Jarmila Elbelová

Vektorové důkazy geometrických nerovností

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 4, 3–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146439

Vektorové důkazy geometrických nerovností

Jarmila Elbelová, PřF MU Brno

Abstract. First, the article mentions basic characteristics of the dot product of two vectors in a plane or in a space, and the implementation of the dot product in a contemporary grammar school textbook. Then, the work focuses on the solution of more demanding problems where the dot product of vectors is effectively applicable, although the operation is not mentioned in the problem statement.

Výuka vektorové algebry se na většině současných gymnázií opírá o učebnici [1]. Podle ní proto nejprve připomeneme pojetí velikosti vektoru, skalárního součinu vektorů, Cauchyovu–Schwarzovu a trojúhelníkovou nerovnost. V hlavní části článku pak na šesti úlohách ukážeme, jak lze vektorovou metodu využít k rychlému a efektivnímu řešení úloh, které na první pohled nemají s vektory nic společného. Přesvědčíme se, že mnohdy opomíjené vektorové výpočty mohou poskytnout u některých problémů jednoduchou a přehlednou cestu k jejich řešení.

Velikost vektoru $\vec{u}$, značená $|\vec{u}|$, je v učebnici [1] chápána jako velikost kterékoliv orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, která tento vektor určuje, takže pak píšeme

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A.$$

Zvláštní postavení mezi všemi vektory má nulový vektor $\vec{o} = \overrightarrow{AA}$, jehož velikost je rovna nule.

V analytické geometrii vektory obvykle určujeme v některé kartézské soustavě souřadnic roviny nebo prostoru. Velikost každého vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ v rovině je pak dána vztahem

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2},$$

podobně pro velikost každého vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ v prostoru platí

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Skalární součin dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ v rovině je v učebnici [1] definován jako číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

součin dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v prostoru pak jako číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Z takové definice skalárního součinu ihned plyne důležitá rovnost

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2.$$

Rutinními výpočty přes kartézské souřadnice v rovině či prostoru se rovněž ověří důležité vlastnosti skalárního součinu

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u}, \\ c\vec{u} \cdot \vec{v} &= c(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad \text{pro každé } c \in \mathbb{R}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \end{aligned}$$

které budeme při řešení úloh využívat. V učebnici [1] nechybí zdůvodnění důležitého poznatku, že pomocí souřadnic zavedený skalární součin dvou vektorů nezávisí na tom, kterou konkrétní kartézskou soustavu k této konstrukci vybereme. Poté je odvozen vzorec, který vyjadřuje geometrický význam skalárního součinu dvou nenulových vektorů

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\varphi, \tag{1}$$

kde $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ je velikost úhlu, který vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ svírají.

K ověřování geometrických nerovností pomocí vektorové metody budeme využívat především Cauchyovu–Schwarzovu nerovnost, která je důsledkem předchozí rovnosti (1),

$$-|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|. \tag{2}$$

Připomeňme, že (2) platí pro libovolné dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ v rovině nebo prostoru. Kromě případů $\vec{u} = \vec{o}$ a $\vec{v} = \vec{o}$ v první, resp. druhé, nerovnosti přitom nastane rovnost, jen když jsou vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nesouhlasně, resp. souhlasně, rovnoběžné. V některých úlohách budeme namísto nerovnosti (2) využívat její významný důsledek, totiž známou trojúhelníkovou nerovnost

$$|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}|+|\vec{v}|. \tag{3}$$

Rovnost v této nerovnosti nastane právě tehdy, když je buď alespoň jeden z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nulový, nebo jsou (nenulové) vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ souhlasně rovnoběžné.

Při důkazech některých nerovností ovšem vystačíme s pouhou zřejmou nerovností $|\vec{u}| \ge 0$, je ovšem třeba správně zvolit vektor $\vec{u}$.

Úloha 1. Nechť ABC je trojúhelník s těžištěm T. Najděte polohu bodu P v rovině trojúhelníku ABC, při které je hodnota součtu

$$|AP|\cdot|AT|+|BP|\cdot|BT|+|CP|\cdot|CT|$$

minimální.[1)]

Řešení: Pro součiny ze zkoumaného součtu platí odhady

$$|AP|\cdot|AT| \ge \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AT} = \left(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TP}\right)\cdot\overrightarrow{AT} = \left|\overrightarrow{AT}\right|^2+\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{AT},$$

$$|BP|\cdot|BT| \ge \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BT} = \left(\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TP}\right)\cdot\overrightarrow{BT} = \left|\overrightarrow{BT}\right|^2+\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{BT},$$

$$|CP|\cdot|CT| \ge \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CT} = \left(\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{TP}\right)\cdot\overrightarrow{CT} = \left|\overrightarrow{CT}\right|^2+\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{CT}.$$

Sečtením těchto tří nerovností a s využitím rovnosti $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}=\vec{o}$ dostaneme

$$|AP|\cdot|AT|+|BP|\cdot|BT|+|CP|\cdot|CT| \ge |AT|^2+|BT|^2+|CT|^2+$$
$$+\overrightarrow{TP}\cdot\left(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}\right) = |AT|^2+|BT|^2+|CT|^2.$$

Přitom je zřejmé, že rovnosti ve sčítaných odhadech nastanou pouze pro $P=T$, neboť bod P musí ležet současně na třech polopřímkách AT, BT, CT. V tomto jediném případě má tedy zkoumaný součet minimální hodnotu.

---

1) [2], str. 314, úloha 17, navržená Velkou Británií pro 42. MMO v USA r. 2001.

Úloha 2. Dokažte, že pro libovolný trojúhelník ABC a každý bod O platí[2)]

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \leq 3\Big(|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2\Big).$$

Řešení: Na zadanou nerovnost budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$3|\overrightarrow{OA}|^2 + 3|\overrightarrow{OB}|^2 + 3|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{CA}|^2 \geq 0$$

$$3|\overrightarrow{OA}|^2 + 3|\overrightarrow{OB}|^2 + 3|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}|^2 \geq 0$$

$$3|\overrightarrow{OA}|^2 + 3|\overrightarrow{OB}|^2 + 3|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - |\overrightarrow{OC}|^2 -$$
$$- |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \geq 0$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \geq 0$$

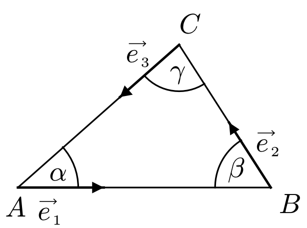
$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2 \geq 0$$

Poslední (a tedy i původní) nerovnost platí vždy.

Poznámka: Dokázaný výsledek ve speciálním případě, kdy bod O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, vede při označení r poloměru zmíněné kružnice k odhadu $|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \leq 9r^2$.

Úloha 3. Dokažte, že pro kosiny vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku ABC platí[3)]

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$



Obr. 1

2) [3], str. 299, úloha 15.

3) [4], str. 99, úloha 13.4, část 1.

Řešení: Označme α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC a $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ jednotkové vektory souhlasně rovnoběžné po řadě s vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ stran trojúhelníka. Pro skalární součiny těchto jednotkových vektorů podle úhlů, které svírají, dostáváme

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -\cos\beta, \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = -\cos\alpha, \qquad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = -\cos\gamma.$$

Pro velikost vektoru $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ platí zřejmá nerovnost

$$\left|\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right|^2 \geq 0,$$

ze které roznásobením a dosazením kosinů úhlů dostaneme

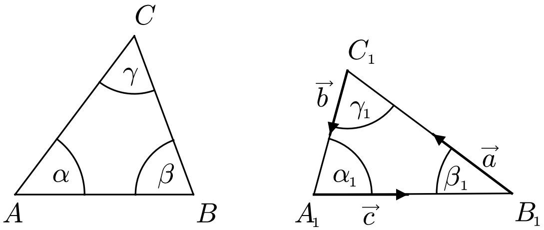
$$0 \leq \left|\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right|^2 = 1 + 1 + 1 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + 2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 =$$
$$= 3 - 2\cos\alpha - 2\cos\beta - 2\cos\gamma.$$

Odtud již plyne dokazovaná nerovnost.

Úloha 4. Jsou dány dva trojúhelníky, jeden s vnitřními úhly α, β, γ, druhý s úhly α_1, β_1, γ_1. Dokažte, že platí

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma} \leq \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma, \tag{4}$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$.[4)]



Obr. 2

Řešení: Dva trojúhelníky s odpovídajícími úhly podle zadání označme ABC, $A_1B_1C_1$. Nejprve nerovnost (4) ze zadání vynásobíme číslem $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > 0$, a dostaneme tak ekvivalentní nerovnost

$$\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta_1 + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_1 \leq$$
$$\leq \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma. \tag{5}$$

4) [6], str. 31.

Zafixujme α, β, γ a levou stranu L nerovnosti (5) považujme za funkci proměnných α_1, β_1, γ_1, kde $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$ a $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$. Máme dokázat, že tato funkce nabývá své maximální hodnoty pouze pro $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, kdy zřejmě v (5) nastane rovnost.

Uvažujme vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ souhlasně rovnoběžné postupně s vektory $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ o velikostech $|\vec{a}| = \sin\alpha$, $|\vec{b}| = \sin\beta$, $|\vec{c}| = \sin\gamma$. Pak pro vzájemné skalární součiny těchto vektorů platí

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(-\cos\gamma_1) = -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_1,\\
\vec{a}\cdot\vec{c} &= -\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta_1,\\
\vec{b}\cdot\vec{c} &= -\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha_1.
\end{aligned}$$

Pro levou stranu L nerovnosti (5) tak dostáváme

$$L = -\left(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2\right).$$

Rovnost nastane právě tehdy, když

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o},$$

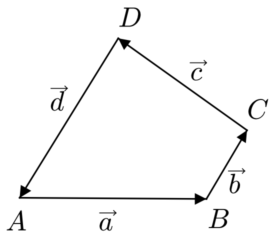
když tedy může být z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zkonstruován trojúhelník, tzn. trojúhelník s délkami stran $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ a velikostmi protilehlých úhlů α_1, β_1, γ_1. Ze sinové věty plyne, že to lze právě tehdy, když $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ a $\gamma = \gamma_1$. Tím je tvrzení o maximu levé strany (5) dokázáno.

Úloha 5. Dokažte, že pro délky stran a, b, c, d a úhlopříček e, f libovolného rovinného (konvexního či nekonvexního) nebo prostorového čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 \geq 2\left(e^2 + f^2\right), \tag{6}$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $ABCD$ je rovnoběžník.[5)]

[5)] Soutěžní úloha na česko-polsko-slovenském střetnutí MO v roce 2010.



Obr. 3

Řešení: Pro vektory stran čtyřúhelníku $ABCD$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{CD}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{DE}$$

platí zřejmá rovnost

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o} \tag{7}$$

a trojúhelníkové nerovnosti

$$|\vec{a}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} - \vec{c}|\,, \qquad |\vec{b}| + |\vec{d}| \geq |\vec{b} - \vec{d}|. \tag{8}$$

Nerovnosti (8) umocníme na druhou a sečteme, takže dostaneme

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} =$$

$$= |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{c} + \vec{d}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{c}\cdot\vec{d} - 2\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} =$$

$$= |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{c} + \vec{d}|^2 - \vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{b}\cdot(\vec{a} + \vec{d}) - \vec{c}\cdot(\vec{a} + \vec{d}) - \vec{d}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) =$$

$$= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CA}\right|^2 - 2(\vec{a} + \vec{d})\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = 2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - 2(-\vec{b} - \vec{c})\cdot(\vec{b} + \vec{c}) =$$

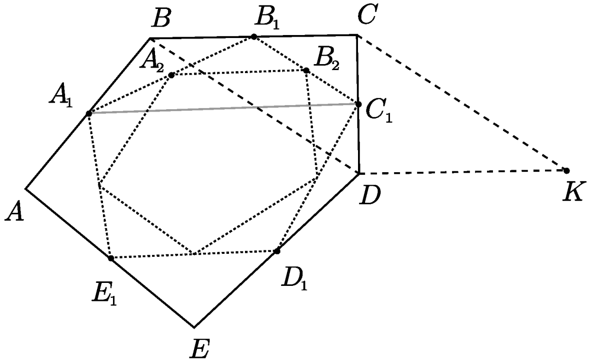
$$= 2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = 2(e^2 + f^2),$$

a tím je nerovnost (6) dokázána. Rovnost v ní nastane právě tehdy, když nastane rovnost v obou trojúhelníkových nerovnostech (8), neboli když jsou jak vektory $\vec{a}$ a $\vec{c}$, tak vektory $\vec{b}$ a $\vec{d}$ nesouhlasně rovnoběžné. Právě tehdy existují kladná čísla p a q, pro která platí rovnosti $\vec{c} = -p\vec{a}$ a $\vec{d} = -q\vec{b}$. Dosazením do (7) dostaneme podmínku

$$(1-p)\vec{a} + (1-q)\vec{b} = \vec{o},$$

jež s ohledem na lineární nezávislost vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ znamená, že $p = q = 1$. Poslední je vyjádřením toho, že $ABCD$ je rovnoběžník.

Úloha 6. Mějme posloupnost pětiúhelníků $M, M_1, M_2, \ldots$ sestrojených tak, že vrcholy každého následujícího pětiúhelníku leží ve středech stran předchozího pětiúhelníku. Dokažte, že součet obvodů všech těchto pětiúhelníků nepřevyšuje osminásobek obvodu prvního z nich.[6)]



Obr. 4

Řešení: Nechť $ABCDE$ je počáteční pětiúhelník M s obvodem o, $A_1 \ldots E_1$ je pětiúhelník M_1 s obvodem o_1 atd. Trojúhelník BCD rozšíříme na rovnoběžník $BCKD$ tak, že platí

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DK}, \qquad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CK}.$$

Vrcholy pětiúhelníku $A_1 \ldots E_1$ mají vyjádření

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + B), \qquad B_1 = \frac{1}{2}(B + C), \qquad C_1 = \frac{1}{2}(C + D),$$

$$D_1 = \frac{1}{2}(D + E), \qquad E_1 = \frac{1}{2}(E + A),$$

odkud

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}(C - A),$$

6) [5], str. 103, úloha 5.25.

neboli

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{A_1B_1}.$$

Analogicky dostaneme

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{B_1C_1}, \quad \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{C_1D_1}, \quad \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{D_1E_1}, \quad \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{E_1A_1}.$$

Pro vektor $\overrightarrow{A_1C_1}$ platí

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{2}(C + D - A - B) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK},$$

což znamená, že díky trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AK}\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AD}\right| + \left|\overrightarrow{DK}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(2\left|\overrightarrow{D_1E_1}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|\right).$$

Pro vektory stran dalšího pětiúhelníku M_2 podobně platí

$$\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right| \le \frac{1}{4}\left(2\left|\overrightarrow{D_1E_1}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|\right),$$

analogicky

$$\left|\overrightarrow{B_2C_2}\right| \le \frac{1}{4}\left(2\left|\overrightarrow{E_1A_1}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|\right),$$

$$\left|\overrightarrow{C_2D_2}\right| \le \frac{1}{4}\left(2\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| + \left|\overrightarrow{DE}\right|\right),$$

$$\left|\overrightarrow{D_2E_2}\right| \le \frac{1}{4}\left(2\left|\overrightarrow{B_1C_1}\right| + \left|\overrightarrow{EA}\right|\right),$$

$$\left|\overrightarrow{E_2A_2}\right| \le \frac{1}{4}\left(2\left|\overrightarrow{C_1D_1}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right|\right).$$

Po sečtení všech pěti nerovností dostáváme

$$o_2 \le \frac{1}{4}(2o_1 + o),$$

a protože je zřejmě $o_1 \leq o$, plyne odtud

$$o_2 \leq \frac{3}{4} o.$$

Dále indukcí pro každé $k \geq 1$ získáme odhad

$$o_{2k+1} \leq o_{2k} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k o.$$

Součet $o + o_1 + \ldots$ všech obvodů tedy nepřevyšuje součet řady

$$\left(1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^k + \left(\frac{3}{4}\right)^k + \ldots\right) o =$$

$$= 2\left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^k + \cdots\right) o = \frac{2o}{1 - \frac{3}{4}} = 8o,$$

což je právě tvrzení, které jsme měli dokázat.

Literatura

[1] Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie,* 3. vyd. Prometheus, Praha, 2009.

[2] Djukic, D. et al.: *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004.* Springer, New York, 2006.

[3] Engel, E.: *Problem Solving Strategies.* Springer, New York, 1997.

[4] Ponarin, Ja. P.: *Elementarnaja geometrija,* díl 1. MCNP, Moskva, 2004.

[5] Prasolov, V. V.: *Plane geometry,* díl 1. Nauka, Moscow, 1986.

[6] Savchev, S., Andreescu, T.: *Mathematical Miniatures.* The Mathematical Association of America, Washington D.C., 2003.

Řešení úlohy ze str. 33: Sestrojíme kružnice $a(A; |AP|)$, $b(B; |BP|)$, jejich průsečík P', kružnice $p(P; |PS|)$, $p'(P'; |P'S|)$, jejich průsečík S', kružnici $k'(S'; |SA|)$. Průsečíky kružnic k a k' jsou hledané průsečíky kružnice k a kolmice.