

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Martin Swaczyna; Petr Volný  
Rovnoměrný šikmý vrh

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 61 (2016), No. 1, 34–68

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144901>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2016

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Rovnoměrný šikmý vrh

*Martin Swaczyna, Petr Volný, Ostrava*

*Abstrakt.* V článku analyzujeme zajímavou teoretickou modifikaci klasického šikmého vrhu, tzv. rovnoměrný šikmý vrh. Problém řešíme jako počáteční úlohu pro vázaný mechanický systém vzniklý z mechanického systému částice v homogenním tíhovém poli podrobené dodatečné podmínce — vazbě, která představuje podmínku na konstantnost velikosti okamžité rychlosti částice. Z hlediska klasifikace vazeb se jedná o neholonomní skleronomní vazbu nelineární v komponentách rychlosti. Předkládáme úplné analytické řešení rovnoměrného šikmého vrhu a odvozujeme explicitní vztahy pro kinematické parametry tohoto pohybu. Nabízíme srovnání trajektorie rovnoměrného šikmého vrhu s klasickým vrhem při stejných počátečních podmínkách. Dále pojednáme také o dynamice rovnoměrného šikmého vrhu založené na existenci vazebné síly, která zajišťuje splnění vazebné podmínky. Na závěr vyšetříme pohyb z hlediska energetické bilance. Kompletní analýza rovnoměrného šikmého vrhu včetně nalezení množiny všech noetherovských symetrií tohoto neholonomně vázaného systému a jeho odpovídajících zákonů zachování byla publikována v [10].

## 1. Úvod

Šikmý vrh tělesa v homogenním tíhovém poli je vděčným příkladem ve středoškolské fyzice i ve vysokoškolských kurzech mechaniky. Díky tomu, že je velmi názorný a studentům blízký ze života, dá se na něm pěkně demonstrovat kinematika hmotného bodu a provádět rozbor zákona zachování mechanické energie. Na vysokoškolské úrovni je pak jednoduchou ukázkou řešení Newtonovy pohybové rovnice s počátečními podmínkami a hodí se proto zařadit i jako vhodná motivace do aplikací diferenciálních rovnic.

Z mechaniky je známo, že pohyby hmotného bodu dělíme podle tvaru trajektorie na pohyby přímočaré a křivočaré a podle rychlosti na pohyby rovnoměrné a nerovnoměrné. U rovnoměrných pohybů zůstává velikost vektoru okamžité rychlosti v průběhu celého pohybu konstantní,  $|\mathbf{v}| = \text{konst.}$ , u nerovnoměrných pohybů se velikost vektoru okamžité rychlosti v průběhu pohybu mění. Je zřejmé, že klasický šikmý vrh není pohybem rovnoměrným. K tomu, aby se klasický šikmý vrh stal pohybem rovnoměrným, musíme jej uvažovat jako vázaný mechanický systém podrobený jisté dodatečné podmínce — vazbě, která nám požadovaný charakter pohybu zajistí.

V tomto článku se budeme věnovat korekci klasického šikmého vrhu na rovnoměrný. Problém budeme řešit jako úlohu pro vázaný mechanický systém vzniklý z mechanic-

---

RNDr. MARTIN SWACZYNA, Ph.D., katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita, 30. dubna 22, 701 03 Ostrava, e-mail: [martin.swaczyna@osu.cz](mailto:martin.swaczyna@osu.cz), RNDr. PETR VOLNÝ, Ph.D., katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB–TU Ostrava, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava, e-mail: [petr.volny@vsb.cz](mailto:petr.volny@vsb.cz)

kého systému jedné částice (hmotného bodu) v homogenním tíhovém poli podrobeném jedné dodatečné podmínce na konstantnost velikosti okamžité rychlosti

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_0, \quad (1)$$

tzv. *izotachytonní vazbě*. Název vznikl spojením slov *izo* (*iso*) = stejný a řeckého  $\tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha$  = rychlost. Podmínka (1) představuje jednu *neholonomní skleronomní* (na čase explicitně nezávislou) vazbu nelineární v komponentách rychlosti.

K problému přistupujeme jako ke standardním počátečním úlohám z mechaniky, kdy je zadána počáteční poloha (místo vrhu) a počáteční rychlost hmotného bodu. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že rovnoměrný šikmý vrh stejně jako klasický šikmý vrh vychází z počátku a že oba startují se stejnou počáteční rychlostí  $v_0$  pod stejným elevačním úhlem  $\alpha$ . Odporové síly prostředí působící proti pohybu nebudeme uvažovat.

Prezentovaná modifikace pohybu částice v tíhovém poli může být vhodným námětem pro seminář k vysokoškolskému kurzu teoretické mechaniky, na kterém mohou studenti dílčí výpočty postupně podrobně rozebrat a jednotlivé vztahy si samostatně odvodit.

## 2. Pohled do historie

Již Galileo Galilei (1564–1642) ve svých myšlenkových úvahách a experimentech studoval kinematiku vodorovného vrhu, věděl, že rychlost tělesa v homogenním tíhovém poli nezávisí na trajektorii, ale pouze na okamžité výšce, a že trajektorií vodorovného vrhu je parabola [9].

Teoretické problémy týkající se různých modifikací pohybu hmotného bodu v tíhovém poli byly uvažovány a řešeny již na konci 17. století s využitím aparátu v té době teprve nedávno objeveného infinitezimálního počtu. Právě rozvoj matematické analýzy a metod řešení diferenciálních rovnic umožňoval matematikům a fyzikům studovat různé geometrické křivky daných vlastností a řešit složitější úlohy z mechaniky, ve kterých se hledaly trajektorie, po nichž by se pohyboval hmotný bod v tíhovém poli, pokud by byl omezen nějakou vazbou [11]. Jedním z prvních takových problémů bylo nalezení tvaru křivky, kterou zaujme řetěz upevněný na obou koncích v tíhovém poli. Galilei se domníval, že takovou křivkou je parabola. Christiaan Huygens (1629–1695) dokázal, že to platí jen přibližně. Teprve bratři Bernoulliiovi ukázali, že řešením je *řetězovka*.

V roce 1687 vyzval Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) evropské matematiky, aby určili tvar křivky, po níž musí klesat hmotný bod v tíhovém poli tak, že jeho rychlost ve svislém směru zůstává konstantní a je rovna počáteční rychlosti. Podle [11] řešení našel v roce 1690 Jacob Bernoulli (1654–1705) a ukázal, že jím je *semikubická parabola*, v dějinách fyziky nazývaná *Lebnizovou izochronou*. Výsledek uveřejnil v časopise *Acta Eruditorum* a z hlediska historie matematiky je zajímavé, že se v tomto článku poprvé objevil název *integrál*. Oficiálně ho však do používání zavedl Johann Bernoulli (1667–1748) po dohodě s Leibnizem [11].

Francouzský matematik a mechanik Pierre Varignon (1654–1722), který důsledně uplatňoval Leibnizův aparát infinitezimálního počtu k řešení úloh Newtonovy mecha-

níky, v roce 1699 našel křivku, po níž by hmotný bod klesal s konstantní rychlostí v centrálním gravitačním poli mířícím do středu Země. Tato křivka bývá někdy nazývána *Varignonovou izochronou* [11].

V roce 1689 vyzval Leibniz odbornou veřejnost k hledání křivky, podél níž se hmotný bod v tíhovém poli bude pohybovat takovým způsobem, že se jeho vzdálenost od výchozího bodu bude měnit přímo úměrně s časem. Tato úloha je v dějinách matematiky a fyziky známa pod názvem *problém paracentrické izochrony*.

Další úlohou podobného typu s vazbou bylo hledání křivky, podél níž působí na hmotný bod vazba se stále stejně velkou silou reakce. Řešení úlohy našel markýz de l'Hospital (1661–1704) v roce 1700.

V roce 1736 publikoval Leonhard Euler (1707–1782) dvoudílnou knihu *Mechanika neboli nauka o pohybu vyložená analyticky* (*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*), ve které shrnul poznatky o mechanice hmotného bodu pohybujícího se ve vakuu nebo v prostředí, které klade odpor vlivem gravitačních sil, případně vázaných na nějakou křivku nebo plochu [11]. Zde nalezneme také rozbor a analytické řešení šikmého vrhu v tíhovém poli.

Nutno podotknout, že v období, kdy byly tyto a podobné úlohy s dodatečnými omezeními formulovány, nebyla známa *metoda Lagrangeových multiplikátorů* pro řešení extrémálních úloh s vazbami, proto mohly být řešeny pouze intuitivně pomocí známých analytických metod a geometrických konstrukcí. První zmínka o metodě multiplikátorů je obsažena v pracích Eulera o *izoperimetrických úlohách* (1774). Později, v roce 1778, byla tato metoda prezentována Josephem Louistem Lagrangem (1736–1813) v jeho *Mécanique analytique* pro širokou třídu extrémálních úloh [1].

Při studiu problémů tohoto typu si matematictí fyzikové té doby začínali uvědomovat, že má-li být pohyb hmotného bodu, případně i složitějšího mechanického systému, podroben nějakým vazbám, musejí zřejmě do úvah zahrnout kromě působících vnějších sil i dodatečné síly, tzv. síly *vazebné*, které budou nahrazovat omezení způsobená vlivem vazeb. Navíc možné změny polohy mechanického systému již nebudou libovolné, ale musejí být kompatibilní s vazbami. Klíčové pro formulaci principů statiky a dynamiky vázaných mechanických soustav bylo zavedení konceptu *virtuálních posunutí*, tzn. myšlených infinitezimálně malých vazebně přípustných změn polohy mechanického systému, a následně pak formulace *principu virtuálních posunutí* nebo též *principu virtuální práce*.

První formulace tohoto principu pro případ statické rovnováhy lze nalézt u Johanna Bernoulliho (1717) a Varignona [3], [11]. Zdůvodnění tohoto principu pro statiku a jeho matematický zápis pochází od Lazara Carnota (1753–1823), který poprvé použil pojem *práce* ve fyzikálním smyslu, nazýval ji *momentem aktivity*. O rozšíření tohoto principu na dynamiku vázaných mechanických soustav se zasloužil Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783), který v roce 1743 publikoval *Traktát o dynamice* (*Traité de dynamique*), v němž uvedl slavný *d'Alembertův princip*. Přesnou matematickou formulaci d'Alembertova principu virtuálních posunutí pak podal Lagrange, který ukázal, že tento princip určuje, kam se vázaný mechanický systém v následujícím okamžiku posune a jak se bude pohybovat, a zahrnuje v sobě také pohybové rovnice daného vázaného mechanického systému. Lagrange také zavedl do mechaniky *zobecněné souřadnice*, které nahradily kartézské souřadnice a umožnily vyloučit z úvah nejen vnější síly působící na soustavu, ale i velkou třídu vazebných sil. D'Alembertův princip virtuál-

ních posunutí byl v 19. století dále upřesňován a zobecňován na složitější mechanické systémy a obecnější typy vazeb.

Německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855) zavedl nový pojem, který charakterizuje účinky vazeb na pohyb hmotného bodu a nazývá se *vázanost*, a formuloval princip, podle něhož se hmotný bod podrobený vazbě pohybuje tak, aby jeho vázanost byla minimální. Tělesa tak projevují snahu být při pohybu co nejméně omezoována. Heinrich Hertz (1857–1894) v roce 1894 dovedl tento princip do ještě obecnější podoby. Ukázal, že nepůsobí-li vnější síly, pohybuje se hmotný bod podrobený vazbám po křivce s nejmenší možnou křivostí, tedy co nejpřímočařeji. Hertz tak vlastně dospěl k *vázané verzi prvního pohybového zákona* (zákona setrvačnosti): hmotný bod vázaný na plochu, na který nepůsobí žádné vnější síly, je buď v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně po *geodetické křivce* dané plochy.

### 3. Klasický šikmý vrh

Uvažujme částici v homogenním tíhovém poli startující z počátku  $[0, 0]$  pod elevačním úhlem  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 90^\circ$ , počáteční rychlostí  $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ . Odpor prostředí neuvažujeme. Lagrangián takového systému je

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy, \quad (2)$$

kde  $m$  je hmotnost částice a  $g$  je tíhové zrychlení.

Newtonovy pohybové rovnice, resp. Eulerovy–Lagrangeovy rovnice lagrangianu (2) mají tvar

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg. \quad (3)$$

Jejich integrací dostáváme obecné řešení

$$x(t) = C_1 t + C_2, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4. \quad (4)$$

Vzhledem k počátečním podmínkám dostáváme parametrické vyjádření klasického šikmého vrhu

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2. \quad (5)$$

Vyloučením parametru  $t = x/(v_0 \cos \alpha)$  získáme rovnici trajektorie v explicitním tvaru

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2, \quad (6)$$

která představuje rovnici paraboly. Složky vektoru okamžité rychlosti se mění podle vztahů

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(t) = \dot{y}(t) = v_0 \sin \alpha - gt \quad (7)$$

a odtud je časová závislost velikosti okamžité rychlosti dána jako

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2gv_0 t \sin \alpha}. \quad (8)$$

Kinematické parametry šikmého vrhu jsou:

- doba výstupu  $\mathcal{T} = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$ ,

- nejvyšší bod trajektorie  $H = [x_{\max}, y_{\max}]$ , kde

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha,$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha, \text{ tzv. výška výstupu,}$$

- celková doba letu  $T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$ , tedy  $T = 2\mathcal{T}$ ,
- vzdálenost dopadu  $d = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ , tedy  $d = 2x_{\max}$ .

Na závěr vypočteme délku  $s$  trajektorie klasického šikmého vrhu. Délka trajektorie pohybu je obecně dána vztahem

$$s = \int_0^T v(t) dt, \quad (9)$$

kde  $v(t)$  je známá závislost velikosti rychlosti na čase. V našem případě

$$s = \int_0^T \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2gv_0 t \sin \alpha} dt, \quad (10)$$

což po integraci a vyčíslení v mezích od 0 do  $T$  [8] vede k výsledku

$$s = \frac{v_0^2}{g} \left( \sin \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \ln \left( \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \right). \quad (11)$$

#### 4. Dynamika částice podrobené holonomní a neholonomní vazbě

Uvažujme mechanický systém jedné částice v konfiguračním prostoru  $\mathbb{R}^2$  resp.  $\mathbb{R}^3$ . Takový systém je charakterizován lagrangianem  $L = T - V$ , kde  $T$  je kinetická energie částice a  $V$  je její potenciální energie. Označme  $t$  časovou proměnnou a  $q^\sigma$ ,  $\sigma = 1, 2$ , resp.  $\sigma = 1, 2, 3$ , jisté zobecněné křivočaré souřadnice v konfiguračním prostoru. Dynamika pohybu částice je pak popsána Newtonovými pohybovými rovnicemi

$$\ddot{q}^\sigma = -\frac{\partial V}{\partial q^\sigma}, \quad (12)$$

které vznikají jako Eulerovy–Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) = 0 \quad (13)$$

lagrangianu  $L$ .

V případě, že částice je podrobena holonomní vazbě

$$f(t, q^\sigma) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \text{ resp. } \sigma = 1, 2, 3, \quad (14)$$

reprezentující jistou geometrickou plochu (varietu) v prostoru událostí  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  resp.  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , vysvětluje se dynamika pohybu takové částice existencí dodatečné tzv. *vazebné*

síly  $\Phi$ , která nahrazuje omezení způsobená přítomností vazby. Je všeobecně známo, že tato vazebná síla je úměrná gradientu vazby [3], tzn. má tvar

$$\Phi = \mu \operatorname{grad} f = \mu \left( \frac{\partial f}{\partial q^1}, \frac{\partial f}{\partial q^2} \right) \text{ resp. } \Phi = \mu \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^1}, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^2}, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^3} \right), \quad (15)$$

kde parametr  $\mu = \mu(t)$  je Lagrangeův multiplikátor.

Dynamika pohybu holonomně vázané částice je pak popsána vázanými pohybovými rovnicemi

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) = \mu \frac{\partial f}{\partial q^\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \text{ resp. } \sigma = 1, 2, 3, \quad (16)$$

kteří vznikají deformací nevázaných Eulerových–Lagrangeových rovnic (13) vazebnou silou (15) [3].

Také v obecnějším případě, kdy je pohyb částice omezen neholonomní vazbou závisící kromě času  $t$  a zobecněných souřadnic  $q^\sigma$  i na komponentách rychlostí  $\dot{q}^\sigma$ ,

$$f(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \text{ resp. } \sigma = 1, 2, 3, \quad (17)$$

reprezentující jistou geometrickou plochu (varietu) tentokrát v evolučním prostoru  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  resp.  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , se dynamika pohybu částice vysvětluje přítomností dodatečné vazebné síly. Její tvar navrhl v roce 1932 N. Četajev (1902–1959) na základě heuristické analogie s holonomními vazbami [4],

$$\Phi = \mu \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^1}, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^2} \right), \text{ resp. } \Phi = \mu \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^1}, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^2}, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^3} \right). \quad (18)$$

Vazebná síla (18) se nazývá *Četajevova vazebná síla*. Tento tvar vazebné síly se ukázal jako správný a osvědčil se v řadě teoretických i praktických příkladů neholonomních systémů.

Dynamika pohybu neholonomně vázané částice je popsána neholonomními Eulerovými–Lagrangeovými rovnicemi,

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) = \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \text{ resp. } \sigma = 1, 2, 3. \quad (19)$$

V neholonomní terminologii jsou rovnice (19) nazývány *Četajevovy rovnice* nebo též *deformované pohybové rovnice*, jelikož vznikají deformací Eulerových–Lagrangeových rovnic původního nevázaného mechanického systému prostřednictvím Četajevovy síly (18) vystupující na pravé straně rovnic (19) [5]. Správnost deformovaných rovnic (19) byla později potvrzena jejich korektním matematickým odvozením z variačního principu [6].

## 5. Rovnoměrný šikmý vrh

Zatímco u klasického šikmého vrhu v homogenním tíhovém poli se velikost rychlosti mění podle vztahu (8), u rovnoměrného šikmého vrhu budeme požadovat konstantnost velikosti okamžité rychlosti částice, tzn. splnění podmínky

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_0, \quad (20)$$

kde  $v_0$  je velikost počáteční rychlosti. Rovnice (20) reprezentuje jednu neholonomní vazbu, kterou je možné vyjádřit též ve tvaru

$$f = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) - v_0^2 = 0. \quad (21)$$

Vazbu (21) budeme nazývat *izotachytonní* vazbou a je evidentní, že tato vazba je nelineární v komponentách rychlosti.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pohyb se děje v polorovině, kde  $v_x = \dot{x} > 0$ . Rovnici vazby (21) lze poté přepsat do explicitního tvaru

$$\dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \dot{y}^2}, \quad (22)$$

se kterým se při konkrétních výpočtech pracuje lépe. Druhou možností, jak splnit rovnici (21), je  $\dot{x} = -\sqrt{v_0^2 - \dot{y}^2}$ , která pak reprezentuje pohyb částice v záporném směru osy  $x$ .

Četajevova vazebná síla vznikající v souvislosti s vazbou (21) je vektor

$$\Phi = (\Phi_x, \Phi_y) = \mu \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \mu(2\dot{x}, 2\dot{y}), \quad (23)$$

kde  $\mu$  je Lagrangeův multiplikátor.

Deformované pohybové rovnice (19) mají pro naši uvažovanou situaci tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\mu\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= 2\mu\dot{y} - mg, \end{aligned} \quad (24)$$

který společně s diferenciální rovnicí vazby (21) resp. (22) tvoří systém, jehož řešení za počáteční podmínky  $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$  popisuje rovnoměrný šikmý vrh. Z první rovnice systému (24) vyjádříme Lagrangeův multiplikátor  $\mu = (m\ddot{x})/(2\dot{x})$ . Zderivujeme-li rovnici vazby (22) podle  $t$ , dostáváme

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{v_0^2 - \dot{y}^2}}. \quad (25)$$

Upravený Lagrangeův multiplikátor pak nabude tvaru

$$\mu = -\frac{m\dot{y}\ddot{y}}{2(v_0^2 - \dot{y}^2)}. \quad (26)$$

Po jeho dosazení do druhé rovnice systému (24) a po jednoduchých úpravách získáme jednu pohybovou rovnici pro rovnoměrný šikmý vrh

$$\ddot{y} = -\frac{g}{v_0^2}(v_0^2 - \dot{y}^2), \quad (27)$$

která společně s rovnicí vazby (22) umožňuje nalézt parametrické rovnice uvažovaného pohybu. Rovnici (27) řešíme substitucí  $\dot{y} = z(t)$ ,

$$\dot{z} = -\frac{g}{v_0^2}(v_0^2 - z^2). \quad (28)$$



Po separaci proměnných

$$\frac{dz}{v_0^2 - z^2} = -\frac{g}{v_0^2} dt \quad (29)$$

a následné integraci dostáváme

$$\frac{1}{2v_0} \ln \frac{v_0 + z}{v_0 - z} = -\frac{g}{v_0^2} t + C. \quad (30)$$

Po odlogaritmování poslední rovnice obdržíme

$$\frac{v_0 + z}{v_0 - z} = \exp \left( 2 \left( -\frac{g}{v_0} t + Cv_0 \right) \right), \quad (31)$$

z níž vyjádříme  $z(t)$ ,

$$z(t) = v_0 \frac{\exp \left( 2 \left( -\frac{g}{v_0} t + Cv_0 \right) \right) - 1}{\exp \left( 2 \left( -\frac{g}{v_0} t + Cv_0 \right) \right) + 1}. \quad (32)$$

Uplatněním identity

$$\operatorname{tgh} X = \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} = \frac{e^{2X} - 1}{e^{2X} + 1} \quad (33)$$

lze vztah (32) vyjádřit ve tvaru

$$z(t) = \dot{y}(t) = v_0 \operatorname{tgh} \left( -\frac{g}{v_0} t + v_0 C \right), \quad (34)$$

kde integrační konstanta  $C$  je určena počáteční podmínkou  $z(0) = \dot{y}(0) = v_y(0) = v_0 \sin \alpha$ ,

$$C = \frac{1}{2v_0} \ln \left( \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right). \quad (35)$$

Následnou integrací rovnic (22) a (34) dostáváme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{2v_0^2}{g} \operatorname{arctg} \sqrt{K_1 \exp \left( -\frac{2gt}{v_0} \right)} + K_3, \\ y(t) &= -v_0 t - \frac{v_0^2}{g} \ln \left( K_1 \exp \left( -\frac{2gt}{v_0} \right) \right) + K_2. \end{aligned} \quad (36)$$

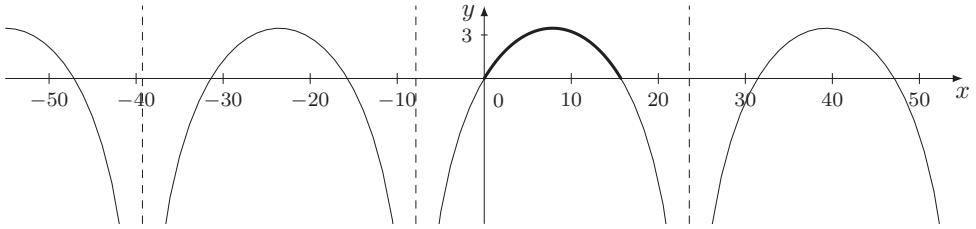
Integrační konstanty  $K_1$ ,  $K_2$  a  $K_3$  určíme z počátečních podmínek,

$$K_1 = e^{2v_0 C} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}, \quad K_2 = \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{2}{1 - \sin \alpha} \right), \quad K_3 = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{arctg} \sqrt{K_1}. \quad (37)$$

Eliminací časového parametru z rovnic (36) získáme explicitní vyjádření trajektorie rovnoměrného šikmého vrhu,

$$y = y(x) = \frac{v_0^2}{g} \ln \left[ \frac{|\sin(g(x - K_3)/v_0^2)|}{\cos \alpha} \right]. \quad (38)$$

Trajektorie rovnoměrného šikmého vrhu je však reprezentována pouze nezápornou částí první periody funkce (38), viz obr. 1. Nulové hodnoty první periody představují start a dopad částice.



Obr. 1. Graf explicitního vyjádření (38)

## 6. Kinematické parametry rovnoměrného šikmého vrhu

Nejdříve odvodíme vztah pro dobu výstupu  $\mathcal{T}$  rovnoměrného šikmého vrhu. Za dobu  $\mathcal{T}$  dosáhne částice nejvyššího bodu  $H = [x_{\max}, y_{\max}] = [x(\mathcal{T}), y(\mathcal{T})]$  trajektorie, ve kterém má okamžitá rychlost  $\mathbf{v}$  nulovou  $y$ -ovou složku rychlosti,  $v_y(\mathcal{T}) = \dot{y}(\mathcal{T}) = 0$ .

Položíme-li tedy pravou stranu rovnice (34) rovnu nule, přičemž integrační konstantu  $C$  nahradíme (35) a proměnnou  $t$  přeznačíme na  $\mathcal{T}$ , dostaneme hyperbolickou rovnici pro neznámou  $\mathcal{T}$ , jejímž řešením je hledaný vztah pro dobu výstupu

$$\mathcal{T} = \frac{v_0}{2g} \ln \left( \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right). \quad (39)$$

Dosažením doby výstupu  $\mathcal{T}$  do parametrických rovnic rovnoměrného šikmého vrhu (36) dostáváme souřadnice bodu  $H = [x_{\max}, y_{\max}] = [x(\mathcal{T}), y(\mathcal{T})]$ :

$$\begin{aligned} x_{\max} &= -\frac{2v_0^2}{g} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} \exp \left( -\frac{2g\mathcal{T}}{v_0} \right) + \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} \exp \left( -\ln \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \right) \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right) \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{v_0^2}{g} \left( 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Uplatněním identity  $\operatorname{arctg} X + \operatorname{arccotg} X = \pi/2$  dostáváme

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{K_1} - \operatorname{arccotg} \sqrt{K_1} \right), \quad K_1 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}. \quad (41)$$

Využitím identity  $\operatorname{arccotg} X = \operatorname{arctg} 1/X$ , platné pro  $X > 0$ , a identity  $\operatorname{arctg} X_1 - \operatorname{arctg} X_2 = \operatorname{arctg} [(X_1 - X_2)/(1 + X_1 X_2)]$ , platné pro  $X_1 X_2 > -1$ , kde v našem

případě  $X_1 = \sqrt{K_1}$  a  $X_2 = 1/\sqrt{K_1}$ , tzn.  $X_1X_2 = 1$ , lze vztah pro  $x_{\max}$  dále upravovat,

$$\begin{aligned} x_{\max} &= \frac{v_0^2}{g} \operatorname{arctg} \frac{K_1 - 1}{2\sqrt{K_1}} = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - 1}{2\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin\alpha\sqrt{1-\sin\alpha}}{(1-\sin\alpha)\sqrt{1+\sin\alpha}} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \operatorname{arctg} \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\alpha. \end{aligned} \quad (42)$$

Pro výšku výstupu  $y_{\max} = y(T)$  dostáváme

$$\begin{aligned} y_{\max} &= -\frac{v_0^2}{2g} \ln \left( \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \right) - \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \exp \left( -\ln \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \right) + 1 \right) \\ &\quad + \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{2}{1-\sin\alpha} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \left( \ln \left( \frac{2}{1-\sin\alpha} \right) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \right) - \ln \left( \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} + 1 \right) \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{1}{\cos\alpha} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Pro bod  $H$  maximálního výstupu částice tedy platí

$$H = [x_{\max}, y_{\max}] = \left[ \frac{v_0^2}{g}\alpha, \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{1}{\cos\alpha} \right) \right]. \quad (44)$$

Nyní určíme celkovou dobu letu  $T$  částice při rovnoměrném šikmém vrhu z podmínky pro dopad  $y(T) = 0$ ,

$$y(T) \stackrel{(36)}{=} -v_0T - \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \exp \left( -\frac{2gT}{v_0} \right) + 1 \right) + \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{2}{1-\sin\alpha} \right) = 0. \quad (45)$$

Za účelem vyjádření neznámé  $T$  z rovnice (45) zavedeme substituci

$$\tau = \exp \left( -\frac{2gT}{v_0} \right) \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{v_0}{2g} \ln \tau, \quad (46)$$

tedy

$$\frac{v_0^2}{2g} \ln \tau - \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \tau + 1 \right) + \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{2}{1-\sin\alpha} \right) = 0. \quad (47)$$

Po úpravách přejde rovnice (47) v kvadratickou rovnici pro  $\tau$ ,

$$(1+\sin\alpha)^2\tau^2 + (2(1-\sin^2\alpha) - 4)\tau + (1-\sin\alpha)^2 = 0, \quad (48)$$

která má dvě reálná řešení

$$\tau_1 = 1, \tau_2 = \frac{1}{K_1^2} \stackrel{(46)}{\Rightarrow} T_1 = 0, T_2 = -\frac{v_0}{2g} \ln \frac{1}{K_1^2}. \quad (49)$$

První kořen  $T_1 = 0$  odpovídá času startu částice. Druhý kořen  $T_2 = T$ ,

$$T = \frac{v_0}{g} \ln \left( \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right), \quad (50)$$

odpovídá času dopadu resp. celkové době letu  $T$  částice. Porovnáním (50) s (39) dostáváme

$$T = 2\mathcal{T}, \quad (51)$$

jinými slovy doba výstupu  $\mathcal{T}$  je polovinou celkové doby  $T$  trvání rovnoměrného šikmého vrhu, což je stejný vztah jako u klasického šikmého vrhu.

Posledním kinematickým parametrem je vzdálenost dopadu  $d$ , kterou určíme ze vztahu  $d = x(T)$ ,

$$d = \frac{2v_0^2}{g} \alpha = 2x_{\max}. \quad (52)$$

Trajektorie rovnoměrného šikmého vrhu je tedy souměrná vzhledem k přímce  $x = x_{\max}$  stejně tak jako v případě trajektorie klasického šikmého vrhu. Všimněme si zajímavého faktu, že vzdálenost dopadu  $d = 2x_{\max}$  rovnoměrného šikmého vrhu je lineárně úměrná elevačnímu úhlu  $\alpha$ .

Na závěr ještě určíme délku  $s$  trajektorie rovnoměrného šikmého vrhu

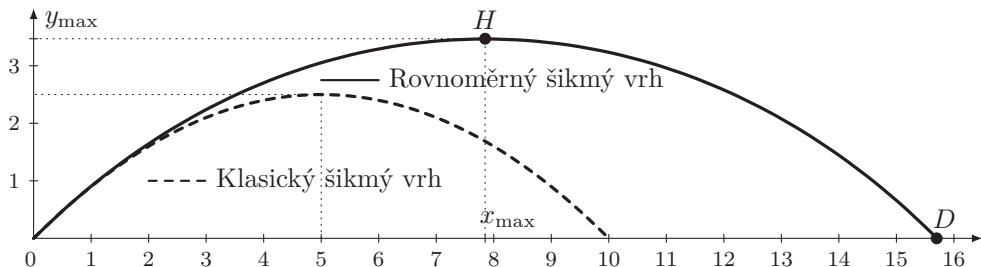
$$s = \int_0^T v(t) dt = v_0 \int_0^T dt = v_0 T = \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right). \quad (53)$$

## 7. Srovnání klasického a rovnoměrného šikmého vrhu

Rovnoměrný šikmý vrh je vhodným příkladem pro přímé srovnání vázaného pohybu mechanického systému s pohybem příslušného nevázaného mechanického systému, kterým je v tomto případě klasický šikmý vrh. Oba pohyby srovnáváme při stejných počátečních podmínkách; oba vrhy startují z počátku,  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$  s počáteční rychlostí  $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$  pro číselné hodnoty  $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a  $\alpha = 45^\circ$ .

Klasický šikmý vrh	Rovnoměrný šikmý vrh
$d = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = 10 \text{ m}$	$d = \frac{2v_0^2}{g} \alpha \doteq 15,7 \text{ m}$
$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha = 5 \text{ m}$	$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \alpha \doteq 7,85 \text{ m}$
$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = 2,5 \text{ m}$	$y_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{1}{\cos \alpha} \right) \doteq 3,47 \text{ m}$
$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha \doteq 1,41 \text{ s}$	$T = \frac{v_0}{g} \ln \left( \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \doteq 1,76 \text{ s}$
$s = \frac{v_0^2}{g} \left( \sin \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \ln \left( \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \right) \doteq 18,5 \text{ m}$	$s = \frac{v_0^2}{g} \ln \left( \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \doteq 30 \text{ m}$

Tab. 1. Srovnání kinematických parametrů obou vrhů [10]



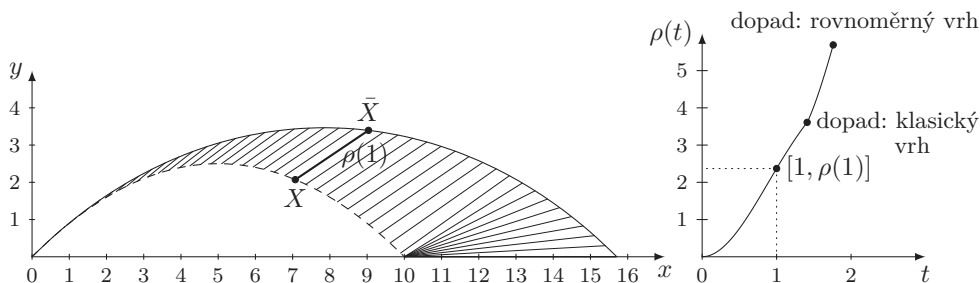
Obr. 2. Grafické znázornění trajektorií obou vrhů [10]

Kromě výše zmíněných kinematických parametrů je možné zavést další komparativní parametry: *vzdálenostní odchytku*  $\rho$  a *směrovou odchytku*  $\Upsilon$ . Tyto parametry srovnávají izochronní body (body ve stejném čase  $t$ ) na obou trajektoriích z hlediska jejich vzájemné vzdálenosti.

Vzdálenostní odchytku  $\rho(X, \bar{X})$  v čase  $t$  je definována vztahem

$$\rho(X, \bar{X}) = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}, \quad (54)$$

kde  $X = [x, y]$  a  $\bar{X} = [\bar{x}, \bar{y}]$  jsou izochronní body obou trajektorií v nějakém čase  $t$ . Podél trajektorií se vzdálenostní odchytku stává funkcí času,  $\rho = \rho(t)$ .



Obr. 3. Časový průběh vzdálenostní odchytky [10]

Průběh vzdálenostní odchytky rovnoměrného šikmého vrhu od klasického šikmého vrhu ilustruje obr. 3. Všimněme si, že druhý graf na obr. 3 má bod zlomu v okamžiku odpovídajícím dopadu klasického šikmého vrhu.

## 8. Dynamika rovnoměrného šikmého vrhu

Příčinou klasického šikmého vrhu je tíhová síla  $\mathbf{F}_g = (0, -mg)$ , která má stálou velikost  $F_g = mg$  i stálý směr svisle dolů. V kombinaci s počáteční podmínkou, že částici je udělena počáteční rychlost ve směru šikmo vzhůru, tato síla způsobuje, že v první polovině pohybu od startu po dosažení maximální výstupné výšky je pohyb částice zpomalován, a ve druhé polovině pohybu od dosažení maximální výstupné výšky po dopad částice je pohyb zrychlován.

V případě rovnoměrného šikmého vrhu působí na částici kromě tíhové síly  $\mathbf{F}_g$  navíc Četajevova vazebná síla  $\Phi$ , která zajišťuje splnění požadavku konstantní velikosti rychlosti částice. Tuto sílu lze v našem případě vyjádřit vztahem

$$\Phi = (\Phi_x, \Phi_y) = \mu(t) \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \mu(t)(2\dot{x}, 2\dot{y}) = 2\mu(t)\mathbf{v}(t) = 2\mu(t)v_0\mathbf{e}_{\mathbf{v}(t)}, \quad (55)$$

kde  $\mu(t)$  je Lagrangeův multiplikátor,  $\mathbf{v}(t)$  je vektor okamžité rychlosti,  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}(t)}$  je jednotkový vektor ve směru  $\mathbf{v}(t)$ . Je evidentní, že Četajevova síla musí v průběhu pohybu měnit jak velikost  $|\Phi| = 2v_0|\mu(t)|$ , tak i směr  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}(t)}$ , který je určen směrem okamžité rychlosti  $\mathbf{v}(t)$ .

Budeme studovat časový průběh Četajevovy síly. Eliminací Lagrangeova multiplikátoru  $\mu$  z deformovaných pohybových rovnic (24) a spolu s užitím rovnice (25) dostáváme vyjádření Lagrangeova multiplikátoru ve tvaru (26),

$$\mu = -\frac{m\dot{y}\ddot{y}}{2(v_0^2 - \dot{y}^2)} \stackrel{(27)}{=} \frac{mg}{2v_0^2}\dot{y} \stackrel{(34)}{=} \frac{mg}{2v_0} \operatorname{tgh} \left( -\frac{g}{v_0} \left( t - \frac{v_0^2}{g}C \right) \right). \quad (56)$$

Dosažením vztahu (35) pro integrační konstantu  $C$  a uplatněním (50) pro celkový čas  $T$  obdržíme

$$\mu(t) = \frac{mg}{2v_0} \operatorname{tgh} \left( \frac{g}{v_0} \left( \frac{T}{2} - t \right) \right). \quad (57)$$

Časová závislost vektoru Četajevovy síly je tedy dána vztahem

$$\Phi(t) = \phi(t)\mathbf{e}_{\mathbf{v}(t)}, \quad (58)$$

kde

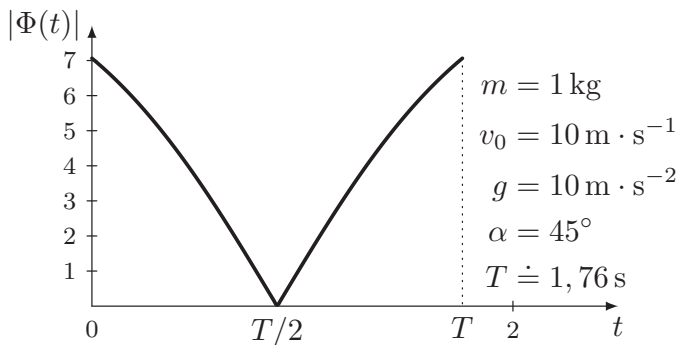
$$\phi(t) = mg \operatorname{tgh} \left( \frac{g}{v_0} \left( \frac{T}{2} - t \right) \right). \quad (59)$$

Vliv Četajevovy síly může být alternativně nahrazen nějakou vnější silou  $\mathbf{F}_e$  působící ve vektorové přímce okamžité rychlosti  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}(t)}$ , přičemž její velikost bude usměrňována podle vztahu

$$|\mathbf{F}_e| = |\Phi(t)| = |\phi(t)| = mg \left| \operatorname{tgh} \left( \frac{g}{v_0} \left( \frac{T}{2} - t \right) \right) \right|. \quad (60)$$

Všimněme si, že od okamžiku startu částice ( $t = 0$ ) do okamžiku  $\mathcal{T} = T/2$  (dosažení maximální výšky výstupu) je funkce  $\phi(t) > 0$ , tzn. kompenzuje zpomalovaný pohyb částice, ke kterému by jinak docházelo v případě klasického šikmého vrhu. Ve druhé části pohybu ( $t \in \langle \mathcal{T}, T \rangle$ ) je funkce  $\phi(t) < 0$ , má tedy opačný směr než vektor okamžité rychlosti a kompenzuje zrychlovaný pohyb částice.

Ukazuje se, že Četajevova vazebná síla  $\Phi$  hraje podstatnou roli také v energetické bilanci rovnoměrného šikmého vrhu. Mechanická práce Četajevovy síly podél trajektorie rovnoměrného šikmého vrhu totiž kompenzuje změny potenciální energie namísto kinetické energie, která zůstává v průběhu pohybu konstantní. Podrobnosti lze nalézt v [10].



Obr. 4. Časový průběh Četajevovy síly při rovnoměrném šikmém vrhu

## 9. Energetická bilance rovnoměrného šikmého vrhu

Je zřejmé, že klasický zákon zachování mechanické energie

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{konst.} \quad (61)$$

platný pro klasický šikmý vrh, nemůže být splněn v případě rovnoměrného šikmého vrhu, jelikož kinetická energie  $E_k$  zůstává konstantní,  $E_k = \frac{1}{2}mv_0^2$ , a potenciální energie  $E_p$  se v průběhu pohybu mění.

K odvození modifikovaného zákona zachování mechanické energie pro rovnoměrný šikmý vrh vyjdeme z deformovaných pohybových rovnic (24),

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\mu\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= 2\mu\dot{y} - mg. \end{aligned} \quad (62)$$

Z první rovnice snadno vyjádříme Lagrangeův multiplikátor

$$\mu = \frac{m\ddot{x}}{2\dot{x}} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\ln \dot{x}), \quad (\dot{x} > 0 \text{ v průběhu celého pohybu}). \quad (63)$$

Následně po dosazení rovnice vazby (22)

$$\mu = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left( \ln \sqrt{v_0^2 - \dot{y}^2} \right). \quad (64)$$

Nyní vynásobíme první rovnici soustavy (62)  $\dot{x}$  a druhou  $\dot{y}$  a obě rovnice sečteme,

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 2\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg\dot{y}. \quad (65)$$

Levou stranu lze převést na časovou derivaci kinetické energie  $E_k$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right) = 2\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg\dot{y}. \quad (66)$$

Vzhledem k rovnici vazby  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_0^2 = \text{konst.}$  je levá strana poslední rovnice rovna 0,

$$2\mu v_0^2 - mg\dot{y} = 0. \quad (67)$$

Po dosazení Lagrangeova multiplikátoru (64) dostáváme

$$mv_0^2 \frac{d}{dt} \left( \ln \sqrt{v_0^2 - \dot{y}^2} \right) - mg\dot{y} = 0, \quad (68)$$

což lze zapsat jako derivaci jednoho výrazu,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_0^2}{2} \ln(v_0^2 - \dot{y}^2) - mgy \right) = 0, \quad (69)$$

odkud již snadno získáme modifikovaný zákon zachování mechanické energie

$$\frac{mv_0^2}{2} \ln \left( \frac{1}{v_0^2 - \dot{y}^2} \right) + mgy = \text{konst.}, \quad (70)$$

který můžeme zapsat v jednodušším tvaru

$$\tilde{E}_k + E_p = \text{konst.}, \quad (71)$$

kde

$$\tilde{E}_k = \frac{mv_0^2}{2} \ln \left( \frac{1}{v_0^2 - \dot{y}^2} \right) \quad (72)$$

je *kompensace kinetické energie*, která vyrovnává změny potenciální energie pohybující se částice namísto klasické kinetické energie  $E_k$ , která zde zůstává konstantní. Využijeme-li časovou závislost  $y$ -ové komponenty rychlosti  $v_y(t) = \dot{y}(t)$  danou vztahem (34), získáme po úpravách závislost kompensace kinetické energie  $\tilde{E}_k$  na čase v průběhu pohybu,

$$\tilde{E}_k(t) = \frac{mv_0^2}{2} \ln \left( \frac{\cosh^2(-g(t - \frac{1}{2}T)/v_0)}{v_0^2} \right). \quad (73)$$

Analýzou závislosti (73) zjistíme, že kompensace kinetické energie  $\tilde{E}_k$  nabývá maximální hodnoty

$$\tilde{E}_{k \max} = \frac{mv_0^2}{2} \ln \left( \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \quad (74)$$

v čase  $t = 0$  a  $t = T$ , kdy je potenciální energie částice  $E_p$  nulová, a minimální hodnoty

$$\tilde{E}_{k \min} = \frac{mv_0^2}{2} \ln \left( \frac{1}{v_0^2} \right) \quad (75)$$

v čase  $t = T/2$ , kdy je potenciální energie  $E_p$  maximální. Na základě těchto hodnot můžeme stanovit hodnotu konstanty v (70) resp. (71) a zapsat modifikovaný zákon zachování mechanické energie rovnoměrného šikmého vrhu v partikulárním tvaru

$$\tilde{E}_k + E_p = \tilde{E}_{k \max} = \tilde{E}_{k \min} + E_{p \max}, \quad (76)$$

resp.

$$\frac{mv_0^2}{2} \ln \left( \frac{1}{v_0^2 - \dot{y}^2} \right) + mgy = \frac{mv_0^2}{2} \ln \left( \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = \frac{mv_0^2}{2} \ln \left( \frac{1}{v_0^2} \right) + mgy_{\max} \quad (77)$$



a srovnat jej s klasickým zákonem zachování mechanické energie klasického šikmého vrhu

$$E_k + E_p = E_{k \max} = E_{k \min} + E_{p \max}, \quad (78)$$

resp.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2 \alpha + mgy_{\max}. \quad (79)$$

Ukazuje se, že kompenzace kinetické energie  $\tilde{E}_k$  představuje záporně vzatou práci  $-W_{\Phi}$  vazebné síly  $\Phi$  podél trajektorie rovnoměrného šikmého vrhu [10].

## 10. Závěr

Modifikace klasického šikmého vrhu na rovnoměrný pohyb s sebou přináší podstatné změny v kinematice, dynamice a také energetické bilanci výsledného pohybu.

Z hlediska kinematiky již trajektorie není částí paraboly, ale jedná se o malou část grafu na obr. 1 jistě periodické transcendentní funkce (38). Přitom trajektorie zůstává stále symetrická podle osy  $x = x_{\max}$  při zachování časové relace, že celková doba trvání rovnoměrného šikmého vrhu je rovna dvojnásobku doby výstupu částice do maximální výšky  $y_{\max}$ .

Dochází ke změnám kinematických parametrů oproti klasickému šikmému vrhu při stejných počátečních podmínkách  $v_0$ ,  $\alpha$ . Tyto změny se začínají výrazněji projevovat při elevačních úhlech  $\alpha \geq 30^\circ$ : dochází k prodloužení vzdálenosti dopadu  $d$ , zvýšení maximální výšky výstupu  $y_{\max}$ , prodloužení délky trajektorie  $s$  a prodloužení celkové doby letu  $T$ , viz tab. 1. Pozoruhodná je zvláště přímo úměrná závislost vzdálenosti dopadu  $d$  na elevačním úhlu  $\alpha$ , (52).

Dynamiku modifikovaného šikmého vrhu vysvětlujeme přítomností Četajevovy vazebné síly, která zajišťuje rovnoměrnost pohybu. Ukazuje se, že vazebná síla musí v průběhu pohybu měnit velikost (60), ale i směr  $e_v$  podle vektoru okamžité rychlosti.

Požadavek na rovnoměrnost pohybu v tíhovém poli zcela naruší platnost klasického zákona zachování mechanické energie, který evidentně nemůže být splněn. Pro rovnoměrný šikmý vrh lze však zformulovat modifikovaný zákon zachování mechanické energie, kde roli standardní kinetické energie  $E_k$  přebírá tzv. kompenzace kinetické energie  $\tilde{E}_k$ , která vyrovnává změny potenciální energie  $E_p$ , ke kterým v průběhu pohybu dochází, namísto konstantní kinetické energie. Tento modifikovaný zákon zachování mechanické energie byl identifikován v [10] jako jeden partikulární zákon zachování v množině noetherovských zákonů zachování rovnoměrného šikmého vrhu pocházejících z vázaných noetherovských symetrií tohoto mechanického systému nalezených v [10] prostřednictvím obecné definice vázané noetherovské symetrie neholonomně vázaných Lagrangeových systémů prezentované v [7].

Jsme si vědomi toho, že se jedná pouze o jakousi teoretickou modifikaci pohybu, jejíž technická realizace je zřejmě obtížně proveditelná.

**Poděkování.** Autoři děkují za podporu svých pracovišť. Druhý autor děkuje za podporu projektu Centrum excelence IT4Innovations, CZ.1.05/1.1.00/02.0070.

## L i t e r a t u r a

- [1] ALEXEJEV, V. M., TICHOMIROV, V. M., FOMIN, S. V.: *Matematická teorie optimálních procesů*. Academia, Praha, 1991. Překlad z ruského originálu *Optimalnoje upravlenije*, Nauka, Moskva, 1979.
- [2] BOS, H. J. M.: *Lectures in the history of mathematics*. American Mathematical Society, London Mathematical Society, 1993.
- [3] BRDIČKA, M., HLADÍK, A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha, 1987.
- [4] CHETAEV, N. G.: *On the Gauss principle*. *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch.* 6 (1932–1933) 323–326 (*Russian*).
- [5] KRUPKOVÁ, O.: *Mechanical systems with nonholonomic constraints*. *J. Math. Phys.* 38 (10) (1997), 5098–5126.
- [6] KRUPKOVÁ, O.: *The nonholonomic variational principle*. *J. Phys. A: Math. Theor.* 42 (2009), 1–40.
- [7] KRUPKOVÁ, O.: *Noether theorem, 90 years on*. In: *Geometry and Physics, Proc. of XVII International Fall Workshop on Geometry and Physics*, F. Etayo, M. Fioravanti, R. Santamaría (Eds.), 2009, 159–170.
- [8] KVASNICA, J., HAVRÁNEK, A., LUKÁČ, P., SPRUŠIL, B.: *Mechanika*. 2. vydání, Academia, Praha, 2004.
- [9] SMOLKA, J.: *Galileo Galilei, legenda moderní vědy*. Edice Velké postavy hvězdného nebe, sv. 7. Prometheus, Praha, 2000.
- [10] SWACZYNA, M., VOLNÝ, P.: *Uniform projectile motion: dynamics, symmetries and conservation laws*. *Reports on Mathematical Physics* 73 (2) (2014), 177–200.
- [11] ŠTOLL, I.: *Dějiny fyziky*. Prometheus, Praha, 2009.