Dušan Jedinák

# Dokážeme, že sa nedá

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 82 (2007), No. 1, 54–56

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146188`

# Dokážeme, že sa nedá

*Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave*

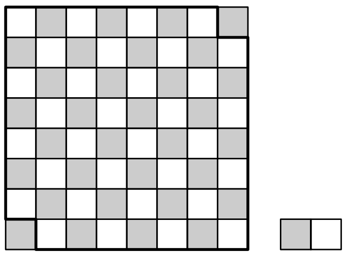
## Význam sporu

Ak máme dokázať nejaké matematické tvrdenie, ktoré by nemalo platiť pre žiadny prvok danej množiny, tak môžeme na to použiť aj metódu, ktorá sa nazýva dôkaz sporom.

Podstatou tejto metódy je táto logicky správna úvaha: Budeme predpokladať, že dané tvrdenie platí pre aspoň jeden prvok danej množiny. Z tohto predpokladu vyvodzujeme logicky správne tvrdenia tak dlho, až kým nedôjdeme k tvrdeniu, ktoré je evidentne neplatné, alebo ktoré je v rozpore s predpokladaným tvrdením. Zrejme sme teda predpokladali to, čo nie je pravdivé. Pravdivé je potom to, čo sme mali pôvodne dokázať.

S touto metódou dôkazu sa žiaci stretnú na strednej škole. Nie je však ťažké pochopiť ju už aj na základnej škole. My by sme v tomto príspevku chceli ukázať niekoľko jednoduchých situácií, ktoré spomínanú metódu využívajú.

**Úloha 1.** Ukážte, že ak zo šachovnice $8 \times 8$ štvorcových políčok odstrihneme dve políčka v protiľahlých kútoch uhlopriečky, tak takúto „vystrihnutú“ šachovnicu nemožno úplne pokryť „dvojpolíčkovými obdĺžnikmi“.



*Riešenie:* Ak si predstavíme striedanie farebných štvorčekov ako na šachovnici pre šachovú hru (striedavo biele a tmavé), uvidíme, že oba vystrihnuté štvorce majú rovnakú farbu. Na „vystrihnutej“ šachovnici je 32 štvorčekov jednej farby a len 30 štvorčekov druhej farby. Pokrývajúce „dvojpolíčkové obdĺžniky“ majú vždy jeden štvorček biely a jeden tmavý. Pri postupnom pokrývaní sa teda vždy pokryje obdĺžnik zložený z dvoch štvorčekov rôznych farieb! To znamená, že spomínaným postupom nemožno súčasne pokryť nerovnaký počet bielych a tmavých štvorčekov.

**Úloha 2.** Ukážte a zdôvodnite, že obidva zlomky $\frac{7n-1}{4}$ a $\frac{5n+3}{12}$ nemajú zároveň kladnú celočíselnú hodnotu pre žiadne prirodzené číslo $n$.

*Riešenie:* Predpokladajme, nech sú spomínané zlomky pre niektoré prirodzené číslo $n$ oba zároveň celé kladné čísla $p$ a $q$:

$$\frac{7n-1}{4} = p \tag{1}$$

$$\frac{5n+3}{12} = q \tag{2}$$

Z (1) vyplýva rovnosť $n = \frac{4p+1}{7}$ a z (2) plynie rovnosť $n = \frac{12q-3}{5}$. Teda má byť

$$\begin{aligned} \frac{4p+1}{7} &= \frac{12q-3}{5} \\ 20p+5 &= 84q-21 \\ 42q &= 10p+13 \end{aligned}$$

To ale znamená, že ľavá strana rovnice je nenulové párne číslo a pravá strana nenulové nepárne číslo. Ich rovnosť je zrejmý spor. Znamená to, že tvrdenie úlohy, ktoré je negáciou nášho predpokladu, je zdôvodnené.

**Úloha 3.** Dokážte, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísiel nemôže byť druhou mocninou žiadného prirodzeného čísla.

*Riešenie:* Súčet druhých mocnín ľubovolných štyroch po sebe idúcich prirodzených čísiel znamená

$$\begin{aligned} &n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = \\ &\quad = 4n^2 + 12n + 14 = 4(n^2+3n+3) + 2, \end{aligned}$$

kde $n$ je prirodzené číslo.

Tento súčet je párny, teda ak by existovalo niektoré príslušné prirodzené číslo $p$ tak, aby $4(n^2+3n+3)+2 = p^2$, muselo by $p$ tiež byť párne, a to ale znamená, že $p^2$ musí byť deliteľné aj štyrmi. Ale súčet $4(n^2+3n+3)+2$ nie je deliteľný štyrmi. Čiže také $p$ neexistuje.

Dokázali sme, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísiel nemôže byť druhou mocninou žiadného prirodzeného čísla.

**Úloha 4.** Dokážte, že neexistuje žiadne prirodzené číslo $n$, pre ktoré by $n^2 + n + 1$ bolo druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

*Riešenie:* Nech existujú také prirodzené čísla $n$, $p$, pre ktoré platí

$$n^2 + n + 1 = p^2.$$

To znamená, že $n + 1 = p^2 - n^2$, $n + 1 = (p - n)(p + n)$. Pretože je ale $p > n \geq 1$, tak $n + p > n + 1$, $p - n \geq 1$, a preto $(p - n)(p + n) > n + 1$, teda neplatí $n + 1 = (p - n)(p + n)$.

Ukázali sme, že zvolený predpoklad existencie prirodzených čísiel s požadovanou vlastnosťou vedie vždy k sporu. Neexistujú preto prirodzené čísla $p$, $n$ také, aby platilo $n^2 + n + 1 = p^2$.

**Úloha 5.** Dokážte, že žiadne číslo $2^n$ pre ľubovolné prirodzené číslo $n$ sa nedá napísať ako súčet aspoň dvoch za sebou idúcich prirodzených čísiel.

*Riešenie:* Predpokladajme, že sa $2^n$ pre isté prirodzené číslo $n$ dá napísať ako súčet $k > 1$ za sebou idúcich prirodzených čísiel, a ukážeme, že potom vznikne spor.

Nech teda je

$$2^n = x + (x + 1) + \cdots + (x + k - 1),$$

kde $x$ je nejaké prirodzené číslo. Odtial je

$$2^n = (x + x + k - 1) \cdot \frac{k}{2}.$$

Na ľavej strane tejto rovnosti je vždy súčin samých dvojok. Posúďme aj pravú stranu.

Ak $k = 2p$ (tj. $k$ je párne číslo), tak pravá strana je $(2x + 2p - 1)p$, kde $2x + 2p - 1$ je číslo nepárne. A to je spor.

Podobne, ak $k = 2p + 1$ (tj. $k$ je nepárne číslo), tak pravá strana má tvar

$$(2x + 2p) \cdot \frac{2p + 1}{2} = (x + p)(2p + 1),$$

kde $2p + 1 > 1$ je nepárne číslo. A to je taktiež spor.

## Účinný metodologický prvok

Dúfajme, že tu uvedené príklady vám ozrejmili myšlienky spomínané v úvode tohto príspevku. Veríme, že oceníte túto metódu aj pri dokazovaní ďalších matematických tvrdení, v ktorých niečo neplatí pre žiadny prvok danej množiny.