Rozhledy matematicko-fyzikální

Miroslava Jarešová; Jaroslav Zhouf

Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s parabolou

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 80 (2005), No. 4, 15–22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146118

Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s parabolou

Miroslava Jarešová, PedF UHK Hradec Králové
Jaroslav Zhouf, PedF UK Praha

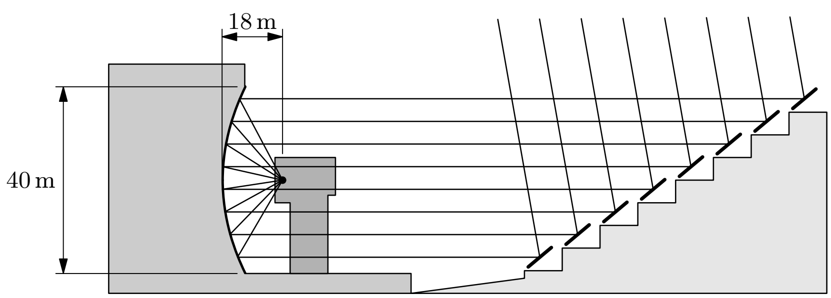
Při řešení úloh z fyziky se často setkáváme s různými kuželosečkami. Ukážeme tři náročnější úlohy, v nichž se vyskytuje parabola.

První úloha se týká určení normály a tečny paraboly.

1. Sluneční pec

Ve francouzských Pyrenejích v městečku Odeillo pracuje největší a nejvýkonnější sluncem vytápěná tavicí pec na světě. Úkolem zařízení je dosahovat nejvyšších tavicích teplot (až $3\,800\,^\circ\mathrm{C}$), aniž by se materiály během tavení znečistily. Komplex tvoří obrovské parabolické zrcadlo o ohniskové délce $f = 18\,\mathrm{m}$. Do něj vstupují paprsky dalších 63 otočných zrcadel (heliostarů) řízených počítačem. Na energii extrémně bohatý svazek světelných a tepelných paprsků dopadajících na pec dokáže během jedné minuty roztavit kruhovou ocelovou desku centimetrové tloušťky o průměru $30\,\mathrm{cm}$ a počáteční teplotě $20\,^\circ\mathrm{C}$.

a) Dokažte, že všechny paprsky rovnoběžné s optickou osou zrcadla jsou odraženy do ohniska zrcadla umístěného v tavicí peci (obr. 1).



Obr. 1

b) Parabolické zrcadlo nahradíme kulovým zrcadlem o poloměru $R = 2f$ tak, aby vrcholy obou zrcadel byly totožné. Poloměr podstavy kulového vrchlíku vymezeného zrcadlem bude 20 m. Určete interval na optické ose zrcadla, ve kterém paprsky odražené kulovým zrcadlem protínají optickou osu.

Řešení

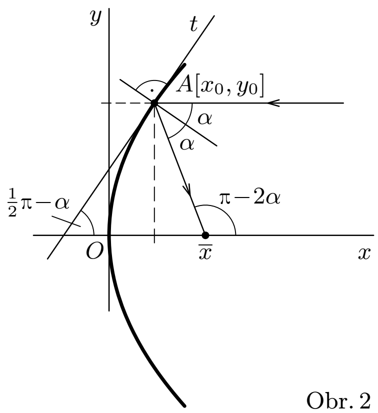
a) Na zrcadlo tvaru rotačního paraboloidu dopadá soustava paprsků rovnoběžných s optickou osou. Chceme ukázat, že všechny tyto paprsky se po odrazu protínají v jednom bodě – ohnisku.

Budeme uvažovat řez zrcadla libovolnou rovinou, která obsahuje osu zrcadla. V této rovině zvolíme soustavu souřadnic Oxy tak, aby vrchol parabolického zrcadla byl v jejím počátku a osa zrcadla splývala s osou x (obr. 2). Nechť paprsek rovnoběžný s optickou osou dopadne na zrcadlo v libovolně zvoleném bodě $A[x_0, y_0]$. Rovnice řezu zrcadla má tvar

$$y^2 = 4fx \qquad (1)$$

a rovnice dopadajícího paprsku je

$$y = y_0.$$



Obr. 2

Při označení z obr. 2 má odražený paprsek rovnici

$$y - y_0 = \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) \cdot (x - x_0). \qquad (2)$$

Vypočteme x-ovou souřadnici $\overline{x}$ průsečíku tohoto paprsku s osou x. V rovnici (2) položíme $y = 0$, $x = \overline{x}$ a s využitím vzorců

$$\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = -\operatorname{tg} 2\alpha, \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

postupně dostaneme

$$\overline{x} = -\frac{y_0}{\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha)} + x_0 = \frac{y_0}{\operatorname{tg} 2\alpha} + x_0 = \frac{y_0 \cdot (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{2 \operatorname{tg}\alpha} + x_0. \qquad (3)$$

Zbývá vypočítat $\operatorname{tg}\alpha$ a dosadit do výsledného výrazu v (3). Z analytické geometrie víme, že rovnice tečny t paraboly (1) sestrojené v jejím bodě $A[x_0, y_0]$ má tvar

$$y_0 y = 2f \cdot (x + x_0),$$

po úpravě

$$y = \frac{2f}{y_0} \cdot x + \frac{2fx_0}{y_0}\,.$$

Odtud vidíme, že směrnice tečny t je $k = 2f/y_0$. Podle obr. 2 platí

$$k = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Tedy

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{2f}{y_0}\,, \quad \text{odkud} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0}{2f}\,.$$

Dosadíme-li odtud do výsledného výrazu v (3), vypočteme

$$\overline{x} = \frac{y_0 \cdot \left(1 - \dfrac{y_0^2}{4f^2}\right)}{2 \cdot \dfrac{y_0}{2f}} + x_0 = f \cdot \left(1 - \frac{y_0^2}{4f^2}\right) + x_0 = f - \frac{y_0^2}{4f} + x_0.$$

Protože bod $A[x_0, y_0]$ leží na parabole (1), platí pro jeho souřadnice

$$y_0^2 = 4fx_0,$$

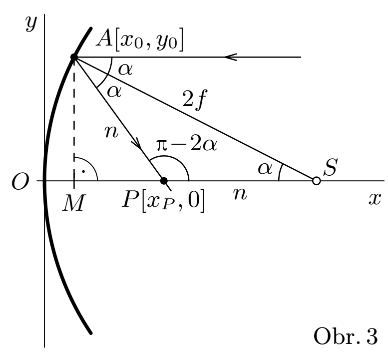
a proto

$$\overline{x} = f - \frac{y_0^2}{4f} + x_0 = f - \frac{4fx_0}{4f} + x_0 = f - x_0 + x_0 = f.$$

Dokázali jsme, že paprsek rovnoběžný s optickou osou parabolického zrcadla, který na zrcadlo dopadne v libovolném jeho bodě $A[x_0, y_0]$, se odrazí do bodu $[\overline{x}, 0] = [f, 0]$, což je ohnisko zrcadla. Všechny odražené paprsky se tedy protínají v ohnisku.

b) Parabolické zrcadlo nahradíme nyní kulovým zrcadlem o poloměru $R = 2f$. Dopadá na ně svazek paprsků rovnoběžných s optickou osou. Opět uvažujeme řez zrcadla libovolnou rovinou, která obsahuje osu zrcadla a v této rovině soustavu souřadnic Oxy zvolenou podobně jako v případě parabolického zrcadla (obr. 3).

Paprsek, který dopadne na zrcadlo v libovolném jeho bodě $A[x_0, y_0]$, se odrazí do bodu $P[x_P, 0]$. Při výpočtu x_P budeme vycházet z označení na obr. 3.



Obr. 3

Ze sinové věty pro trojúhelník APS postupně dostaneme

$$\frac{\sin(\pi - 2\alpha)}{2f} = \frac{\sin\alpha}{n}\,,$$

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2f} = \frac{\sin\alpha}{n}\,,$$

$$n = \frac{f}{\cos\alpha}\,. \tag{4}$$

Z pravoúhlého trojúhelníku SAM vypočteme

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{4f^2 - y_0^2}}{2f}$$

a dosadíme do (4). Dostaneme tak

$$n = \frac{2f^2}{\sqrt{4f^2 - y_0^2}}\,.$$

Protože $x_P = 2f - n$, platí

$$x_P = 2f - \frac{2f^2}{\sqrt{4f^2 - y_0^2}} = 2f\left(1 - \frac{f}{\sqrt{4f^2 - y_0^2}}\right). \tag{5}$$

Podle zadání úlohy je $f = 18\,\mathrm{m}$, $y_0 \in (0\,\mathrm{m},\, 20\,\mathrm{m}\rangle$. Dosadíme-li odtud do výsledného výrazu v (5), zjistíme, že $x_P \in (14{,}35\,\mathrm{m},\, 18\,\mathrm{m})$. Průsečíky paprsků s optickou osou leží tedy na ose x v intervalu $(14{,}35\,\mathrm{m},\, 18\,\mathrm{m})$, délka tohoto intervalu je 3,65 m.

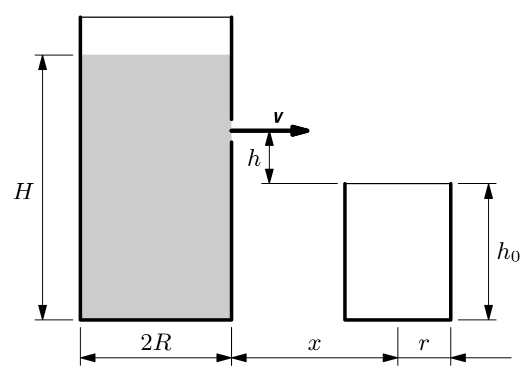
Druhá úloha se týká výtoku kapaliny z nádoby otvorem ve stěně. Víme, že proud vytékající kapaliny se za ideálních podmínek (zanedbání odporu prostředí) pohybuje po části paraboly, která má vrchol v místě, odkud kapalina vytéká z nádoby.

2. Výtok kapaliny z nádoby

Z otevřené válcové nádoby o poloměru R vytéká postranním otvorem voda. Vedle této nádoby stojí otevřená válcová nádoba o poloměru r, jejíž horní okraj je o h níže než výtokový otvor první nádoby. Středy podstav obou nádob leží v rovině vodního paprsku. Objem nižší nádoby je V_0. Předpokládáme, že počáteční výška vodní hladiny ve vyšší nádobě je dostatečná pro to, aby vytékající voda „dostříkla“ až za nižší nádobu. Při výtoku kapaliny postupně klesá výška vodní hladiny v nádobě a mění se tvar paraboly, po níž se vodní paprsek pohybuje.

a) Určete vzdálenost x středu podstavy nižší nádoby od stěny vyšší nádoby (obr. 4), jestliže během doby, kdy vodní paprsek zasahuje do nižší nádoby, nateče do této nádoby voda o objemu V $(V < V_0)$.

b) Určete vzdálenost x a nejmenší počáteční výšku H_0 vodní hladiny ve vyšší nádobě, aby se nižší nádoba při výtoku kapaliny celá naplnila.



Obr. 4

Řešení

a) Označme H výšku vodní hladiny ve vyšší nádobě na počátku děje (vytékající voda „dostříkne“ přesně k nejvzdálenějšímu okraji horní podstavy nižší nádoby). Velikost výtokové rychlosti vody v tomto okamžiku je

$$v_0 = \sqrt{2(H - h_0 - h)g},$$

kde h_0 je výška nižší nádoby. Na konci děje (vytékající voda „dostříkne“ přesně k nejbližšímu okraji horní podstavy nižší nádoby) je velikost výtokové rychlosti vody

$$v_0 = \sqrt{2(H - h_0 - h - \Delta h)g},$$

kde Δh je pokles hladiny ve vyšší nádobě od počátku děje.

Jedná se o vrh vodorovný. Doba pohybu jednotlivých částic vody z otvoru po horní okraj menší nádoby je $t = \sqrt{2h/g}$. Platí

$$x + r = \sqrt{2(H - h_0 - h)g} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H - h_0 - h)},$$

$$x - r = \sqrt{2(H - h_0 - h - \Delta h)g} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H - h_0 - h - \Delta h)}.$$

Odtud postupně dostaneme

$$(x + r)^2 - (x - r)^2 = 4h(H - h_0 - h) - 4h(H - h_0 - h - \Delta h),$$

$$4xr = 4h\Delta h. \tag{6}$$

Protože podle zadání nateče do nižší nádoby během děje voda o objemu V, musí právě tolik vody vytéct z vyšší nádoby, tedy

$$V = \pi R^2 \cdot \Delta h, \quad \text{tj.} \quad \Delta h = \frac{V}{\pi R^2}\,.$$

Dosadíme-li odtud do (6), vypočteme, že

$$x = \frac{h}{r} \cdot \frac{V}{\pi R^2}\,. \tag{7}$$

b) Aby se nižší nádoba celá naplnila a žádná voda nepřetekla přes její okraj, musí být $V = V_0$, a tedy podle (7)

$$x = \frac{h}{r} \cdot \frac{V_0}{\pi R^2}\,. \tag{8}$$

Minimální počáteční výšku hladiny vody H_0 ve vyšší nádobě určíme ze vztahu

$$x + r = 2\sqrt{h(H_0 - h_0 - h)}.$$

Po dosazení z (8) a z rovnosti $h_0 = V/\pi r^2$ postupně vypočteme

$$\frac{h}{r} \cdot \frac{V_0}{\pi R^2} + r = 2\sqrt{h\left(H_0 - \frac{V_0}{\pi r^2} - h\right)},$$

$$\left(\frac{hV_0}{\pi R^2 r} + r\right)^2 = 4h\left(H_0 - \frac{V_0}{\pi r^2} - h\right),$$

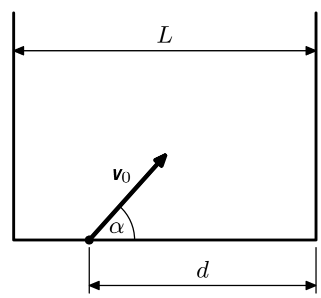
$$H_0 = \frac{1}{4h}\left(\frac{hV_0}{\pi R^2 r} + r\right)^2 + \frac{V_0}{\pi r^2} + h.$$

O třetí úloze můžeme říci, že je to typ úlohy, jejíž řešení usnadní nápad, který „přijde v pravou chvíli“.

3. Míček mezi stěnami

Je dán prostor ohraničený dvěma rovnoběžnými svislými stěnami vzdálenými od sebe L. V tomto prostoru je z podlahy ze vzdálenosti d od pravé stěny vržen šikmo vzhůru pod úhlem α míček (v rovině kolmé ke stěnám a k podlaze) s počáteční rychlostí o velikosti v_0 (obr. 5).

Míček dopadne na stěnu, odrazí se od ní, dopadne na protější stěnu a po odrazu dopadne zpět do místa, odkud byl vržen. Předpokládejme, že odrazy míčku od stěn jsou dokonale pružné. Určete vzdálenost d a velikost počáteční rychlosti v_0 (při daném úhlu α), aby nastala popsaná situace.

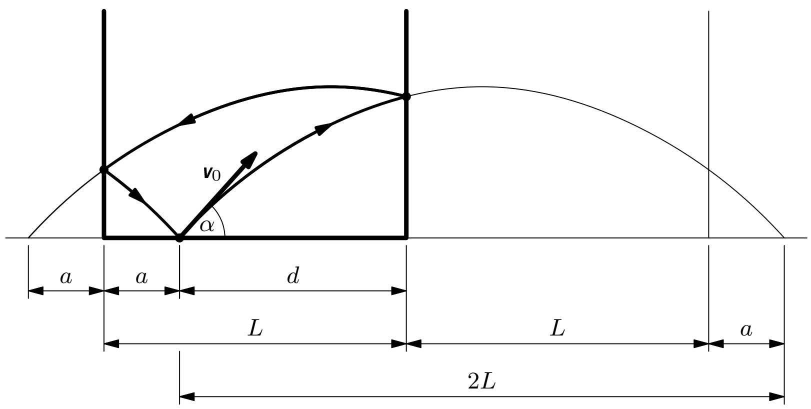


Obr. 5

Řešení

Protože odrazy míčku od stěn jsou dokonale pružné, bude velikost rychlosti před odrazem rovna velikosti rychlosti po odrazu a úhel dopadu bude stejně velký jako úhel odrazu. Oba úhly budou souměrně sdružené podle horizontální roviny procházející bodem dopadu.

Jestliže uplatníme osovou souměrnost podle jednotlivých stěn, můžeme danou úlohu převést na úlohu nalézt velikost rychlosti v_0 tak, aby míček vržený šikmo vzhůru pod daným úhlem α dopadl do roviny podlahy ve vzdálenosti $2L$ od místa vrhu (pokud by tam ovšem nebyla stěna), viz obr. 6.



Obr. 6

Vzdálenost x místa dopadu (ve vodorovném směru) od místa odrazu při vrhu šikmo vzhůru je dána vzorcem

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Dosadíme-li sem $x = 2L$, dostaneme postupně

$$2L = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g},$$

$$2L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha,$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gL}{\sin 2\alpha}}.$$

Výsledek je zajímavý tím, že velikost rychlosti v_0 nezávisí na poloze místa, odkud je míček vržen, ale pouze na tíhovém zrychlení, vzdálenosti stěn L a úhlu α. Vzdálenost d může mít libovolnou hodnotu z intervalu $(0, L)$. Změníme-li místo vrhu, změní se pouze místa, v nichž se míček odrazí od stěn.