Rozhledy matematicko-fyzikální

Martin Panák
4. Středoevropská matematická olympiáda

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 1, 47–51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146405

Problém 6. Je dána posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kladných reálných čísel. Nechť s je celé kladné číslo takové, že pro všechna $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} | 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dokažte, že pak existují kladná celá čísla N a ℓ ($\ell \leq s$) taková, že $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ pro všechna $n \geq N$.

4. Středoevropská matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Čtvrtá středoevropská matematická olympiáda (Middle European Mathematical Olympiad, MEMO) se uskutečnila 9.–15. 9. 2010 v obci Strečno na Slovensku za účasti šedesáti studentů z deseti zemí středoevropského regionu, jmenovitě z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska. Soutěž je určená pro studenty středních škol, kteří se v daném kalendářním roce neúčastnili mezinárodní matematické olympiády (IMO) a díky svému věku ještě stále mají šanci se zúčastnit IMO v roce příštím. Výjimku tvoří slovinští účastníci, kteří vzhledem k relativně malému počtu obyvatel země nejsou limitovaní předchozí účastí na IMO.

České družstvo tvořili *Michael Bílý* z Gymnázia Klatovy, *Martin Bucháček* z Gymnázia Luďka Pika v Plzni, *Filip Hlásek* z Gymnázia Plzeň, Mikulášské náměstí, *Martin Töpfer* z Gymnázia Nad Štolou v Praze, *Jakub Solovský* z Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci a *Lukáš Zavřel* z Gymnázia Praha 9 na Chodovické. Vedoucím družstva byl *dr. Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak *dr. Pavel Calábek* z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Všechny týmy byly ubytovány ve školicím středisku Slovenských drah, kde se odehrávala i část vlastní soutěže. Olympiáda probíhala podle již zavedeného modelu. První den po příjezdu vybírala jury složená z vedoucích národních delegací příklady pro soutěž, zatímco soutěžící navštívili hrad Strečno. Druhý den byla na pořadu soutěž jednotlivců, která proběhla v přednáškové místnosti zmíněného střediska, kde měli studenti pět hodin času na řešení čtyř úloh. Týmová soutěž proběhla pak další den, tj. v neděli, v prostorách Žilinské univerzity. V týmové soutěži má každé národní družstvo k dispozici jednu místnost, kde společně řeší po dobu pěti hodit osm úloh. Již v sobotu večer započala koordinace oprav úloh (úlohy jsou opraveny jednak vedoucími národních týmů a nezávisle i týmem opravovatelů zajištěným organizátory; při koordinaci se výsledky oprav porovnají a případné neshody se vyřeší) a pokračovala i během neděle. V pondělí dopoledne se jury domluvila na rozdělení medailí, které se řídí podobnými pravidly jako na mezinárodní matematické olympiádě. Odpoledne pak následovala společná plavba s řešiteli na pltích po řece Váh. V úterý byl program olympiády zakončen výletem do krásné přírody Malé Fatry a slavnostním zakončením, kterého se zúčastnila mimo jiné významné hosty i rektorka Žilinské univerzity Tatiana Čorejová (ministr školství se na poslední chvíli omluvil).

Výsledky českého družstva byly následující: *Jakub Solovský* a *Filip Hlásek* získali bronzové medaile (Jakubovi chyběl pouze jeden bod ke stříbrné medaili), *Martin Bucháček*, *Martin Töpfer* a *Lukáš Zavřel* získali čestné uznání za jeden bezchybně vyřešený příklad. V týmové soutěži snad lze za úspěch považovat to, že jsme porazili slovenské družstvo.

V následujících tabulkách uvádíme detailní výsledky českých studentů a výsledky národních družstev v týmové soutěži:

		Body za úlohu				**Body**	**Cena**
Umístění	**Jméno**	1	2	3	4		
1.	Kende Kalina (HUN)	1	8	8	8	25	G
2.	Nóra Frankl (HUN)	0	8	8	8	24	G
3.	Nik Jazbinšek (SVN)	5	1	8	8	22	G
	⋮						
16.–22.	Jakub Solovský	0	0	8	8	16	B
29.–30.	Filip Hlásek	4	0	0	8	12	B
40.–49.	Martin Bucháček	0	0	0	8	8	HM
	Martin Töpfer	0	0	0	8	8	HM
	Lukáš Zavřel	0	0	0	8	8	HM
52.–54.	Michael Bílý	2	1	0	3	6	

Pořadí		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	7	8	Celkem
1.	Maďarsko	8	0	8	4	8	8	8	8	52
2.	Polsko	1	2	8	8	8	0	8	8	43
3.	Německo	7	2	1	3	8	8	8	3	40
4.	Rakousko	2	8	1	3	8	6	8	1	37
5.	Chorvatsko	6	0	8	3	8	0	8	2	35
6.	Litva	1	2	0	3	8	8	8	0	36
7.	Slovinsko	6	0	7	2	8	0	3	1	27
8.	Česko	1	2	3	3	8	0	8	1	26
9.	Slovensko	2	0	3	4	8	0	5	0	22
10.	Švýcarsko	0	0	1	2	0	1	0	0	4

Mnohé další informace o průběhu této olympiády lze najít na webové stránce `www.memo2010.skmo.sk`. Na závěr přikládáme zadání všech úloh obou částí olympiády.

Soutěž jednotlivců

1. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

2. Na tabuli jsou napsáni všichni kladní dělitelé kladného celého čísla N. Dva hráči A a B hrají hru, při které se střídají na tazích. V prvním tahu hráč A smaže číslo N. Bylo-li naposled smazáno číslo d, v následujícím tahu je nutno smazat buď dělitele, nebo násobek čísla d. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Určete všechna čísla N, pro která hráč A může vyhrát nezávisle na tazích hráče B.

3. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a bod E na jeho úhlopříčce AC takový, že $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Nechť M je středem kružnice k opsané trojúhelníku BDE. Kružnice k protíná přímku AC v bodech E a F. Dokažte, že přímky FM, AD a BC procházejí týmž bodem.

4. Nalezněte všechna kladná celá čísla n, která vyhovují následujícím dvěma podmínkám:

(i) číslo n má alespoň čtyři různé kladné dělitele,

(ii) pro libovolné dva dělitele a, b čísla n takové, že $1 < a < b < n$, dělí jejich rozdíl $b - a$ číslo n.

Týmová soutěž

5. Jsou dány tři rostoucí posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

kladných celých čísel. Každé kladné celé číslo je členem právě jedné z těchto tří posloupností. Dále pro každé kladné celé číslo n platí:
(i) $c_{a_n} = b_n + 1$,
(ii) $a_{n+1} > b_n$,
(iii) číslo $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je dělitelné dvěma.
Určete čísla a_{2010}, b_{2010} a c_{2010}.

6. Pro každé celé číslo $n \geq 2$ určete největší reálnou konstantu C_n takovou, že pro všechna kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

7. V každém vrcholu pravidelného n-úhelníku stojí pevnost. Ve stejný okamžik každá pevnost vystřelí na jednu ze dvou nejbližších pevností a zasáhne ji. *Výsledkem střelby* rozumíme množinu zasažených pevností, přičemž nerozlišujeme, zda pevnost byla zasažena jednou nebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všech možných výsledků střelby. Ukažte, že pro všechna celá čísla $k \geq 3$ jsou čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesoudělná.

8. Nechť n je kladné celé číslo. Čtverec $ABCD$ je rozdělen na n^2 jednotkových čtverců. Každý z nich je dále rozdělen úhlopříčkou rovnoběžnou s BD na dva trojúhelníky. Některé z vrcholů jednotkových čtverců jsou obarveny červeně tak, že každý z $2n^2$ získaných trojúhelníků má alespoň jeden vrchol červený. Určete nejmenší možný počet červených vrcholů takového obarvení.

9. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Nechť bod K je souměrně sdružený s bodem D podle středu kružnice vepsané a přímky DE, FK se protínají v bodě S. Dokažte, že přímky AS a BC jsou rovnoběžné.

10. Jsou dány body A, B, C, D, E tak, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a čtyřúhelník $ABDE$ je rovnoběžník. Dále se úhlopříčky AC, BD protínají v bodě S a polopřímky AB, DC v bodě F. Dokažte, že $|\sphericalangle AFS| = |\sphericalangle ECD|$.

11. Nechť n je nezáporné celé číslo. Označme a_n číslo s desítkovým zápisem

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Ukažte, že $a_n/3$ lze vyjádřit jako součet dvou třetích mocnin kladných celých čísel, ale nikoliv jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

12. Je dáno kladné celé číslo n, které není celou mocninou čísla 2. Dokažte, že existuje kladné celé číslo m s následujícími dvěma vlastnostmi:

(i) číslo m je součinem dvou po sobě jdoucích kladných celých čísel,
(ii) desítkový zápis čísla m je tvořen dvěma shodnými bloky n číslic.

22. mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2010

Zdeněk Dvořák, Pavel Töpfer, MFF UK Praha

Dvacátý druhý ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2010 se konal 14.– 21. srpna 2010 na University of Waterloo v Kanadě. Na olympiádu do Waterloo přijely delegace z 84 zemí celého světa. Z každé země se IOI mohou zúčastnit čtyři soutěžící a dva vedoucí, celkově letos soutěžilo 300 studentů. České družstvo bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 59. ročníku Matematické olympiády kategorie P a tvořili ho *Vlastimil Dort* z gymnázia Špitálská v Praze, *Hynek Jemelík* a *David Klaška* z gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně a *Jan Polášek* z gymnázia v Turnově. Vedoucími české delegace na IOI 2010 byli *Mgr. Zdeněk Dvořák, Ph.D.* a *Bc. Zbyněk Falt*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Na organizaci soutěže se jako člen Mezinárodního vědeckého výboru IOI podílel *Mgr. Martin Mareš, Ph.D.*, rovněž pracovník MFF UK v Praze.