Dušan Jedinák

Úlohy riešené vhodným (matematickým) experimentovaním

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 4, 41–43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146221

Úlohy riešené vhodným (matematickým) experimentovaním

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave

Úvod

Jednou z metód riešenia školských matematických úloh je sledovať, robiť prieskum, ako sa prípadné riešenie správa k jednotlivým zmenám premenných či parametrov, ako sa postupne vyvíja príslušná zákonitosť. Takýto postup nazývame experimentovanie, modelovanie skúmanej situácie, objavný prieskum. Pri takýchto simuláciách môžeme vysloviť určitú hypotézu a tú sa potom snažiť dokázať alebo vyvrátiť. Ponúkam niektoré úlohy, ktoré naznačujú spomínaný postup generovania riešenia.

Prehľadné modelovanie problému

Úloha 1. Pre ktoré prirodzené čísla n je číslo $G = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ deliteľné piatimi?

Riešenie: Vyznačme si, ako sa G vytvára pre jednotlivé n:

	1^n	+	2^n	+	3^n	+	4^n	G
$n=1$	1		2		3		4	10
$n=2$	1		4		9		16	30
$n=3$	1		8		27		64	100
$n=4$	1		16		81		256	354
$n=5$	1		32		243		1024	1300
$n=6$	1		64		729		4096	4890
$\vdots$								

Ak si uvedomíme, že v číslach tvaru

2^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 2, 4, 8, 6,

3^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 3, 9, 7, 1,

4^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 4, 6, 4, 6, uznáme, že je na poslednom mieste súčtu $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ pre $n = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, \ldots$ (vynechávali sme násobky štyroch) vždy 0, a to znamená, že číslo G je deliteľné piatimi. Pre $n = 4, 8, 12, 16, \ldots$ sa tak nestane (na konci čísla G bude vždy cifra 4).

To znamená, že číslo $G = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ je deliteľné piatimi pre všetky prirodzené čísla n, ktoré nie sú deliteľné štyrmi.

Úloha 2. (Ktorú ponúkol anglický matematik J. J. Sylvester (1814–1897).) Z dostatočne veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je *najväčšia hodnota*, ktorá *sa nedá* vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?

Riešenie: Generujme systematickú tabuľku hodnôt, ktoré dostávame postupným sčítavaním jednotlivých hodnôt:

	5	10	15	20	25	…
17	22	27	32	37	42	…
34	39	44	49	54	59	…
51	56	61	66	71	76	…
68	73	78	83	88	93	…

Vidíme, že vieme vytvoriť číselné hodnoty

na konci s číslicou 0 pre čísla väčšie alebo rovné 10,

na konci s číslicou 5 pre čísla väčšie alebo rovné 5,

na konci s číslicou 7 pre čísla väčšie alebo rovné 17,

na konci s číslicou 2 pre čísla väčšie alebo rovné 22,

na konci s číslicou 4 pre čísla väčšie alebo rovné 34,

na konci s číslicou 9 pre čísla väčšie alebo rovné 39,

na konci s číslicou 1 pre čísla väčšie alebo rovné 51,

na konci s číslicou 6 pre čísla väčšie alebo rovné 56,

na konci s číslicou 8 pre čísla väčšie alebo rovné 68,

na konci s číslicou 3 pre čísla väčšie alebo rovné 73.

Teda najväčšou hodnotou, ktorá sa nedá z daných hodnôt 5 a 17 ich kombináciou vytvoriť, je 63.

Nielen radosť z experimentovania

Úloha 3. Pre ktoré prirodzené číslo n je $1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + n! = p^2$, kde p je prirodzené číslo?

Riešenie: Kto skúsi postupne dosadzovať, vybadá:

$1! = 1 = 1^2$
$1! + 2! = 3$
$1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$
$1! + 2! + 3! + 4! = 33$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! = 873$

Zadaniu vyhovujú zatiaľ iba $n = 1$, $n = 3$. Zdá sa, že od $n = 4$ je posledná číslica tých jednotlivých súčtov vždy 3. Prečo? Pre $k \geq 5$ už všetky hodnoty $k!$ majú poslednú číslicu nula (je tam vždy súčin $2 \cdot 5$). Ale druhá mocnina žiadneho prirodzeného čísla nikdy nekončí číslicou 3 (pretože $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ atď.). Úlohe vyhovujú len čísla 1 a 3.

Záverečné odporúčanie

Ponúkam prehľad niektorých publikácii, ktoré obsahujú podobné úlohy (aj s náznakmi riešenia a príslušnými výsledkami) na využitie prieskumných postupov pre riešenie školských matematických úloh:

Calda, E.: *Sbírka řešených úloh.* Prometheus, Praha, 2006.
Cirjak, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh.* Essox, Prešov, 2000.
Gregorová, G.: *Zbierka riešených úloh z planimetrie.* Práca, Bratislava, 2000.
Hecht, T., Sklenáriková, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh.* SPN, Bratislava, 1992.
Koman, M.: *Dejte hlavy dohromady a řešte úlohy.* Prometheus, Praha, 1995.
Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice.* UJEP, Ústí nad L., 1999.
Mihalíková, B. a kol.: *Úlohy MO základnej školy.* IUVENTA, Bratislava, 2003.
Odvárko, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh.* SPN, Praha, 1990.
Niederman, D.: *101 hádanek pro náročné.* Portál, Praha, 2006.
Zhouf, J. a kol.: *Matematické příbehy z korespondenčních seminářů.* Prometheus, Praha, 2006.
Zhouf, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky.* Prometheus, Praha, 1997.