

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Andrej Ferko; Jerguš Moravčík; Ivana Kolingerová
Souhvězdí jako podgrafy triangulací

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 61 (2016), No. 1, 14–20

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144898>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2016

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Souhvězdí jako podgrafy triangulací

Andrej Ferko, Jerguš Moravčík, Bratislava, Ivana Kolingerová, Plzeň

Abstrakt. Pokud má člověk zacházet s množinou bodů, podvědomě či vědomě si doplňuje hrany, což ulehčuje porozumění tvaru a zapamatování. Příkladem jsou souhvězdí, kde doplnění nejstarších známých hran proběhlo již před tisíciletími. Tento článek zkoumá, zda lze použít hrany pro případ souhvězdí charakterizovat jako podgraf lokálně optimálních triangulací. Odpověď je kladná v případech použití i poněkud neobvyklých kritérií.

1. Úvod

Již před tisíciletími zvedali lidé oči k nebesům a pozorovali hvězdy. Nebyly po nebi rozmístěny pravidelně, ale uspořádány do různých skupinek, souhvězdí. Některé z těchto skupinek lidem tvarově něco připomínaly, a navíc je pozorovali na nebi pravidelně. Lidé si také všímali, že některá souhvězdí vidí v době, která je vhodná pro setí, některá září na nebi přesně ve směru, kterým se lodě mají vrátit domů, některá jsou prostě jen krásná. Bylo tedy důležité si tyto skupiny hvězd zapamatovat. Obrisy některých připomínaly slavné hrdiny, zvířata či bájně příšery, pravděpodobně je na nebe umístili bohové, aby jim zajistili nesmrtelnost anebo aby byly pro lidstvo varováním.

Dnes už víme, že většina hvězd v daném souhvězdí spolu fyzicky vůbec nesouvisí — leží daleko od sebe a jen náhodně se pozorovateli ze Země promítají do stejné části oblohy, a tak vytvářejí více či méně nápadné obrazce. Jejich význam pro zemědělství i navigaci výrazně poklesl. Přesto i nadále zálibně zvedáme oči a dalekohledy k nebesům a vyhledáváme jednotlivá souhvězdí; jejich jména a příběhy jejich živých předloh stále nejsou zapomenuty.

Některé názvy hvězd pocházejí již z dob Egypta či Mezopotámie, většinu dnes používaných názvů dali souhvězdím staří Řekové a Římané. Určité úpravy a doplňky pocházejí také ze středověku a novověku. V roce 1922 byla založena Mezinárodní astronomická unie. Na základě jejího rozdělení oblohy na oblasti s přesně vyznačenými nepřekrývajícími se hranicemi, odvozenými z historických souhvězdí, a přidání dalších souhvězdí v roce 1925 existuje 88 souhvězdí, zahrnujících všechny známé hvězdy kromě jedné. Touto jedinou nezačleněnou hvězdou je Slunce.

Doc. RNDr. ANDREJ FERKO, CSc., Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Ilkovičova 6, 824 48 Bratislava, Slovensko, e-mail: ferko@sccg.sk, Mgr. JERGUŠ MORAVČÍK, Katedra kartografie, geoinformatiky a diaľkového prieskumu zeme, Prírodovedecká fakulta, Univerzita Komenského, Ilkovičova 6, 824 48 Bratislava, Slovensko, e-mail: cuzco@cuzco.sk, prof. Dr. Ing. IVANA KOLINGEROVÁ, Katedra informatiky a výpočetní techniky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, e-mail: kolinger@kiv.zcu.cz

Nám známá souhvězdí tu nebudou navždy, poloha hvězd se mění, takže dnes vidíme na obloze něco trochu jiného než kdysi Ptolemaios, za 10 či 20 tisíc let už souhvězdí svým současným názvům nebudou příliš odpovídat, což umožní našim potomkům promítnout na oblohu zas jejich představy.

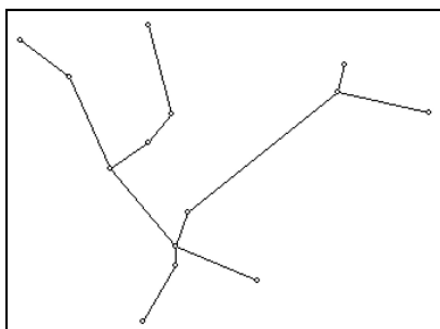
Položme si nyní otázku, zda to, jak jsou souhvězdí zakreslena, má nějakou geometrickou charakteristiku, zda existuje nějaká (geometrická) zákonitost v tom, jak jsou dílčí hvězdy pospojovány virtuálními hranami do logických celků. Množina hran tvořící dané souhvězdí není většinou pevně stanovena, různé zdroje často jedno a totéž souhvězdí zobrazují pomocí mírně odlišných hran. Výběr bodů je oproti tomu ve většině případů jednoznačný — jedná se o nejjasnější hvězdy dané části oblohy. Pro potřeby tohoto článku byla vybrána taková reprezentace souhvězdí, která se nejvíce blížila rovinným grafům. Souřadnice hvězd byly převzaty z [2], hrany převážně z [13]. Sférické souřadnice poloh hvězd byly nejprve zobrazeny na jednotkové kouli. Pak byly promítnuty na rovinu středovým promítáním, přičemž průmětna byla kolmá na polohový vektor těžiště bodů, reprezentujících polohu hvězd na jednotkové kouli.

Počet bodů souhvězdí se pohybuje v rozmezí 2–32, jejich grafy jsou souvislé či nesoúvislé (Had), cyklické či acyklické, obsahují hrany spojující extrémní body (Trojúhelník) nebo se takové hraně vyhybají (Jižní kříž). Další zvláštností Jižního kříže jsou protínající se hrany. Protože neexistuje alternativní reprezentace tohoto souhvězdí bez protínajících se hran, bylo nutné toto souhvězdí z našich experimentů vyloučit. Zmínku zasluhuje také Had, který je rozdělen souhvězdím Hadonoše na dvě části; hrana spojující obě části Hada je ale řazena do Hadonoše. V souhvězdí Orion je jeden izolovaný bod, někdy spojovaný s dvěma nejbližšími body. Tento bod v experimentech nebyl uvažován.

Příklad grafu souhvězdí užívaného v experimentech je na obr. 1. Všechny použité souřadnice poloh hvězd a jejich grafy je možné najít na stránce [9].

Geometrické struktury, konstruované lidmi z bodových vzorků, implicitně očekávají spojování blízkých bodů hranou. Při hledání geometrických struktur typických pro

0.793642	0.625906
1.000000	0.507201
0.777619	0.558920
0.410155	0.264520
0.316204	0.720905
0.372658	0.505411
0.316201	0.436635
0.000000	0.686255
0.121954	0.596426
0.220482	0.371511
0.301413	0.000000
0.380619	0.134792
0.381947	0.181937
0.582601	0.098013



AND – Andromeda

Obr. 1. Příklad grafu souhvězdí Andromeda s přepočítanými planárními souřadnicemi poloh hvězd

reprezentaci souhvězdí budeme tedy vycházet z grafů založených na spojování blízkých vrcholů. Ze známých planárních grafů založených na tomto principu jsou vhodným nástrojem triangulace, protože požadavek konstrukce kvalitních trojúhelníků vede ke spojování blízkých vrcholů.

2. Triangulace

Definujme nejprve klíčový pojem článku, triangulaci. Z několika alternativ stejného významu si vybereme definici zaměřenou na hrany. Informace k triangulacím lze najít např. v [4], [10], [11].

Definice 1. Triangulace. Triangulace $T(P)$ bodové množiny $P = \{p_i, i = 0, \dots, N-1\}$ v eukleidovské rovině je maximální množina hran E takových, že

- hrany z E se protínají jen v bodech z P ,
- hrany z E dělí konvexní obálku P na trojúhelníky.

Existuje mnoho druhů triangulací. Pro aplikace obvykle požadujeme „dobrý“ tvar trojúhelníků, čímž se zpravidla myslí optimalizace nějakého geometrického kritéria, např. maximalizace minimálního úhlu nebo minimalizace maximálního úhlu. Požadované kritérium je z praktických důvodů obvykle optimalizováno pouze lokálně, tj. pro dvojice sousedních trojúhelníků. Tím se dostáváme k užitečné třídě triangulací, tzv. lokálně optimálním triangulacím:

Definice 2. Lokálně optimální triangulace. Triangulace $LOT(P)$ množiny bodů P v rovině je z hlediska nějakého daného kritéria lokálně optimální, jestliže každá dvojice sousedních trojúhelníků tvořící konvexní čtyřúhelník je z hlediska tohoto kritéria lokálně optimální.

Nejčastěji používaným kritériem pro $LOT(P)$ je minimální délka hrany společné oběma trojúhelníkům. Tato triangulace je obvykle nazývána **lokálně minimální (LMT)**.

Do třídy $LOT(P)$ patří také triangulace maximalizující minimální úhel, známá Delaunayova triangulace. Pro ni je častěji užívána alternativní definice, která lokální optimalitu nevyužívá:

Definice 3. Delaunayova triangulace. Triangulace $DT(P)$ množiny bodů P v rovině je Delaunayova triangulace P , jestliže kružnice opsaná libovolnému trojúhelníku z $DT(P)$ neobsahuje uvnitř žádný bod P .

Delaunayova triangulace maximalizuje minimální úhel nejen lokálně, pro každý trojúhelník, ale i globálně v celé triangulaci, což je (nejen) ve třídě LOT výjimečná vlastnost. K pozitivním vlastnostem $DT(P)$ patří inkluze hran grafu nejbližších sousedů (NNG), tedy hran spojujících nejbližší sousedy z P .

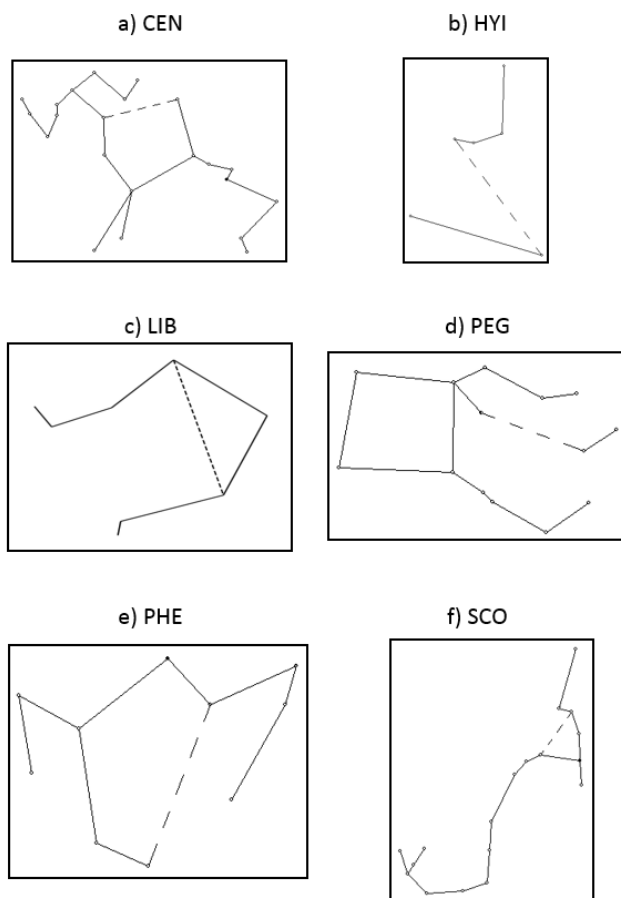
Zajímavá zejména pro numerické výpočty je LOT triangulace minimalizující maximální úhel. V dalším textu ji budeme zkráceně nazývat MIN-MAX. Další informace k problematice LOT lze nalézt v [1], [3], [4], [5], [6], [7]. Nyní již můžeme předložit navrženou hypotézu a její ověření.

3. Hypotéza a její ověření

Hypotéza. *Hrany těch souhvězdí, která jsou planárním grafem, mohou být beze zbytku pokryty hranami lokálně optimálních triangulací.*

Pro testování uvedené hypotézy byl využit program vytvořený autory tohoto článku pro konstrukci LOT. Program je psán v Delphi Pascalu pro operační systém MS Windows.

Z 88 souhvězdí jsme pro neplanaritu vyloučili Jižní kříž (CRU). Dalších 26 souhvězdí jsou triviální případy, protože mají buď maximálně 3 vrcholy anebo je možné všechny jejich hrany pokrýt hranami konvexní obálky (připomeňme, že tyto hrany patří do každé triangulace). To se týká souhvězdí CER, CMI, CVN (mají jen dva body), CIR, COM, FOR, LMI, NOR, OCT, PIC, PYX, SEX, TEL, TRA, TRI, VUL (tři body), ANT, CAM, CHA, CRA, CRB, EQU, MEN, MIC, RET, SCL (konvexní obálka). Zbýlých 61 souhvězdí tvoří testovací soubor pro naše experimenty.

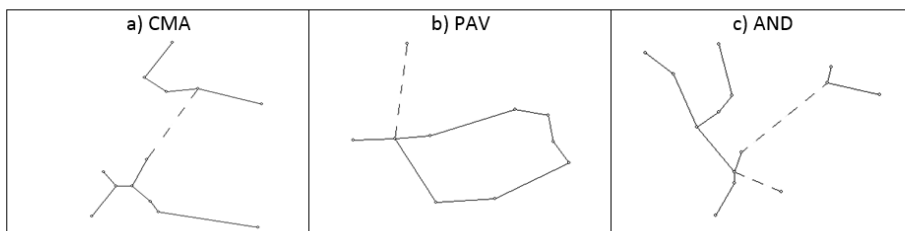


Obr. 2. Souhvězdí, která DT zcela nepokryje (nepokryté hrany jsou čárkovaně)

Z těchto 61 souhvězdí je 55 souhvězdí zcela pokryto DT. Souhvězdí, kde nedojde k úplnému pokrytí hran, jsou jen CEN (Kentaur), HYI (Malý vodní had), LIB (Váhy), PEG (Pegas), PHE (Fénix) a SCO (Štír), viz obr. 2. V každém z těchto souhvězdí zbyla jedna nepokrytá hrana, v obrázku je označena čárkovaně.

Podobných výsledků docílíme s triangulací MIN-MAX, která stejně jako DT nepokrývá CEN, HYI, LIB, PEG a PHE, ale obsahuje hranu SCO nepokrytou DT. Pokud je na uvažovanou množinu 61 souhvězdí aplikována LMT, je pokrytí o něco menší — LMT nepokrývá dvě hrany v AND (viz obr. 3), po jedné hraně v CEN, HYI, LIB, PHE a SCO (tytéž hrany, které nepokrývá DT), dále chybí po jedné hraně v CMA a PAV (tyto chybějící hrany v DT byly), viz obr. 2 a 3, navíc je ale pokryta hrana v PEG, která není v DT.

Tři dosud použité aplikačně užitečné triangulace se snaží produkovat „co nejrovnostannější“ trojúhelníky, vyhýbají se tedy příliš dlouhým a příliš krátkým hranám, pokud to konfigurace bodů dovolí. Pokud v souhvězdí existuje nějaká delší hrana, obvykle ji v těchto „rozumných“ triangulacích nenajdeme. Na nedokonale pokrytá souhvězdí v CEN, HYI, LIB a PHE tedy musíme nasadit spíše výstřednější triangulace, od kterých budeme očekávat pokrytí právě chybějících „dlouhých“ hran, i když „krátké“ hrany s velkou pravděpodobností nebudou obsahovat. Třída LOT ovšem dovoluje zahrnout i v praxi nepřilíš užitečná kritéria.

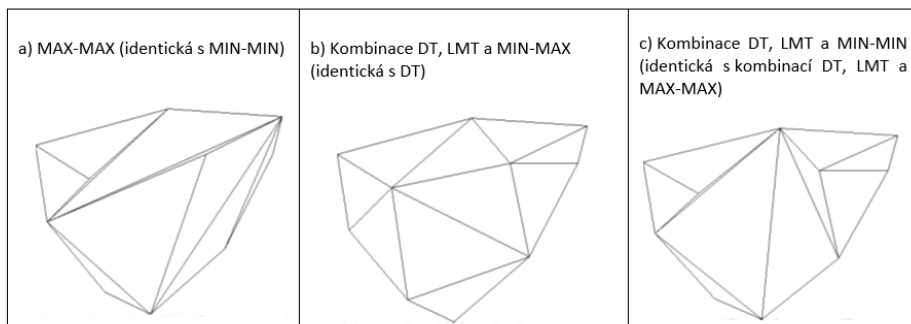


Obr. 3. Výsledky LMT, nepokryté hrany jsou čárkované

Zaveďme tedy další LOT triangulace, a to triangulaci maximalizující maximální úhel s názvem MAX-MAX a triangulaci minimalizující minimální úhel zvanou MIN-MIN. Příklad těchto triangulací je uveden v obr. 4a a ukazuje, že různá kritéria mohou vést k identické triangulaci.

Při zkoumání triangulací optimalizujících „rozumná“ geometrická kritéria lze pozorovat, že tyto triangulace se pro běžná data (obvykle rovnoměrně rozložené body) vzájemně příliš neliší. Toto pozorování již bylo prezentováno v [6] pro DT a greedy triangulaci (triangulace získaná vkládáním vzájemně se neprotínajících hran v pořadí rostoucí délky do konvexní obálky, viz např. [11]). Na velkou podobnost různých triangulací na dané množině bodů lze v praxi narazit častěji, ačkoliv lze snadno zkonstruovat datové množiny, pro které jsou triangulace vzájemně zcela rozdílné, viz například ukázkou v [10, p. 431, Fig. 6.2.3]. Triangulace MAX-MAX a MIN-MIN jsou samozřejmě kvůli tvaru výsledných trojúhelníků pro praktické aplikace nevhodné.

Aplikujme nyní tyto triangulace na nepokrytá souhvězdí. Triangulace MAX-MAX pokrývá všechny hrany HYI, v PHE pak pokrývá hranu, kterou neměla DT, ale ne-



Obr. 4. Příklady méně obvyklých triangulací na datové množině PHE

pokrývá celé PHE. Ve výsledku pro CEN a LIB jsou hrany potřebné pro pokrytí spíše výjimkou, vzhledem k většímu počtu bodů tu totiž triangulace naplno rozvine všechny své nevýhody dané použitým kritériem. MIN-MIN dává identické výsledky jako MAX-MAX.

Na zbývající nepokrytou hranu v CEN, resp. v LIB je tedy zapotřebí nasadit ještě silnější nástroje. Najdeme je v triangulacích optimalizujících zároveň více kritérií. Tuto myšlenku lze realizovat např. prostřednictvím vážené kombinace několika kritérií podobně jako v [8]. Pro účely tohoto článku byla kombinace kritérií navržena jako „hlasování ve prospěch dané hrany triangulace“ — spočítají se dvě nebo více kritérií; k prohození hrany dojde v případě, že více než polovina kritérií považuje alternativní hranu za lepší. Příklady vícekriteriálních triangulací lze vidět v obr. 4b a 4c. Teprve vícekriteriálními triangulacím se podařilo zvítězit nad oběma nepokrytými hranami, a to kombinací DT + LMT + MIN-MAX nad CEN a kombinací LMT + MIN-MIN nebo LMT + MAX-MAX nad LIB. Tím bylo testování hypotézy úspěšně dokončeno.

4. Závěr

Pokud shrneme dosažené výsledky, pak navržená hypotéza byla prokázána, ovšem za cenu poněkud krkolomných kombinací kritérií lokálně optimálních triangulací pro poslední dvě hrany. Pokrytí většiny hran triangulacemi s „rozumnými“ kritérii ukazuje, že i v souhvězdích je patrná tendence lidských pozorovatelů spojovat blízké body hranou. Několik nalezených výjimek (hrany v CEN, HYI, LIB a PHE) ukazuje, že lidskou představivost podobným jednoduchým pravidlem charakterizovat stoprocentně našťástí nelze.

Poděkování. Tato práce byla podpořena projekty VEGA 1/0996/16 *Metódy 3D počítačového videnia na mračných bodov na FMFI UK Bratislava* (A. Ferko), APVV-0326-11 *Hodnotenie kvality geografických informácií pre tvorbu environmentálnych rozhodnutí* (J. Moravčík) a LO1506 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR (I. Kolingerová).

L i t e r a t u r a

- [1] AICHHOLZER, O., AURENHAMMER, F., TASCHWER, M., ROTE, G.: *Triangulations intersect nicely*. Proc. 11th Annual Symposium on Computational Geometry, 1995, 238–247.
- [2] BEČVÁŘ, A.: *Atlas coeli, Skalnaté pleso II*. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1951.
- [3] BOSE, P., DEVROYE, L., EVANS, W.: *Diamonds are not a minimum weight triangulation's best friend*. TR96-01, Dept. of Computer Science, University of British Columbia, January 1995.
- [4] DE LOERA, J. A., RAMBAU, J., SANTOS, F.: *Triangulations. Structures for algorithms and applications*. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg, 2010.
- [5] DICKERSON, M. T., MONTAGUE, M. H.: *A (usually?) connected subgraph of the minimum weight triangulation*. Proc. 12th ACM Symposium on Computational Geometry, 1996, 204–213.
- [6] HAN-GUE, C.: *On the expected number of common edges in Delaunay and greedy triangulation*. In: V. Skala (Ed.): *The Fifth International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization 97 — WSCG'97*, Conference Proceedings, Univ. of West Bohemia, Plzen, 50–59.
- [7] KOLINGEROVÁ, I.: *On triangulations*. International Conference on Computational Science and Its Applications — ICCSA 2004, Lecture Notes in Computer Science 3044, Springer Verlag, 2004, 544–553.
- [8] KOLINGEROVÁ, I., FERKO, A.: *Multicriteria-optimized triangulations*. *The Visual Computer* 17 (6) (2001), 380–395.
- [9] MORAVČÍK, J.: *Souhvězdí*. Dostupné z: <http://stars.cuzco.sk/>
- [10] OKABE, A., et al.: *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*. 2nd ed., John Wiley, 2000.
- [11] PREPARATA, F. P., SHAMOS, M. I.: *Computational geometry: an introduction*. 1st ed., Springer Verlag, New York, 1985.
- [12] SHRIVASTAVA, M.: *An algorithm for constructing locally optimal min-max triangulation*. *Bull. Austral. Math. Soc.* 54 (1996), 167–176.
- [13] ŠTOHL, J., HAJDUK, A.: *Encyklopédia astronómie*. Obzor, Bratislava, 1987.