

Rozhledy matematicko-fyzikální

Úlohy domácího kola 55. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 80 (2005), No. 1, 38–40

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146086>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2005

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SOUTĚŽE

Úlohy domácího kola 55. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

KATEGORIE A

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

(*J. Švrček*)

2. Necht $ABCD$ je tětívový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p , q kolmice z bodů D , C na přímkou AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q . Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

(*E. Kováč*)

3. Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nenulových celých čísel má tu vlastnost, že pro každé $n \geq 0$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde b_n je číslo, které má stejné znaménko jako číslo a_n , ale opačné pořadí číslic (zápis čísla b_n může narozdíl od zápisu čísla a_n začínat jednou nebo více nulami). Například pro $a_0 = 1210$ je $a_1 = 1089$, $a_2 = -8712$, $a_3 = -6534$, ...

a) Dokažte, že posloupnost (a_n) je periodická.

b) Zjistěte, jaké nejmenší přirozené číslo může být a_0 .

(*T. Jurík*)

4. Najděte všechny kubické rovnice $P(x) = 0$, které mají aspoň dva různé reálné kořeny, z nichž jeden je číslo 7, a které pro každé reálné číslo t splňují podmínku: Jestliže $P(t) = 0$, pak $P(t+1) = 1$.

(*P. Novotný*)

5. Jsou dány úsečky délek a , b , c , d . Dokažte, že konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ se stranami délek a , b , c , d (při obvyklém značení) existují a přitom úhlopříčky každého z nich svírají jeden a týž úhel, právě když platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

(*J. Šimša*)

6. Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 2005(x - y).$$

(*J. Moravčík*)

KATEGORIE B

1. Určete všechny hodnoty celočíselného parametru a , pro něž má rovnice

$$(x + a)(x + 2a) = 3a$$

aspoň jeden celočíselný kořen.

(*J. Zhouf*)

2. V daném trojúhelníku ABC označme D ten bod polopřímky CA , pro který platí $|CD| = |CB|$. Dále označme po řadě E, F středy úseček AD a BC . Dokažte, že $|\sphericalangle BAC| = 2 \cdot |\sphericalangle CEF|$, právě když $|AB| = |BC|$.

(*P. Leischner*)

3. Rozhodněte, zda nerovnost

$$a(b + 1) + b(c + 1) + c(d + 1) + d(a + 1) \geq \frac{1}{2}(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)$$

platí pro libovolná kladná čísla a, b, c, d , která vyhovují podmínce

$$\text{a) } ab = cd = 1; \quad \text{b) } ac = bd = 1.$$

(*J. Šimša*)

4. Každou z hvězdiček v zápisech dvanáctimístných čísel

$$A = *88\ 888\ 888\ 888, \quad B = *11\ 111\ 111\ 111$$

nahradte nějakou číslicí tak, aby výraz $|14A - 13B|$ měl co nejmenší hodnotu.

(*J. Šimša*)

5. Kruh o středu S a poloměru r je rozdělen na čtyři části dvěma tětivy, z nichž jedna má délku r a druhá má od středu S vzdálenost $\frac{1}{2}r$. Dokažte, že absolutní hodnota rozdílu obsahů těch dvou částí, které mají společný právě jeden bod a přitom žádná z nich neobsahuje střed S , je roven jedné šestině obsahu kruhu.

(*P. Leischner*)

SOUTĚŽE

6. Určete nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Zvolíme-li n různých přirozených čísel menších než 2005, jsou mezi nimi dvě taková, že podíl součtu a rozdílu jejich druhých mocnin je větší než tři.

(*J. Zhouf*)

KATEGORIE C

1. a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo m je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 60.
b) Určete všechna přirozená čísla m , pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120.

(*J. Moravčík*)

2. Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtete poloměr kružnice m . Najděte všechna řešení.

(*L. Boček*)

3. Určete počet všech trojic navzájem různých trojmístných přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze tří sčítaných čísel.

(*J. Šimša*)

4. Je dáno přirozené číslo n ($n \geq 2$) a reálná čísla x_1, x_2, \dots, x_n , pro která platí

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \dots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokažte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq n.$$

(*J. Švrček*)

5. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC . Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4 . Vypočtete $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3, S_3 : S_4 = 3 : 8$.

(*P. Novotný*)

6. Rozhodněte, které z čísel

$$\sqrt{p + \sqrt{q}} + \sqrt{q + \sqrt{p}}, \quad \sqrt{p + \sqrt{p}} + \sqrt{q + \sqrt{q}}$$

je větší, jsou-li p a q různá kladná čísla.

(*J. Moravčík*)