Ivo Volf

Bez grafů by bylo řešení úloh asi obtížnější. 2. část

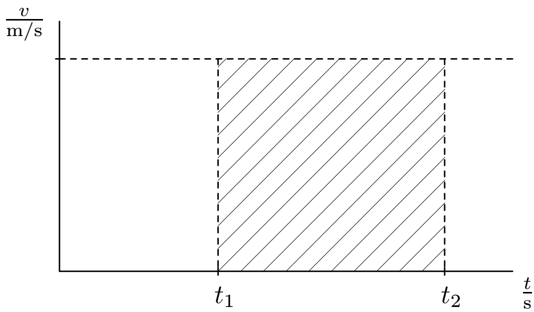
Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 1, 19–23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146227

Bez grafů by bylo řešení úloh asi obtížnější 2. část

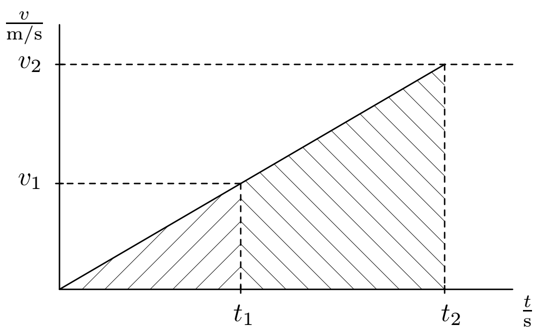
Ivo Volf, PedF UHK Hradec Králové

V grafickém záznamu $v = v(t)$ můžeme pozorovat, že závislost velikosti rychlosti na čase je vyjádřena čarou, při našich zjednodušeních zpravidla úsečkou. Je-li tato úsečka rovnoběžná s osou času (obr. 1), jedná se o pohyb rovnoměrný (rychlost je stálá). Obsah obrazce, kterým je obdélník o stranách délek v a $\Delta t = t_2 - t_1$, tedy $\Delta s = v\Delta t$, je úměrný přírůstku dráhy za dobu Δt. Obsah vyšrafovaného obdélníka na obr. 1 je $v(t_2 - t_1)$.



Obr. 1

Svírá-li tato úsečka s osou času ostrý úhel α, potom hledaným útvarem je trojúhelník nebo lichoběžník (obr. 2). Obsah trojúhelníka je $\frac{1}{2}v_1t_1$, obsah lichoběžníka je $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)$.

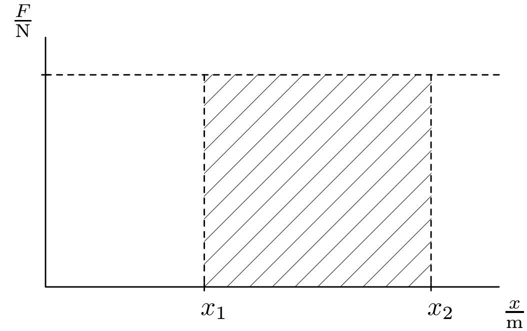


Obr. 2

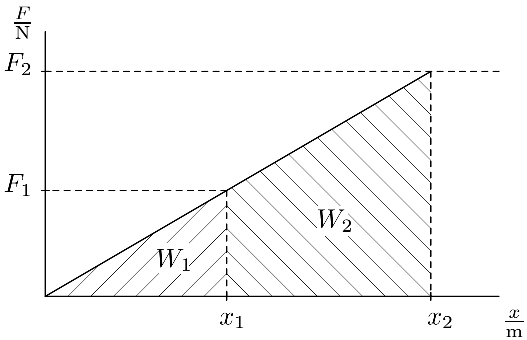
Až se dostanete v matematice k matematické analýze, zjistíte, že příslušný obsah se dá vypočítat postupem zvaným integrování, přičemž proměnná v (velikost rychlosti) je funkcí času t, tedy $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.

Postup, vycházející z grafického znázornění funkce $v = v(t)$, nám umožňuje lépe si zapamatovat užívané vztahy pro výpočet dráhy, popř. si je rychle odvodit.

Obdobně můžeme využít grafického záznamu k výpočtu práce, kterou je třeba vykonat při posouvání tělesa stálou silou F (obr. 3) nebo při natahování pružiny, u které víme, že síla F je lineární funkcí prodloužení x (obr. 4), tj. $F = kx$. Obsah vyšrafovaného obdélníka na obr. 3 je $F(x_2 - x_1)$.



Obr. 3



Obr. 4

Obsah trojúhelníka na obr. 4 je $W_1 = \frac{1}{2}F_1x_1$, obsah lichoběžníka je $W_2 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)(x_2 - x_1)$. Obsah vyšrafovaného trojúhelníka udává práci

$$W_1 = \frac{1}{2}F_1x_1 = \frac{1}{2}kx_1x_1 = \frac{1}{2}kx_1^2,$$

obsah lichoběžníka práci

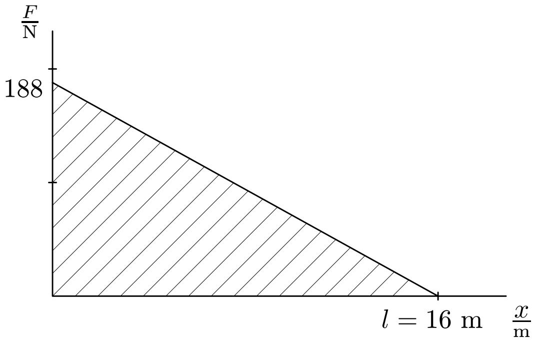
$$W_2 = \frac{1}{2}\,(F_1 + F_2)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}\,k(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2.$$

Tohoto postupu můžeme použít při řešení úloh, u nichž musíme uvažovat proměnnou sílu.

Příklad 1. *Námořník vytahuje lano (1)*
Námořník stojí na palubě a drží v ruce lano o délce $l = 16$ m, jehož 1 m délky má hmotnost 1,2 kg. Jak velkou práci námořník vykoná, než lano vytáhne?

Řešení: Hmotnost lana je $m = 16 \cdot 1{,}2$ kg $= 19{,}2$ kg a námořník ho začne vytahovat silou přibližně $F = 188$ N (volíme-li $g = 9{,}8$ m/s^2). Jak lano vytahuje, zmenšuje se postupně působící síla, až při délce 16 m vytaženého lana bude působit silou 0 N (obr. 5). Práci určíme jako obsah trojúhelníka:

$$W = \tfrac{1}{2}Fl = 1\,504\ \text{J}$$

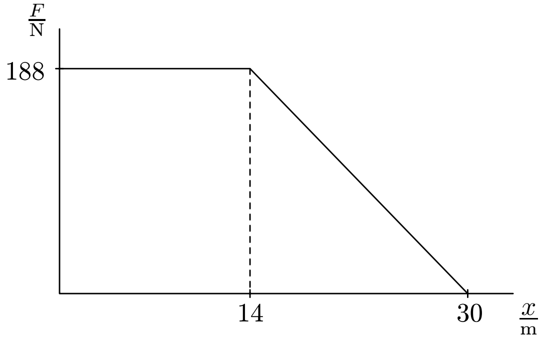


Obr. 5

Příklad 2. *Námořník vytahuje lano (2)*
Námořník stojí na palubě a drží v ruce konec lana o délce 30 m; z toho 16 m lana volně visí a 14 m je stočeno na molu, 1 m délky má hmotnost 1,2 kg. Jak velkou práci vykoná, než lano vytáhne?

Řešení: Hmotnost lana je $m = 36$ kg, ale lano začne zvedat silou 188 N. Poté, co vytáhne 14 m lana na palubu, bude se síla nutná ke zvedání již zmenšovat až k nule. Na prvních 14 m lana působí námořník stálou silou $F = 188$ N, pak se síla lineárně zmenšuje (obr. 6). Celková práce je rovna:

$$W_\text{C} = 188\ \text{N} \cdot 14\ \text{m} + \tfrac{1}{2}\,188\ \text{N} \cdot 16\ \text{m} = 4\,136\ \text{J}$$

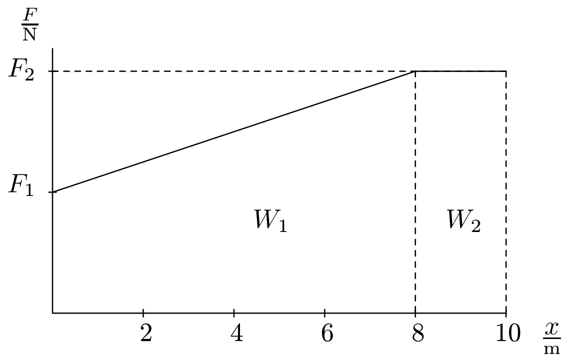


Obr. 6

Příklad 3. *Archeologové vytahují sloup (1)*
Archeologové vytahují sloup z jezera. Sloup stojí na dně, má délku $l = 8$ m, obsah příčného řezu je 0,4 m^2 a je vytesán z pískovce ($\varrho = 2\,400$ kg/m^3), hustota vody je $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000$ kg/m^3. Jak velkou silou působí sloup na lano jeřábu, jestliže na začátku děje je horní podstava právě pod vodou a na konci je pata sloupu $h = 2$ m nad hladinou? Jak velkou práci musí jeřáb vykonat?

Řešení: Sloup má objem $V = 3{,}2$ m^3, hmotnost $m = 7\,680$ kg, lano jeřábu je tedy napínáno silou $F_2 = 75\,260$ N, je-li sloup zcela nad hladinou vody. Ve vodě je vzhledem k hydrostatické vztlakové síle zatížení lana menší o $3{,}2 \cdot 1000 \cdot 9{,}8$ N $= 31\,360$ N. Ve vodě je lano napínáno silou $F_1 = 43\,900$ N. Jak se sloup postupně vynořuje, při zvedání se lano postupně zatěžuje, až poté, co pata sloupu začne vystupovat nad hladinu, se zvětší na koncovou hodnotu (obr. 7). Celková práce je:

$$W_\mathrm{C} = W_1 + W_2 = \tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)l + F_2 h = 476\,640 \text{ J} + 150\,520 \text{ J} = 627\,160 \text{ J}$$

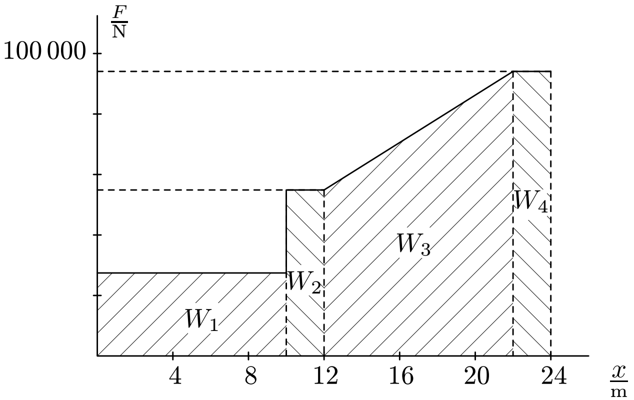


Obr. 7

Příklad 4. *Archeologové vytahují sloup (2)*
Archeologové vytahují sloup z jezera. Sloup leží na vodorovném dně v hloubce 12 m, délka pískovcového ($\varrho = 2\,400$ kg/m^3) sloupu je 10 m, obsah příčného řezu 0,4 m^2, hustota vody je $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000$ kg/m^3. K lanu jeřábu je sloup připevněn za horní patku, takže se nejprve postaví, pak je vytahován svislým směrem, začne se postupně vynořovat, po vynoření je ještě zvednut do výšky 2 m nad hladinu. Jak velkou práci musí jeřáb vykonat?

Řešení: Nejprve určíme síly, jimiž lano působí na sloup. Na konci pohybu je $F_4 = mg$. Jelikož je $m = \varrho V$, $V = 4$ m^3, $m = 9\,600$ kg, je $F_4 = 94\,080$ N. Je-li sloup zcela ve vodě, bude nadnášen hydrostatickou vztlakovou silou 39 200 N, tedy zatížení lana bude $F_2 = 54\,880$ N. Zpočátku se bude sloup zvedat z ležící polohy, protože je opřen patou o dno, a tedy působící síla je jen poloviční, tj. $F_1 = 27\,440$ N. Průběh síly zatěžující lano je na obr. 8. Celkovou práci určíme jako součet prací na jednotlivých úsecích zvedání:

$$W_\mathrm{C} = 27\,440 \cdot 10\ \mathrm{J} + \tfrac{54\,880 + 94\,080}{2} \cdot 10\ \mathrm{J} + 94\,080 \cdot 2\ \mathrm{J} = $$
$$= 847\,194\ \mathrm{J} \approx 847\ \mathrm{kJ}$$



Obr. 8

* * * * *

*Jednou z pozoruhodných vecí na javoch nášho sveta je, s akou neobyčajnou presnosťou mu vládnu matematické zákony.**) (*R. Penrose*)

*) Vybral Dušan Jedinák