7. Závěr

Ve středoškolských učebnicích matematiky jsou většinou uvedeny geometrické úlohy, které vedou na použití geometrické řady, viz také [6]. V článku jsme na problému multiplikačního efektu vládních výdajů, problému věčného důchodu nebo na problému tvorby peněz v bankách ukázali použití nekonečné geometrické řady v ekonomii. Důraz jsme kladli na použití matematických pojmů a získané výsledky jsme z pohledu ekonomie interpretovali až následně.

Literatura

[1] Fuchs, K., Tuleja, P.: *Základy ekonomie.* Ekopress, Praha, 2003.
[2] Holman, R.: *Makroekonomie, středně pokročilý kurz.* Nakl. C. H. Beck, Praha, 2004.
[3] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia, Posloupnosti a řady.* Prometheus, Praha, 1995.
[4] Odvárko, O.: *Posloupnosti a finanční matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť.* Prometheus, Praha, 2002.
[5] Odvárko, O.: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy.* Prometheus, Praha, 2005.
[6] Trojovský, P.: O některých geometrických úlohách vedoucích na geometrickou řadu. *MFI* **5** (2006), 257–267.

O důkazech zajímavých číselných rovností

Jaroslav Švrček, PřF UP Olomouc

Cílem článku je podrobněji seznámit čtenáře s nejpoužívanějšími metodami důkazů výjimečných číselných rovností, které jsou splněny pro speciální (zpravidla iracionální) hodnoty goniometrických funkcí. Takové identity můžeme na sebevýkonnějším počítači pouze otestovat s omezenou přesností. Poznatky získané v tomto článku lze úspěšně využít při hledání nebo dokazování jiných číselných identit uvedeného typu.

Nejpřirozenější cestou, jak dokázat takovou číselnou identitu, je *využití základních goniometrických vzorců* (goniometrických identit). Jedná se především o aplikace součtových formulí (pro dva argumenty) a dále využití jejich důsledků, kterými jsou formule pro dvojnásobný, resp. trojnásobný argument. Uplatníme je při řešení úvodní úlohy.

Příklad 1. Dokažte, že platí

$$\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} 5^\circ.$$

Řešení: K důkazu využijeme dvě goniometrické identity

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} 3\gamma = \frac{\operatorname{tg}\gamma\,(3 - \operatorname{tg}^2\gamma)}{1 - 3\ \operatorname{tg}^2\gamma},$$

které jsou splněny pro všechny přípustné hodnoty argumentů α, β a γ. První z nich je známý součtový vzorec, z něhož snadno odvodíte i druhou identitu, a to na základě rovností $\operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg}(\gamma + \gamma)$ a $\operatorname{tg} 3\gamma = \operatorname{tg}(2\gamma + \gamma)$.

Pomocí těchto vztahů (pro $\alpha = 30^\circ$, $\beta = \gamma = 5^\circ$) a rovnosti $\operatorname{tg}^2 30^\circ = \frac{1}{3}$ upravíme postupně hodnotu L levé strany dané rovnosti. Platí

$$\begin{aligned}
L &= \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = \\
&= \operatorname{tg}(30^\circ + 5^\circ) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - 5^\circ) \cdot \operatorname{tg}(3 \cdot 5^\circ) = \\
&= \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ}{1 + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ\,(3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3\ \operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^2 30^\circ - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ(3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3\ \operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\
&= \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ\,(3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\
&= \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2\ 5^\circ}{3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ(3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \operatorname{tg} 5^\circ.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dané číselné identity ukončen.

Podobným postupem lze dokázat např. také následující tři číselné rovnosti. Pokuste se o to sami.

Cvičení 1. Dokažte, že platí

$$\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = 3\operatorname{tg} 70^\circ, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4, \tag{2}$$

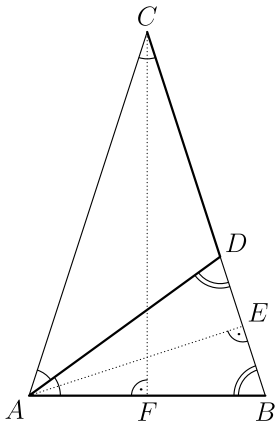
$$2\ \sin 2^\circ + 4\ \sin 4^\circ + 6\ \sin 6^\circ + \cdots + 180\ \sin 180^\circ = 90\ \operatorname{cotg} 1^\circ. \tag{3}$$

Při důkazu další číselné rovnosti využijeme (pro mnohé možná překvapivě) prostředky *syntetické planimetrie.* Danou goniometrickou úlohu přitom převedeme na úlohu z geometrie trojúhelníku.

Příklad 2. Dokažte, že platí

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}.$$

Řešení: Využijeme zde vhodných vztahů, které platí v rovnoramenném trojúhelníku ABC, jehož vnitřní úhly při základně AB mají velikosti 72°, takže úhel při hlavním vrcholu C má velikost 36° (obr. 1). Osa jeho vnitřního úhlu při vrcholu A protíná rameno BC v bodě D, přičemž trojúhelníky ABC a BDA jsou podobné. Všimněme si, že také trojúhelník ACD je rovnoramenný (se základnou AC); platí tudíž $|AB| = |AD| = |CD|$. Označme E střed základny BD v rovnoramenném trojúhelníku ABD.



Obr. 1

Z pravoúhlého trojúhelníku AEC je patrné, že platí

$$\cos 36^\circ = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|BC| - \frac{1}{2}|BD|}{|AC|} = \frac{|AC| - \frac{1}{2}|BD|}{|AC|}.$$

Podobně z pravoúhlého trojúhelníku AFC (F je střed základny AB) máme

$$\cos 72^\circ = \frac{\frac{1}{2}\,|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{1}{2}\,|CD|}{|AC|}.$$

Odtud plyne

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{|AC| - \frac{1}{2}\left(|BD| + |CD|\right)}{|AC|} = \frac{|AC| - \frac{1}{2}|BC|}{|AC|} = $$

$$= \frac{|AC| - \frac{1}{2}|AC|}{|AC|} = \frac{1}{2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení nabízí důkaz pomocí vzorců pro rozdíl kosinů dvou argumentů a pro kosinus dvojnásobného argumentu. Platí

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{2\,(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}{2\,(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} =$$

$$= \frac{2\cos^2 36^\circ - 2\cos^2 72^\circ}{2\,(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{(\cos 72^\circ + 1) - (\cos 144^\circ - 1)}{2\,(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} =$$

$$= \frac{\cos 72^\circ + \cos 36^\circ}{2\,(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{1}{2}.$$

Cvičení 2. Dokažte rovnost

$$\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4}.$$

Poznámka: Na základě výsledků příkladu 2 a cvičení 2 je možno přímo vypočítat

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \qquad \text{a} \qquad \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Uvedené rovnosti lze však odvodit také jiným způsobem. Čísla $\sin 54^\circ$ a $\sin 18^\circ$ jsou totiž kladné kořeny rovnice $16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$, kterou získáme na základě rovností $\cos(5 \cdot 54^\circ) = \cos(5 \cdot 18^\circ) = 0$ ze vzorce pro $\cos 5\alpha$. Detailní výpočet se pokuste provést samostatně.

Další možnou cestou, jak postupovat při důkazech číselných rovností zkoumaného typu, je využití algebraických prostředků, speciálně pak Viètových vzorců, jež udávají vztahy mezi kořeny a koeficienty algebraické rovnice. Poněvadž pro každou algebraickou rovnici n-tého stupně můžeme vypsat až n Viètových vztahů, lze při vhodném použití této metody očekávat současné odvození většího počtu zajímavých rovností. Uvedenou *algebraickou metodu* si ukážeme při řešení další úlohy.

Příklad 3. Dokažte číselné rovnosti

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = \sin 70^\circ, \tag{4}$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}. \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} + \frac{1}{\sin 50^\circ} = \frac{1}{\sin 70^\circ} + 6. \tag{6}$$

Řešení: Označme pro jednoduchost $a = \sin 10^\circ$, $b = \sin 50^\circ$ a $c = \sin 70^\circ$. Naším cílem je tedy dokázat trojici rovností

$$a + b = c\,, \qquad abc = \frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + 6.$$

Předně si uvědomme, že platí

$$\sin(3 \cdot 10^\circ) = \sin(3 \cdot 50^\circ) = -\sin(3 \cdot 70^\circ) = \frac{1}{2}.$$

Přesvědčte se, že vzorec pro sinus trojnásobného argumentu má tvar

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x\,,$$

odkud

$$\sin^3 x - \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x = 0.$$

Reálná čísla a, b a $-c$ jsou proto kořeny kubické rovnice

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0.$$

Podle Viètových vztahů tudíž platí

$$a + b - c = 0, \tag{7}$$

$$ab - bc - ca = -\frac{3}{4}, \tag{8}$$

$$abc = \frac{1}{8}. \tag{9}$$

Ze vztahu (7) bezprostředně plyne identita (4), z rovnosti (9) vyplývá podobně identita (5). Vztah (8) nejprve upravíme na ekvivalentní tvar

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{3}{4abc},$$

odkud po dosazení za abc ze vztahu (9) obdržíme přímo identitu (6).

Tím je důkaz rovností (4)–(6) proveden.

Poznámka: Číselnou identitu (4) lze na rozdíl od vztahů (5) a (6) snadno dokázat také užitím součtového vzorce pro funkci sinus. Podle něho

$$\sin 10^\circ+\sin 50^\circ = 2\sin\frac{10^\circ+50^\circ}{2}\cos\frac{10^\circ-50^\circ}{2}=\cos 20^\circ=\sin 70^\circ.$$

Cvičení 3. Dokažte číselné rovnosti

$$\frac{1}{\cos^2 10^\circ}+\frac{1}{\cos^2 50^\circ}+\frac{1}{\cos^2 70^\circ}=12, \tag{10}$$

$$\frac{1}{\cos^2 20^\circ}+\frac{1}{\cos^2 40^\circ}+\frac{1}{\cos^2 60^\circ}+\frac{1}{\cos^2 80^\circ}=40. \tag{11}$$

Závěrem ukážeme, jak lze při důkazech goniometrických rovností efektivně využít také *vektory.*

Příklad 4. Dokažte, že platí

$$\sin 5^\circ+\cos 13^\circ-\cos 49^\circ-\sin 113^\circ+\sin 149^\circ=0.$$

Řešení: Upravme nejprve levou stranu na součet hodnot pěti sinů. Platí

$$\sin 5^\circ+\cos 13^\circ-\cos 49^\circ-\sin 113^\circ+\sin 149^\circ=$$
$$=\sin 5^\circ+\sin 77^\circ+\sin 221^\circ+\sin 293^\circ+\sin 149^\circ.$$

Reálná čísla $\sin 5^\circ$, $\sin 77^\circ$, $\sin 149^\circ$, $\sin 221^\circ$ a $\sin 293^\circ$ jsou y-ové souřadnice vrcholů pravidelného pětiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice se středem v počátku O kartézské souřadnicové soustavy Oxy, má-li jeden z jeho vrcholů souřadnice $[\cos 5^\circ, \sin 5^\circ]$.

Protože v libovolném pravidelném n-úhelníku ($n \geq 3$) je součet n vektorů, které mají počátek v jeho středu a koncové body po řadě ve všech jeho vrcholech, roven nulovému vektoru*), jsou i součty odpovídajících x-ových i y-ových složek všech těchto vektorů rovny nule. V případě našeho pětiúhelníku tedy platí

$$\sin 5^\circ + \sin 77^\circ + \sin 149^\circ + \sin 221^\circ + \sin 293^\circ = 0$$

a navíc také

$$\cos 5^\circ + \cos 77^\circ + \cos 149^\circ + \cos 221^\circ + \cos 293^\circ = 0.$$

Tím je důkaz ukončen.

Cvičení 4. Dokažte, že platí

$$\cos 11^\circ + \cos 83^\circ + \cos 155^\circ + \cos 227^\circ + \cos 299^\circ = 0.$$

Závěrem uvádíme trojici složitějších číselných identit obsahující speciální hodnoty některých goniometrických funkcí. O jejich důkazy se můžete pokusit nejprve samostatně, v případě nezdaru si prohlédněte návody ke cvičením na straně 40.

Cvičení 5. Dokažte rovnosti

$$\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ + \cdots + \operatorname{tg} 173^\circ + \operatorname{tg} 177^\circ = 45, \tag{12}$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{256}, \tag{13}$$

$$\cos\frac{\pi}{15} \cdot \cos\frac{2\pi}{15} \cdot \cos\frac{3\pi}{15} \cdot \cos\frac{4\pi}{15} \cdot \cos\frac{5\pi}{15} \cdot \cos\frac{6\pi}{15} \cdot \cos\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{128}. \tag{14}$$

*) Otočíme-li kolem počátku každý z n sčítaných vektorů o $\frac{360^\circ}{n}$ ve stejném směru, jejich součet se nezmění (výsledný součtový vektor se přitom rovněž otočí stejným způsobem). Tuto vlastnost má jedině nulový vektor.