Rozhledy matematicko-fyzikální

50. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola kategorií A a B

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 3, 38–47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146259

50. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola kategorií A a B

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.)

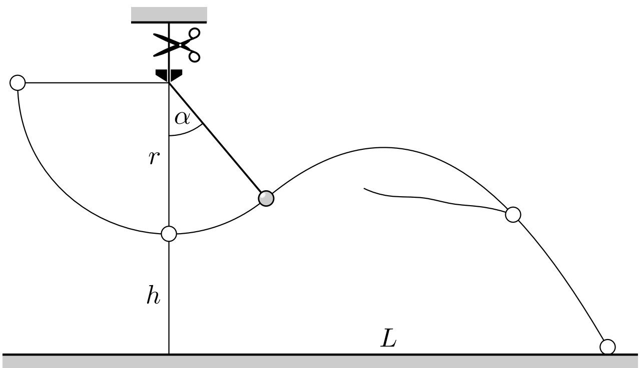
KATEGORIE A

1. Vrh kyvadla

Malá kulička je zavěšena na tenkém neroztažitelném vlákně, které prochází průvlakem (obr. 1). Kuličku s volnou částí vlákna délky $r = 1{,}00$ m vychýlíme do vodorovné polohy a pustíme. Po průchodu kuličky rovnovážnou polohou ve výšce $h = 0{,}80$ m vlákno přestřihneme v okamžiku, kdy se odchýlí od svislého směru o úhel $\alpha = 40°$.

a) Určete vodorovnou vzdálenost L místa dopadu kuličky na podlahu.
b) Určete velikost a směr rychlosti kuličky v okamžiku dopadu.
c) Úlohu a) řešte i pro jiné hodnoty úhlu α. Zjistěte, kdy bude vzdálenost L největší.

Kuličku považujte za hmotný bod, odpor vzduchu zanedbejte. Úloha c) je při použití kalkulačky dosti pracná. Svěřte ji proto počítači, kam do vhodného matematického programu, např. do Excelu, vložíte vzorce odvozené v úloze a).



Obr. 1

2. Soustava závaží na vlákně

Přes dvě malé kladky umístěné ve stejné výšce ve vzájemné vzdálenosti $2d$ je nataženo symetricky vlákno délky $4d$, na jehož koncích jsou zavěšena dvě stejná závaží o hmotnosti m. Třetí takové závaží, které zavěsíme s nulovou počáteční rychlostí do středu vlákna (obr. 2), se začne pohybovat dolů, zatímco postranní závaží začnou stoupat. Předpokládejte, že vlákno je neroztažitelné a dokonale ohebné, jeho hmotnost a hmotnosti kladek jsou zanedbatelné, kladky mají zanedbatelné rozměry a tření v jejich ložiskách je nepatrné, odpor vzduchu je zanedbatelný.

a) Jak se bude měnit celková potenciální energie soustavy v závislosti na hloubce h, do které klesne třetí závaží? Počáteční potenciální energii soustavy volte nulovou.

b) V jaké hloubce h_{m} se třetí závaží zastaví a začne se vracet zpět?

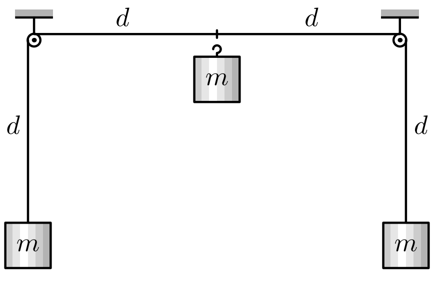
c) Po delší době se pohyb soustavy zastaví a závaží se budou nacházet v rovnovážných polohách. Určete hloubku h_0, ve které bude střed vlákna. Ověřte, že v tomto stavu je potenciální energie soustavy minimální a vypočtěte ji.

d) Jak se změní potenciální energie soustavy, vychýlíme-li třetí závaží nepatrně z rovnovážné polohy ve svislém směru do vzdálenosti $\mathrm{d}h$?

Návod: Jestliže spojitá funkce $f(x)$ má v bodě x_0 první derivaci nulovou a druhou nenulovou, můžeme ji v okolí bodu x_0 aproximovat vztahem

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(\mathrm{d}x)^2.$$

d) Uvolníme-li takto vychýlené třetí závaží, bude soustava konat harmonické kmity. Určete jejich periodu.

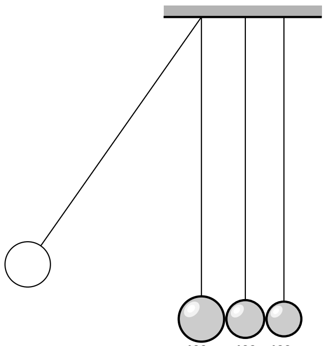


Obr. 2

3. Rázostroj

Krajní koule rázostroje na obr. 3 mají hmotnosti m_1 a m_2, prostřední má hmotnost m. Kouli o hmotnosti m_1 vychýlíme a pustíme. Při návratu do rovnovážné polohy narazí na prostřední kouli o hmotnosti m rychlostí o velikosti v_0 a uvede ji do pohybu. Ta vzápětí narazí do třetí koule o hmotnosti m_2. Oba rázy jsou dokonale pružné.

Označme souřadnice rychlostí levé a prostřední koule po první srážce u_1 a u, souřadnice rychlostí prostřední a pravé koule po druhé srážce w a w_2.



Obr. 3

a) Určete, jakou hmotnost m musí mít prostřední koule, aby při daných hmotnostech m_1 a m_2 byla rychlost pravé koule po druhé srážce co největší.
b) Určete při splnění podmínky a) souřadnice u_1, w a w_2 konečných rychlostí všech koulí po druhé srážce.
c) Určete, jaká část původní kinetické energie levé koule se při splnění podmínky a) přenesla na pravou kouli.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m_1 = 4{,}50$ kg, $m_2 = 2{,}00$ kg, poté pro vzájemně vyměněné hmotnosti m_1 a m_2.

4. Kruhový děj

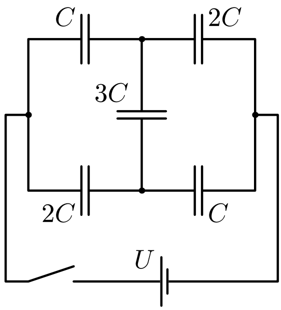
V ideálním plynu s jednoatomovými molekulami, jehož látkové množství je n, probíhá kruhový děj, který se skládá z izochorického zahřátí, izotermické expanze, izochorického ochlazení a izotermické komprese. Při izochorickém ohřátí plyn přijme teplo Q_1 a při izotermické expanzi teplo Q_2. Nejnižší teplota plynu během cyklu je $T_{\min}$. Určete

a) maximální teplotu $T_{\max}$ plynu během děje,

b) teplo odevzdané plynem při izochorickém ochlazení a při izotermické kompresi,
c) celkovou práci plynu při jednom cyklu,
d) teoretickou účinnost tepelného motoru, který by pracoval podle uvedeného cyklu.

5. Soustava kondenzátorů

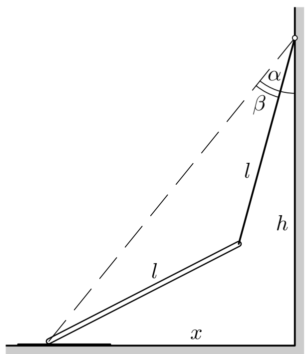
Ke zdroji o svorkovém napětí U připojíme soustavu nenabitých kondenzátorů podle obr. 4.



Obr. 4

a) Jaké napětí vznikne na jednotlivých kondenzátorech po sepnutí spínače?
b) Jaká je celková kapacita soustavy kondenzátorů?

6. *Praktická úloha*:
Měření součinitele smykového tření mezi koncem dřevěné tyče a podložkami z různých materiálů



Obr. 5

Pomůcky:
Dřevěná tyč dlouhá 0,5 m až 1 m, provázek, délkové měřidlo, podložky z různých materiálů (papír, guma, skelný papír aj.)

Provedení úlohy:
Na konec tyče délky l přivážeme provázek stejné délky l a jeho konec připevníme na svislou stěnu do výšky h. Druhý konec tyče položíme na podložku ze zkoumaného materiálu, která leží na podlaze, a podložku zvolna posouváme směrem od stěny. V okamžiku, kdy konec tyče začne klouzat po podložce, změříme jeho vzdálenost x od stěny (obr. 5).

Úkoly:

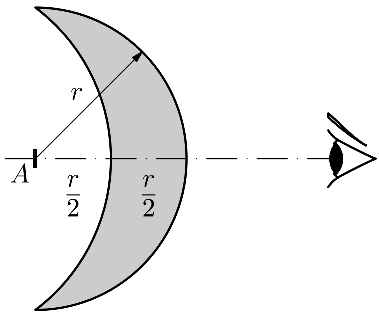
- Úhly α a β vyznačené v obrázku vyjádřete obecně pomocí h a x.
- Dokažte, že součinitel f smykového tření mezi koncem tyče a podložkou můžeme vypočítat pomocí vztahu

$$f = \frac{\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)}{\sin 2\beta - \sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{3\sin 2\beta - \sin 2\alpha}.$$

- Proveďte měření a výpočty pro různé podložky a pro různé výšky bodu upevnění v intervalu $l < h < 2l$. Získané výsledky posuďte.

7. Tlustá spojka

Čočka vyrobená ze skla o indexu lomu $n = 1{,}5$ je omezena polokoulí o poloměru $r = 5{,}0$ cm a vrchlíkem o výšce $r/2$. Do středu kulové plochy o poloměru r umístíme malý předmět a díváme se na něj ve směru optické osy čočky (obr. 6). Kde se nachází obraz předmětu vytvořený čočkou a jaké je jeho příčné zvětšení?



Obr. 6

Před řešením úlohy doporučujeme prostudovat studijní text *J. Trnka: ZOBRAZENÍ ČOČKAMI* (knihovnička FO č. 70)

KATEGORIE B

1. Pohyb střel

Střela vystřelená z děla rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ pod elevačním úhlem α, dopadla na zem za dobu T_1. Potom byla z téhož děla stejně velkou rychlostí vystřelena střela pod elevačním úhlem 2α. Tato střela prolétla nad místem dopadu první střely za dobu $t_2 = 2{,}45\,T_1$ od počátku výstřelu druhé střely. Určete

a) velikosti počátečních rychlostí střel v_0 a elevační úhel α,
b) dobu T_2 (v násobcích T_1), za jakou dopadne na zem druhá střela,
c) vzdálenosti l_1, l_2 od místa výstřelu, kam obě střely dopadnou,
d) vzdálenost $l_{\max}$, kam až může střela nejdále doletět.

Řešte obecně, řešení vždy vyjádřete pomocí doby T_1.

2. Koule v kapalině

Do nádoby nalijeme dvě kapaliny o hustotách ϱ_1 a ϱ_2, které se navzájem nemísí ($\varrho_1 > \varrho_2$).

a) Jak velká musí být hustota ϱ_k materiálu koule, aby do poloviny poloměru (měřeno odspodu koule) byla koule ponořena v kapalině větší hustoty a ostatní část koule v kapalině druhé?
b) Kouli z úlohy a) nyní ponoříme do kapaliny o hustotě ϱ_3, a to tak, že bude opět ponořena do jedné poloviny poloměru. Určete hustotu této kapaliny.

Řešte obecně, výsledky vždy vyjádřete pomocí hustot ϱ_1, ϱ_2. Hustotu vzduchu v části b) zanedbejte.

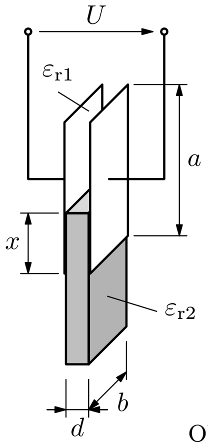
3. Kondenzátor

Vzduchový deskový kondenzátor je tvořen dvěma svislými obdélníkovými deskami o výšce a a šířce b, jejichž vzájemná vzdálenost je d, přičemž $d \ll a$, $d \ll b$. Tento kondenzátor připojíme ke zdroji o svorkovém napětí U.

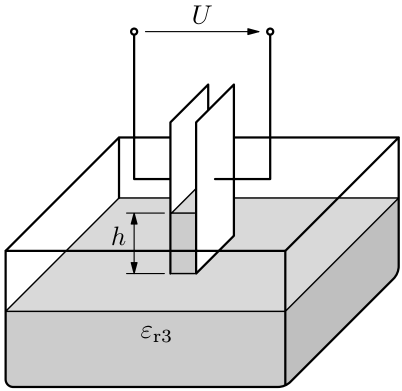
a) Mezi desky kondenzátoru částečně zasuneme ve svislém směru desku ze slídového dielektrika o relativní permitivitě $\varepsilon_{r2} > 1$ (obr. 1). Vypočtěte, jakou silou je mezi desky kondenzátoru vtahována. Tloušťka desky je přesně stejná jako mezera mezi deskami kondenzátoru; zanedbejte vliv nehomogenního pole na okrajích desek.

b) Tentýž kondenzátor umístíme nad nádobu s glycerinem o hustotě ϱ a relativní permitivitě ε_{r3} tak, aby se dolní okraje desek dotýkaly hladiny, a opět jej připojíme ke zdroji napětí. Určete, do jaké výšky h vystoupí hladina mezi deskami (obr. 2). Výška hladiny v nádobě se prakticky nezmění. Kapilární jevy zanedbejte.
c) Vyjádřete kapacitu kondenzátoru jako funkci napětí mezi deskami.
d) Určete hodnotu napětí, při kterém glycerin vystoupí až do výšky horních hran desek kondenzátoru.

Řešte nejprve obecně, potom úlohy b) a d) pro hodnoty $a = 20$ mm, $b = 30$ mm, $d = 3$ mm, $U = 2$ kV, $\varepsilon_{r2} = 6$, $\varepsilon_{r3} = 43$, $\varrho = 1\,260\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Relativní permitivita vzduchu $\varepsilon_{r1} \doteq 1$.



Obr. 1



Obr. 2

4. Poskoky

Ocelová kulička uvolněná ve výši $h_0 = 1$ m nad vodorovnou ocelovou deskou poskakovala až do úplného zastavení. Celý děj, při kterém můžeme odpor vzduchu prakticky zanedbat, proběhl za dobu $t = 8{,}0$ s.

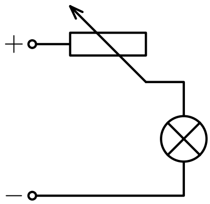
a) Po každém odrazu byla rychlost kuličky menší než těsně před odrazem. Určete poměr jejich velikostí k – *koeficient restituce* – za předpokladu, že je konstantní.
b) Kolik procent mechanické energie ztratila kulička při každém odrazu?
c) Jakou celkovou dráhu kulička proletěla?
d) Sestrojte graf závislosti okamžité výšky kuličky na čase během prvních deseti poskoků. Vyznačte přesně časy odrazů kuličky od desky a vrcholy jednotlivých úseků grafu. Zbytek dokreslete přibližně.

5. Regulace

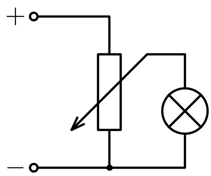
Žárovka s jmenovitým příkonem P_1 a jmenovitým napětím U_1 má být napájena stejnosměrným zdrojem o elektromotorickém napětí U_e ($U_\mathrm{e} > U_1$) a se zanedbatelným vnitřním odporem. K regulaci napětí použijeme reostat o celkovém odporu R_0.

a) Reostat připojíme k žárovce sériově (obr. 3). Určete odpor R části reostatu, kterou prochází proud, a účinnost elektrického obvodu.
b) Reostat připojíme jako potenciometr (obr. 4). Určete odpor R té části reostatu, z níž snímáme napětí pro žárovku, a účinnost elektrického obvodu.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $P_1 = 12{,}0$ W, $U_1 = 6{,}0$ V, $U_\mathrm{e} = 18{,}0$ V, $R_0 = 20\ \Omega$.



Obr. 3



Obr. 4

6. *Praktická úloha*:
Studium rezonance v obvodu s proměnnou indukčností

Pomůcky: Jádro rozkladného transformátoru s cívkou 1 200 závitů, kondenzátor s jmenovitou kapacitou 8 μF, zdroj střídavého proudu o frekvenci 50 Hz a svorkovém napětí 5 V, ampérmetr, 3 voltmetry, papírové měřítko.

Teorie: V obvodu střídavého proudu nízké frekvence můžeme kondenzátor považovat za ideální a jeho impedance je rovna kapacitní reaktanci:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} \tag{1}$$

Cívka se chová jako sériové spojení ideální cívky o indukčnosti L a rezistoru o rezistanci R. Její impedance má velikost:

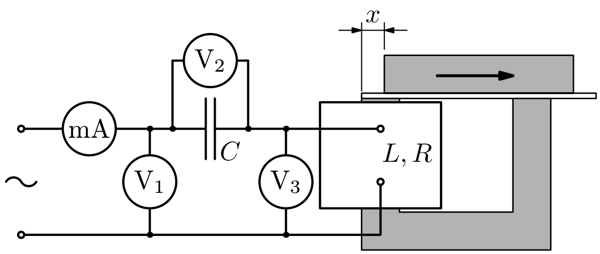
$$Z_{LR} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega}\sqrt{Z_{LR}^2 - R^2} \tag{2}$$

Celková impedance sériového spojení kondenzátoru a cívky je

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Budeme-li měnit indukčnost cívky změnou jejího jádra v sériovém obvodu s kondenzátorem a cívkou, bude mít celková impedance minimální hodnotu $Z_{\min} = R$ a obvodem bude procházet maximální proud, jestliže:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C} \tag{3}$$



Obr. 5

Úkol:

a) Sestavte obvod podle obr. 5. Na U jádro nasaďte cívku a pak na ně připevněte proužek silnějšího papíru opatřený milimetrovým měřítkem. Na něj položte rovné příčné jádro, postupně jej posouvejte doprava podle obrázku a sledujte, jak se v závislosti na posunutí x mění údaj miliampérmetru. Při určité poloze rovného jádra dosáhne proud v obvodu výrazného maxima, nastane *sériová rezonance*. Tuto polohu můžeme vhodně upravit změnou tloušťky papírového proužku, který vytváří dvě mezery v ocelovém jádře cívky. Pak přistoupíme k vlastnímu měření.

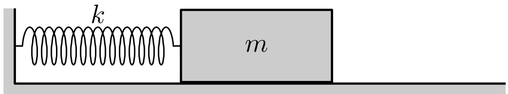
b) Na počátku nechť je jádro celé uzavřeno, tj. $x = 0$. Při každém posunutí o 2 mm zapište údaje miliampérmetru a všech tří voltmetrů do tabulky. V okolí rezonance postupujte po 1 mm.

c) Pro každou hodnotu x vypočítejte a zapište do tabulky
   celkovou impedanci obvodu $Z = U/I$,
   kapacitní reaktanci kondenzátoru $X_C = U_C/I$ a
   impedanci cívky $Z_{LR} = U_{LR}/I$.

d) Sestrojte grafy znázorňující závislost proudu I v obvodu a veličin Z, X_C a Z_{LR} na posunutí x.
e) Ověřte, že kapacitní reaktance kondenzátoru je během měření konstantní. Z aritmetického průměru naměřených hodnot určete skutečnou kapacitu kondenzátoru.
f) Užitím vztahu (3) vypočítejte indukčnost cívky při rezonanci.
g) Z tabulky a grafů určete minimální celkovou impedanci obvodu $Z_{\min} = R$ a impedanci Z_{LR} při rezonanci. Určete indukčnost cívky užitím vztahu (2). Oba výsledky porovnejte.
h) Porovnejte rezistanci R cívky s jejím odporem v obvodu stejnosměrného proudu R_{ss} změřeným pomocí ohmmetru.

7. Klouzání kvádru

Na vodorovné desce leží kvádr (obr. 6) o hmotnosti m. Ke středu jeho boční stěny je připevněna pružina o tuhosti k a zanedbatelné hmotnosti. Druhý konec pružiny je připevněn ke stěně tak, že podélná osa pružiny je vodorovná a prochází těžištěm kvádru. Pružina není napnutá. Zvolme osu x totožnou s osou pružiny s počátkem v těžišti kvádru a orientovanou směrem od pružiny.



Obr. 6

Kvádr vychýlíme ve směru osy x tak, že souřadnice jeho těžiště bude x_1. Po uvolnění se kvádr uvede do pohybu a vlivem tření se zastaví v místě, kde souřadnice jeho těžiště je x_2 $(0 < x_2 < x_1)$, a zůstane v klidu.

a) Určete součinitel f smykového tření mezi kvádrem a deskou.
b) Určete velikost $v_{\max}$ maximální rychlosti, které kvádr při pohybu dosáhne.
c) Určete dobu t pohybu kvádru.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m = 0{,}60$ kg, $k = 35\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $x_1 = 0{,}090$ m, $x_2 = 0{,}020$ m.