Filip Křížek; Michal Křížek

Astronomický ciferník pražského orloje

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 1, 1–6

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146393`

Astronomický ciferník pražského orloje

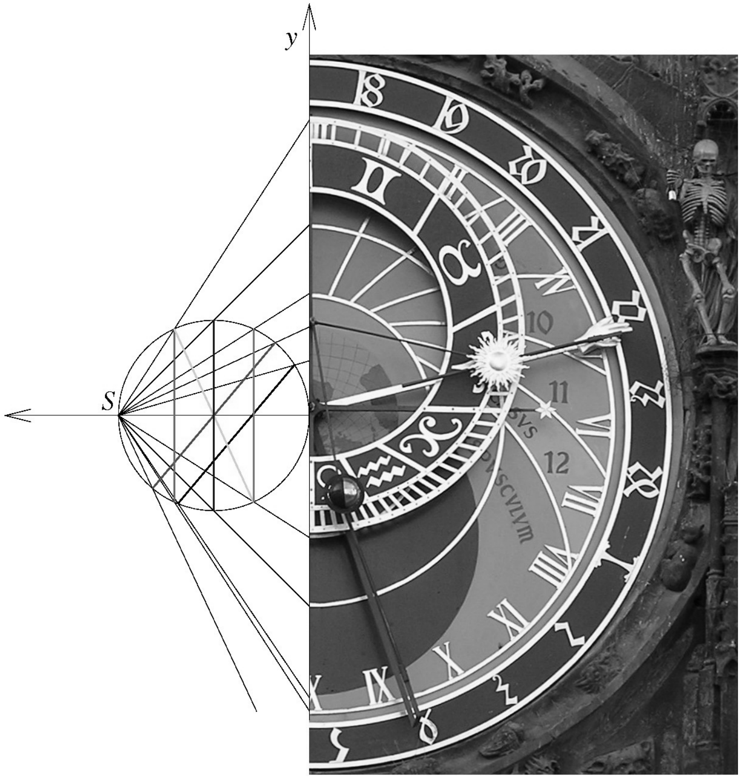
Filip Křížek, Michal Křížek, Praha

Abstract. In the article, we will show that under stereographic projection a great circle lying on the surface of the sphere and not passing through the centre of the projection is mapped into a circle. We will determine the radius of this circle and the coordinates of its centre. Then, we will use the obtained results to design astronomical dials of astronomical clocks in different geographical latitudes.

Úvod

Orloj na Staroměstském náměstí v Praze vznikl roku 1410, tj. ještě před husitskými válkami, a v roce 2010 mu bylo 600 let. Jeho astronomický ciferník znázorňuje geocentrický model vesmíru s nehybnou Zemí uprostřed, kolem níž obíhají Slunce, Měsíc a znamení zvěrokruhu nebeské sféry. Při návrhu ciferníku byla použita stereografická projekce, jejíž vlastnosti popsal již řecký matematik a astronom *Klaudios Ptolemaios* (cca 90–160 n. l.). Promítá se ze severního pólu S nebeské sféry (obr. 1) na rovinu tečnou v jižním pólu. V tomto článku popíšeme, jak navrhnout astronomický ciferník v různých zeměpisných šířkách.

Na nebeské sféře je 6 významných kružnic: nebeský rovník, obratníky Raka a Kozoroha, ekliptika (dráha Slunce), horizont (tzv. obzorníková kružnice) a kružnice ohraničující oblast astronomické noci, kdy je Slunce 18° pod obzorem. Horizont je průsečnice nebeské sféry s horizontální rovinou procházející stanovištěm pozorovatele, který je uprostřed nebeské sféry. Na obr. 1 je schematicky znázorněno, kam se jednotlivé kružnice zobrazují při stereografické projekci na astronomický ciferník. Jejich obrazy se nazývají stejně, tj. kružnice, u níž jsou na obr. 1 římské číslice, se nazývá obratník Raka, zatímco nejmenší soustředná kružnice se nazývá obratník Kozoroha. Mezi těmito kružnicemi je umístěna další soustředná kružnice představující nebeský rovník. Ekliptika je vnější kružnice prstence se znameními zvěrokruhu, která se dotýká obou obratníků. Kruhový oblouk horizontu, který odpovídá západu (východu) Slunce, je na obr. 1 označen číslem 12. Poslední významná kružnice ohraničuje černě vybarvenou oblast astronomické noci. Vzory těchto šesti kružnic najdeme na obr. 1 vlevo.



Obr. 1. Stereografická projekce šesti základních kružnic nebeské sféry na astronomický ciferník pražského orloje (vlevo bokorys v rovině yz a vpravo půdorys v rovině xy). Střed promítání je v severním pólu S nebeské sféry.

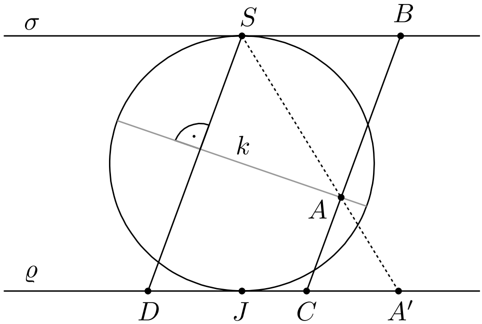
Důležitá vlastnost stereografické projekce

Uvažujme kulovou sféru představující nebeskou sféru a na ní střed promítání S. Nechť J je protější bod (odpovídající jižnímu pólu) a nechť ϱ je rovina tečná v bodě J. Při stereografické projekci se bod A kulové plochy zobrazí na bod A', který je průsečíkem přímky SA s rovinou ϱ (obr. 2). Následující věta udává velice překvapivou a důležitou vlastnost stereografické projekce.

Věta (Ptolemaiova). *Kružnice ležící na kulové ploše a neprocházející středem promítání S se při stereografické projekci zobrazí opět na kružnici.*

V důkazu Ptolemaiovy věty je v řadě prací (např. [1, s. 363], [3, s. 341], [4, s. 533]) opomenut důležitý případ, kdy kružnice je hlavní. Připomeňme, že *hlavní kružnice* na kulové ploše je taková kružnice, jejíž střed leží ve středu této plochy. Např. rovník, ekliptika či horizont jsou příklady hlavních kružnic na nebeské sféře (obr. 1). V dalším si proto uvedeme jednoduchý geometrický důkaz tohoto případu. Důkaz opírající se o analytickou geometrii lze najít v [2], jiný důkaz založený na pojmu limity je v [6].

Důkaz: Nechť tedy k je hlavní kružnice kulové plochy a nechť $A \in k$ je její libovolný bod. Označme σ rovinu tečnou ke kulové ploše v bodě S. Uvažujme dále kolmici vedenou ze středu promítání S na rovinu kružnice k. Její průsečík s rovinou ϱ označme D (obr. 2).



Obr. 2. Stereografická projekce hlavní kružnice k z bodu S.

Nyní dokážeme, že kružnice k se při stereografické projekci zobrazí na kružnici $k' \subset \varrho$ o středu D a poloměru $|SD|$.

Bodem A veďme tečnu ke kulové ploše rovnoběžnou s SD a označme $B \in \sigma$ a $C \in \varrho$ její průsečíky s rovinami σ a ϱ. Protože všechny tečny z bodu B ke kulové ploše jsou stejně dlouhé a protože $SBCD$ je rovnoběžník, platí

$$|AB| = |SB| = |CD|. \tag{1}$$

Odtud a z podobnosti trojúhelníků ABS a ACA' zjistíme, že

$$|AC| = |A'C|, \tag{2}$$

kde A' je sterografická projekce bodu A. Z (1) a (2) můžeme tedy vyjádřit vzdálenost

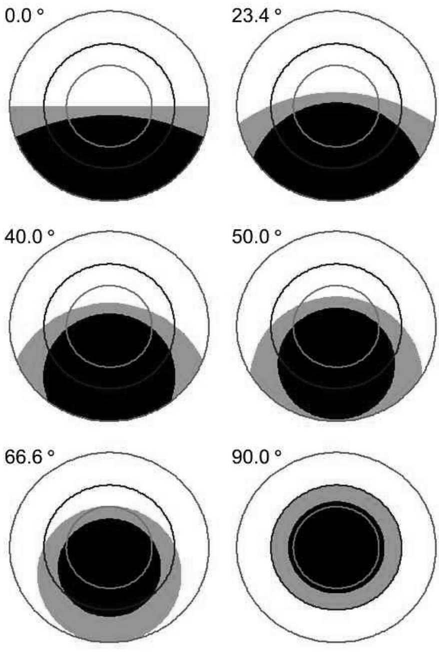
$$|A'D| = |A'C| + |CD| = |AC| + |AB| = |BC| = |SD| \tag{3}$$

nezávisle na volbě bodu A. (Všimněte si, že všechny úsečky ve vztahu (3) leží v rovině rovnoběžníku $SBCD$.) Odtud plyne, že hlavní kružnice k se zobrazí do roviny ϱ na kružnici k' o středu D a poloměru $|A'D| = |SD|$.

Případ vedlejší kružnice je podrobně dokázán např. v [6].

Příklad aplikace

Použití Ptolemaiovy věty budeme demonstrovat na úloze, jak by vypadal astronomický ciferník orloje v různých zeměpisných šířkách. Poloha nebeského rovníku a obou obratníků se nemění (srov. obr. 3). Ekliptiku, která se také nemění, nebudeme pro jednoduchost zakreslovat. Mění se však středy a poloměry zbývajících dvou kružnic – horizontu a kružnice ohraničující oblast astronomické noci.



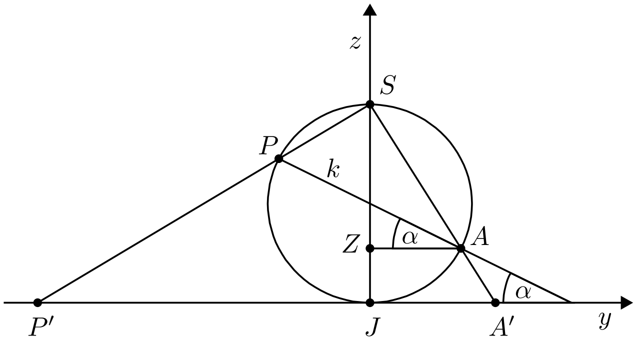
Obr. 3. Poloha horizontu a oblasti astronomické noci pro různé zeměpisné šířky.

Nyní si podrobně odvodíme, jak se konkrétně mění poloměr horizontu a jeho středu v závislosti na sklonu horizontu k projekční rovině. Na astronomickém ciferníku zaveďme standardní kartézské souřadnice x, y

se středem v bodě J. Uvažujme dále rovinu yz kolmou na vodorovnou osu x (srov. obr. 1 a 4). Počátek souřadnic v rovině yz je tedy v bodě $J = (0, 0)$ a nechť střed promítání je $S = (0, 2)$, tj. bez újmy na obecnosti předpokládáme, že kulová plocha má poloměr 1. Bod $A = (y, z) \neq S$ na kulové ploše se při stereografické projekci zobrazí na bod

$$A' = (y', 0) = \Big(\frac{2y}{2-z}, 0\Big), \tag{4}$$

jak snadno zjistíme z podobnosti trojúhelníků $A'JS$ a AZS pomocí poměru délek jejich odvěsen $y' : 2 = y : (2 - z)$.



Obr. 4. Stereografická projekce hlavní kružnice k představující horizont.

Hlavní kružnici odpovídající horizontu nebeské sféry označme k. Její rovina je rovnoběžná s osou x a nechť sklon této roviny k projekční rovině xy je $\alpha < 90°$. Pak

$$A = (\cos\alpha, 1 - \sin\alpha)$$

je nejbližší bod kružnice k od roviny xy (pro $\alpha = 0°$ není jediný). Vidíme, že

$$P = (-\cos\alpha, 1 + \sin\alpha)$$

je protější bod na kružnici k vzhledem k A, a úsečka AP je tudíž průměrem k. Podle (4) dostaneme

$$A' = \Big(\frac{2\cos\alpha}{1+\sin\alpha}, 0\Big) \quad \text{a} \quad P' = \Big(\frac{-2\cos\alpha}{1-\sin\alpha}, 0\Big).$$

Odpovídající kružnice k' v projekční rovině má tedy pro $0° \leq \alpha < 90°$ poloměr

$$r' = \frac{1}{2}|A'P'| = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}. \tag{5}$$

Střed kružnice k' se nalézá uprostřed úsečky $A'P'$, tj. v bodě $\frac{1}{2}(A'+P')$. Souřadnice středu k' v projekční rovině xy pak jsou $(0, s')$, kde

$$s' = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}. \tag{6}$$

Na obr. 3 vidíme, jak se mění horizont v různých zeměpisných šířkách podle vztahů (5) a (6). Pro zajímavost je zde černě zakreslena i oblast astronomické noci (pro ni jsou příslušné vztahy odvozeny v [5]). Součet sklonu horizontu α a severní šířky pozorovatele je roven $90°$. V Praze je tedy sklon horizontu $90° - 50° = 40°$. Na obr. 3 si povšimněte, že na rovníku, který odpovídá limitnímu sklonu $\alpha = 90°$, horizont degeneruje na přímku. Kružnice ležící na kulové ploše a procházející středem promítání S se totiž při stereografické projekci zobrazí na přímku (důkaz je v [6]). Z obr. 3 je dále patrno, že na polárním kruhu se horizont dotýká obratníků Raka i Kozoroha. U orloje na severním pólu by horizont dokonce splýval s nebeským rovníkem.

Literatura

[1] Čeněk, G., Medek, V.: *Deskriptívna geometria.* SVTL, Bratislava, 1959.

[2] Hadravová, A., Hadrava, P.: *Křišťan z Prachatic: Stavba a užití astrolábu.* Filosofia – nakl. Filosofického ústavu AV ČR, Praha, 2001.

[3] Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J.: *Deskriptivní geometrie I.* Nakl. Československé akademie věd, Praha, 1954; vydala též JČMF nákladem Přírodovědeckého nakl. v Praze, 1950 (3. vydání).

[4] Kounovský, J., Vyčichlo, F.: *Deskriptivní geometrie.* Nakl. Československé akademie věd, Praha, 1959.

[5] Křížek, M., Křížek, P.: Kružnice na astronomickém ciferníku pražského orloje. *Matematika–fyzika–informatika* **19** (2010), s. 577–586.

[6] Křížek, M., Šolc, J., Šolcová, A.: Pražský orloj a stereografická projekce. *Matematika–fyzika–informatika* **17** (2007), s. 129–139.