Rozhledy matematicko-fyzikální

Roberto Marcial Najáres Romero

Geometrický důkaz zobecněné Pythagorovy věty

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 3, 48–53

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146260`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

Geometrický důkaz zobecněné Pythagorovy věty

Roberto Marcial Nájares Romero, Gymnázium Nad Kavalírkou, Praha

Pythagorova věta

Pythagorova věta je probírána na druhém stupni základní školy. Jedno z možných znění této věty je: *V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce sestrojeného nad přeponou roven součtu obsahů obou čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami.* Algebraické důkazy jak klasické Pythagorovy věty, tak i její zobecnění lze najít v literatuře i na internetu. Geometrických důkazů klasické Pythagorovy věty, jak pomocí tzv. appletů, tak i bez nich, lze rovněž najít celou řadu.

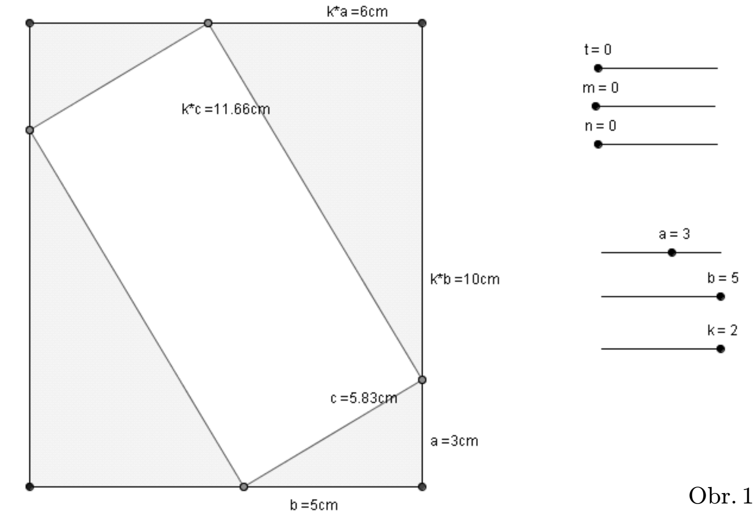
Čtverce lze ve formulaci Pythagorovy věty zaměnit jakýmikoliv jinými geometrickými útvary (polokružnicemi, obdélníky, trojúhelníky atd.) za předpokladu, že jsou navzájem podobné a jejich rozměry jsou úměrné délce příslušné strany trojúhelníku.

Účelem článku je ukázat geometrický důkaz zobecnění Pythagorovy věty na libovolné pravidelné n-úhelníky sestrojené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku pomocí appletu vytvořeného v programu GeoGebra. GeoGebra je matematický program (freeware), který spojuje geometrii a výpočty; byl vyvinut v Rakousku Markusem Hohenwartrem a existuje již v třiceti jazykových verzích, včetně české.

Obdélníky nad stranami pravoúhlého trojúhelníku

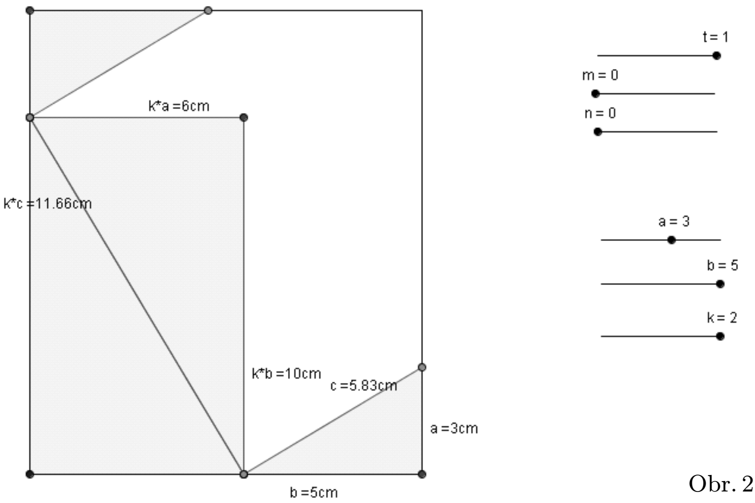
Máme-li libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC a nad přeponou c sestrojíme obdélník o rozměrech c, kc a nad odvěsnami a a b sestrojíme po řadě obdélníky o rozměrech a, ka a b, kb, kde k je libovolné kladné reálné číslo, dokážeme, že obsah obdélníku nad přeponou je roven součtu obsahů obou obdélníků nad oběma odvěsnami.

Ke geometrickému důkazu tohoto tvrzení sestrojíme obdélník o rozměrech $ka+b$ a $kb+a$ (obr. 1). Povšimněme si prostředního čtyřúhelníku (není těžké se přesvědčit z podobnosti trojúhelníků, že se jedná o obdélník), který má rozměry c a kc. Tedy jeho obsah je kc^2. Náš původní obdélník je rozdělen na čtyři trojúhelníky a právě uvedený prostřední obdélník. Rozměry trojúhelníků jsou vidět na obr. 1.



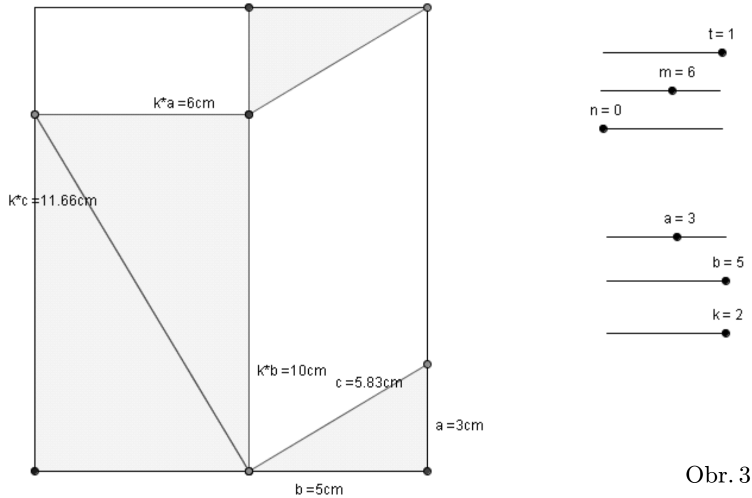
Obr. 1

Nyní budeme postupně posouvat trojúhelníky. Nejdříve trojúhelník z horního pravého rohu posuneme, dokud se nebude dotýkat, ale nepřekrývat s dolním levým trojúhelníkem (obr. 2).

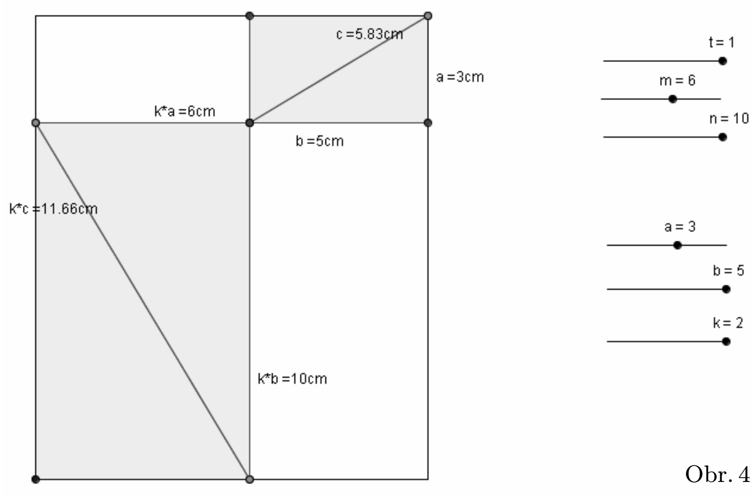


Obr. 2

Pak posuneme horní levý a dolní pravý trojúhelník do pozice, jak ukazují obr. 3 a obr. 4. Všechny tyto pohyby se ovládají v appletu pomocí posuvníků označených t, m a n.



Obr. 3



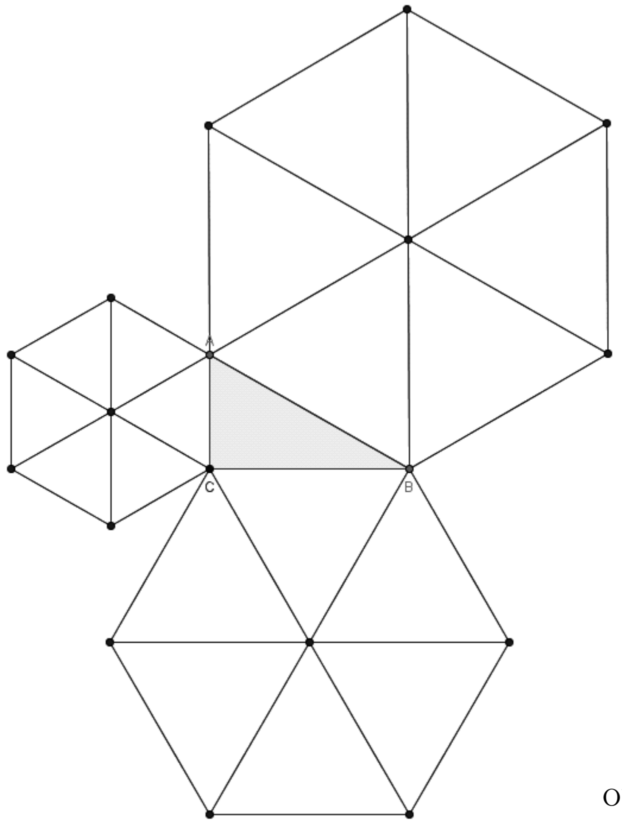
Obr. 4

Všimněte si opět bílé části obdélníku; jsou to dva obdélníky o rozměrech a, ka a b, kb, obsah prvního je ka^2 a obsah druhého kb^2. Proto platí, že $kc^2 = ka^2 + kb^2$, a to jsme chtěli ověřit. Pokud v našem appletu zvolíme $k = 1$, dostaneme speciálně geometrický důkaz Pythagorovy věty.

Pravidelné n-úhelníky nad stranami pravoúhlého trojúhelníku

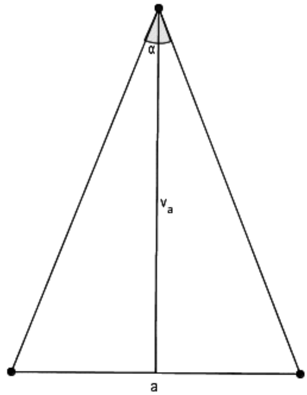
Nyní ukážeme, jak z předchozího tvrzení dostaneme geometrický důkaz Pythagorovy věty zobecněný na libovolné pravidelné n-úhelníky sestrojené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku.

Mějme libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou c. Sestrojíme nad příslušnou stranou trojúhelníku pravidelný n-úhelník se stranou délky a (b, c). Každý z těchto n-úhelníků rozdělme na n rovnoramenných trojúhelníků se základnou délky a (b, c). Na obr. 5 je situace pro $n = 6$.



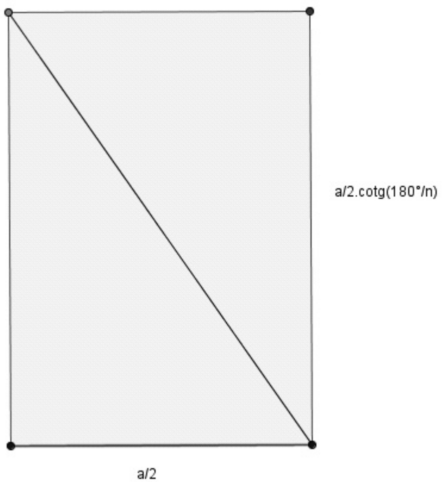
Obr. 5

Nyní uvažujme rovnoramenné trojúhelníky sestrojené nad každou stranou pravoúhlého trojúhelníka. Označíme-li S_a, S_b, S_c obsahy pravidelných n-úhelníků, pak jsou obsahy příslušných trojúhelníků S_a/n, S_b/n, S_c/n. Předpokládejme, že máme dokázanou Pythagorovu větu pro naše trojúhelníky, tzn. $\frac{S_c}{n} = \frac{S_a}{n} + \frac{S_b}{n}$. Pak rovněž platí $S_c = S_a + S_b$. Proto poté stačí dokázat, že Pythagorova věta platí pro naše uvažované rovnoramenné trojúhelníky.



Obr. 6

Rozdělíme trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky (obr. 6) a složíme z nich obdélník o rozměrech $a/2$ a v_a (kde v_a je výška trojúhelníka ke straně a). Jak snadno zjistíme, $\alpha = 360°/n$ a výška v_a půlí tento úhel, proto $\operatorname{cotg}(180°/n) = v_a/(a/2)$, tedy $v_a = (a/2)\operatorname{cotg}(180°/n)$.



Obr. 7

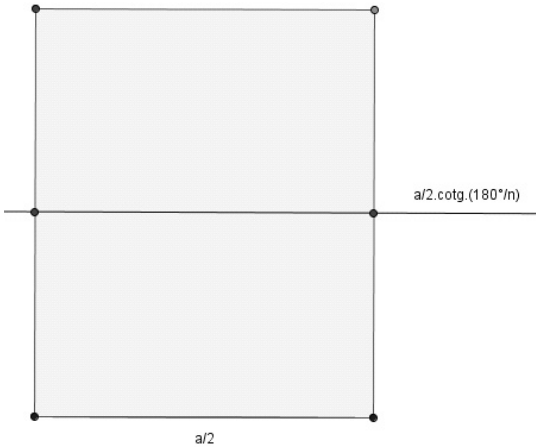
Obdobně pro další strany dostaneme obdélníky o rozměrech $b/2$, $(b/2)\operatorname{cotg}(180°/n)$ a $c/2$, $(c/2)\operatorname{cotg}(180°/n)$. Obsahy těchto obdélníků jsou (obr. 7)

$$\frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n},\qquad \frac{b^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n},\qquad \frac{c^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Rozpůlíme vodorovnou přímkou tyto obdélníky (obr. 8) a sestavíme obdélníky o rozměrech a a $(a/4)\operatorname{cotg}(180^\circ/n)$, b a $(b/4)\operatorname{cotg}(180^\circ/n)$, c a $(c/4)\operatorname{cotg}(180^\circ/n)$. Nyní stačí položit

$$k = \frac{1}{4}\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n}$$

a použít naše předchozí tvrzení. Číslo k je kladné, neboť $n \geq 3$ a $180^\circ/n \leq 180^\circ/3 = 60^\circ$ a hodnoty kotangens ostrého úhlu jsou kladné.



Obr. 8

Poté nakonec dostaneme

$$\frac{c^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n} + \frac{b^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Z postupu vidíme, že obsah posledního obdélníku je stejný jako obsah uvažovaného trojúhelníku, což jsme chtěli dokázat. Tím je zobecněná Pythagorova věta dokázána pro libovolné pravidelné n-úhelníky sestrojené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku.

Poznámka: Applet, o kterém se mluví v tomto článku, je možné spustit či stáhnout na stránce `http://www.rmaster.wz.cz` v odkazu Blog > Geometrický důkaz zobecněné Pythagorovy věty – java applet.