ definierte Summe

$$Z_\lambda(\varrho, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \left(\frac{\lambda}{\varrho} - \nu\right) \binom{\lambda}{\nu} (\sigma - 1)^{-\nu}, \quad \frac{\lambda}{\varrho} = \mu - \delta, \; 0 \leqq \delta < 1 \tag{72}$$

erstreckt sich, wenn $\varrho = 1$ ist, über die Werte $\nu = 0$ bis $\lambda - 1$, darf aber wegen des Faktors $\frac{\lambda}{\varrho} - \nu$ bis $\nu = \lambda$ ausgedehnt werden, dies gibt

$$Z_\lambda(1, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} (\lambda - \nu) \binom{\lambda}{\nu} (\sigma - 1)^{-\nu} = \frac{\lambda \sigma^\lambda}{(\sigma - 1)^\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right),$$

anderseits ist für $\varrho < 1$ jedenfalls $\mu > \lambda$ und weil für $\nu > \lambda$ der Binomialkoeffizient $\binom{\lambda}{\nu}$ verschwindet, folgt

$$Z_\lambda(\varrho, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\varrho} - \nu\right) \binom{\lambda}{\nu} (\sigma - 1)^{-\nu} = \frac{\lambda \sigma^\lambda}{(\sigma - 1)^\lambda} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma}\right), \quad \varrho < 1.$$

3. **Beweis der Formel** (45*b*). Gemäß der Definition (72) wird

$$Z_\lambda\left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}, \frac{\sigma}{\sigma - 1}\right) = \sum_{\nu=0}^{\mu'-1} \left(\lambda \frac{\varrho - 1}{\varrho} - \nu\right) \binom{\lambda}{\nu} \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1} - 1\right)^{-\nu},$$

worin die ganze Zahl $\mu'$ bestimmt ist durch

$$\mu' - \delta' = \lambda \frac{\varrho - 1}{\varrho} = \lambda - \mu + \delta, \; 0 \leqq \delta' < 1$$

und daher je nach $\delta = 0$ oder $\delta > 0$ den Wert $\lambda - \mu$ oder $\lambda - \mu + 1$ hat. Ersetzt man nun in der Summe für $Z_\lambda\left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}, \frac{\sigma}{\sigma - 1}\right)$ den Summationsbuchstaben $\nu$ durch $\lambda - \nu$, so verwandelt sie sich in

$$-(\sigma - 1)^\lambda \sum_{\nu=\lambda-\mu'+1}^{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\varrho} - \nu\right) \binom{\lambda}{\nu} (\sigma - 1)^{-\nu},$$

woraus sich als Wert der linken Seite der zu beweisenden Gleichung (45*b*) ergibt

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\left(\frac{\lambda}{\varrho}-\nu\right)\binom{\lambda}{\nu}(\sigma-1)^{-\nu}+\sum_{\nu=\lambda-\mu'+1}^{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\varrho}-\nu\right)\binom{\lambda}{\nu}(\sigma-1)^{-\nu}$$

welcher Wert sowohl für $\delta > 0$ als für $\delta = 0$ mit $\sum_{\nu=0}^{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\varrho}-\nu\right)\binom{\lambda}{\nu}(\sigma-1)^{-\nu}$, d. h. mit der rechten Seite von (45*b*) zusammenfällt.

4. Beweis der Formel (51). Aus der Größenordnung (31) des Polynoms $\Psi_\lambda(\varrho,\sigma)$, bei $\varrho > \sigma$ und $\mu = \frac{\lambda}{\varrho} + \delta$, erhält man diejenige von

$$Z_\lambda(\varrho,\sigma) = \frac{\Psi_\lambda(\varrho,\sigma)}{\varrho\,(\sigma-1)^{\mu-1}} \sim \frac{b\lambda^a}{\varrho\,(\sigma-1)^{\mu-1}}\binom{\lambda}{\mu} = \frac{a\lambda^a}{(\sigma-1)^{\mu}}\binom{\lambda}{\mu}$$

und daher für die Funktion $Z_\lambda\left(\frac{\varrho}{\varrho-1},\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)$, wenn $\varrho < \sigma$ ist, was $\frac{\varrho}{\varrho-1} > \frac{\sigma}{\sigma-1}$ nach sich zieht, mit analoger Bezeichnung

$$Z_\lambda\left(\frac{\varrho}{\varrho-1},\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) \sim \frac{a'\lambda^{a'}}{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}-1\right)^{\mu'}}\binom{\lambda}{\mu'},\quad \lambda\,\frac{\varrho-1}{\varrho} = \mu'-\delta',$$

Bei $\delta = 0$ ist aber $\mu' = \lambda - \mu$, somit resultiert

$$Z_\lambda\left(\frac{\varrho}{\varrho-1},\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) \sim a'\lambda^{a'}\binom{\lambda}{\mu}(\sigma-1)^{\lambda-\mu},$$

während bei $\delta > 0$, $\mu' = \lambda - \mu + 1$ sich bloß die Konstante $a'$ ändert.

---

**Druckfehlerberichtigung zum Aufsatze des H. Prof. Tauber: „Die Zufallsverträge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung".**

Auf Seite 19 sind in der ersten Zeile die vier Worte „als 1 oder $\varepsilon$" zu streichen, und in der 5. Zeile soll es statt „oder kleiner" richtig „oder $\varepsilon$ kleiner" heißen.

---