Tamara Nedevová

Mocnost bodu ke kružnici

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 2, 9–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146465

Mocnost bodu ke kružnici

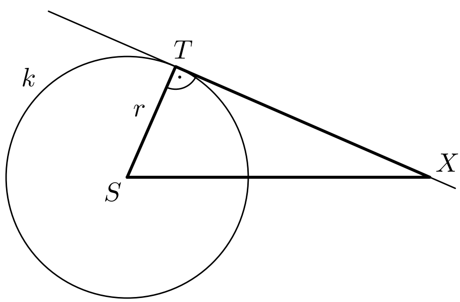
Tamara Nedevová, PřF MU Brno

Abstract. The text deals with the power of a point to the circle, which is part of basic high-school curriculum. First, the definition and basic properties of the notion are reminded. Then, we present six problems based on the circle power and their full solutions. Finally, five other problems are stated and several hints to their solutions are offered.

Kružnice je ta nejhezčí křivka, kterou známe. Je dokonale symetrická, nemá konec ani začátek a ať na ní zvolíme jakýkoliv bod, je vždy od jejího středu stejně vzdálen. Díky tomu má mnoho krásných vlastností, které lze v geometrii a jejích aplikacích využít. My se podíváme pouze na jednu skalární veličinu uvedenou v názvu článku, která umožňuje vyjádřit pozoruhodnou a užitečnou vlastnost všech sečen dané kružnice, které procházejí daným bodem. Celou potřebnou teorii nejdříve vyložíme a poté ji využijeme při řešení šesti příkladů. Další pětici úloh opatřených návody přenecháme k samostatné práci.

Uvažujme nejprve libovolný bod X ležící ve vnější oblasti kružnice $k(S, r)$ (obr. 1). Sestrojíme-li z bodu X tečnu ke kružnici k s bodem dotyku T, je z obrázku zřejmé, že pro strany vzniklého pravoúhlého trojúhelníku STX podle Pythagorovy věty platí

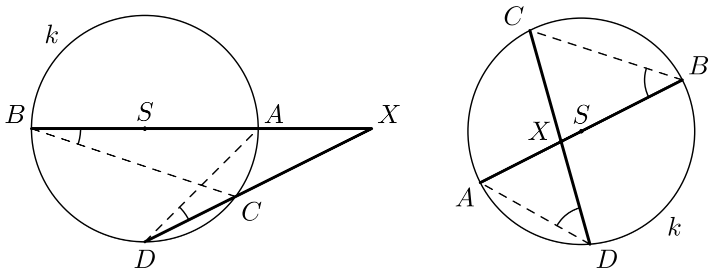
$$|XT|^2 = |SX|^2 - r^2.$$



Obr. 1

Hodnotu $|SX|^2 - r^2$ (vyjádřenou číslem v jednotkách obsahu) nazveme *mocností bodu X ke kružnici k* a označíme ji m_X. Můžeme ji přiřadit každému bodu X roviny kružnice k. Bod X v její vnější oblasti má zřejmě kladnou mocnost. Leží-li bod X na kružnici k, je jeho mocnost jistě nulová. Pro bod X ležící ve vnitřní oblasti kružnice k pak platí $-r^2 \leq m_X < 0$.

V úvodu jsme zmínili, že mocnost bodu popisuje vlastnost sečen dané kružnice, jež daným bodem prochází. Podívejme se tedy, jak lze mocnost bodu X spojit nejprve s tou sečnou, jejíž průsečíky s kružnicí k tvoří průměr, jehož krajní body označíme A, B (obr. 2).



Obr. 2

Výraz pro mocnost $m_X = |SX|^2 - r^2$ rozložme na součin, čímž získáme vyjádření $(|SX| - r) \cdot (|SX| + r)$. Podíváme-li se na obr. 2, na němž bod X leží ve vnější oblasti kružnice k, vidíme, že platí

$$m_X = (|SX| - r) \cdot (|SX| + r) = |AX| \cdot |BX|.$$

Pro bod X ležící ve vnitřní oblasti kružnice k podle obr. 2 platí

$$m_X = (|SX| - r) \cdot (|SX| + r) = -|AX| \cdot |BX|.$$

Získaný poznatek $m_X = \pm|AX| \cdot |BX|$ nyní zobecníme pro libovolnou sečnu procházející bodem X a protínající kružnici k v bodech, jež označíme C a D v pořadí jako na obr. 2. Ať je bod X vnějším či vnitřním bodem kružnice k, shodují se trojúhelníky XAD a XCB v úhlech při tomto společném vrcholu. V obou případech také platí, že body B a D leží na stejném oblouku nad tětivou AC, tedy $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|$. Trojúhelníky XAD a XCB jsou tedy podobné podle věty *uu*, z čehož získáváme rovnost

$$\frac{|XA|}{|XD|} = \frac{|XC|}{|XB|},$$

tedy celkově

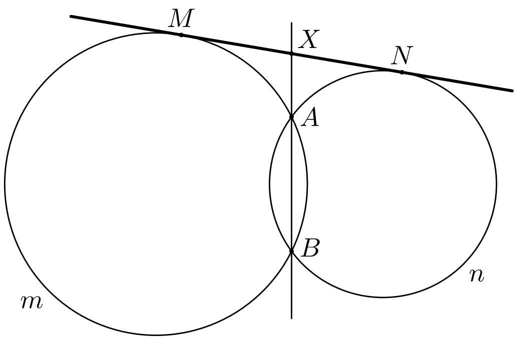
$$m_X = \pm|XA| \cdot |XB| = \pm|XC| \cdot |XD|,$$

přičemž znaménko $+$, resp. $-$ se bere podle toho, zda bod X leží ve vnější, či vnitřní oblasti kružnice k.

Ukázali jsme, že mocnost bodu ke kružnici lze vyjádřit pomocí vzdáleností daného bodu od průsečíků dané kružnice s libovolnou sečnou, jež daným bodem prochází. Tento důležitý výsledek nám nyní pomůže elegantně vyřešit následující příklady.

Příklad 1. Jsou dány kružnice m a n protínající se v bodech A, B. Označme M, N body dotyku po řadě kružnic m a n s jejich společnou tečnou. Dokažte, že přímka AB půlí úsečku MN.

Řešení: Označme X průsečík přímky AB a úsečky MN (obr. 3).



Obr. 3

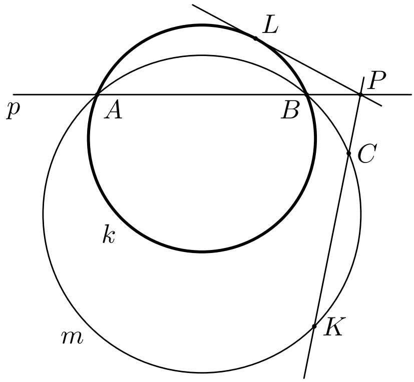
Pro mocnosti bodu X ke kružnicím m a n platí rovnosti

$$|XA| \cdot |XB| = |XM|^2, \quad \text{resp.} \quad |XA| \cdot |XB| = |XN|^2.$$

Z jejich porovnání vidíme, že $|XM| = |XN|$, což jsme měli dokázat.

Příklad 2. Vně kružnice k jsou dány body P a K. Bodem P veďme libovolnou sečnu p kružnice k, která neprochází bodem K, a označme A a B její průsečíky s kružnicí k. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku ABK prochází kromě bodu K ještě jedním pevným bodem, nezávislým na volbě sečny p, nebo se tato opsaná kružnice dotýká polopřímky PK v bodě K pro všechny uvažované sečny p.

Řešení: Označme m kružnici opsanou trojúhelníku ABK a C její druhý průsečík s polopřímkou PK (tedy $C \neq K$, pokud PK není tečna, kdy položíme $C = K$). Z bodu P veďme tečnu ke kružnici k s bodem dotyku L (obr. 4).



Obr. 4

Užitím mocnosti bodu P ke kružnici k získáme rovnost

$$|PA| \cdot |PB| = |PL|^2,$$

z mocnosti bodu P ke kružnici m dostáváme

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PK|.$$

Porovnáním pravých stran rovností obdržíme

$$|PL|^2 = |PC| \cdot |PK|,$$

tedy

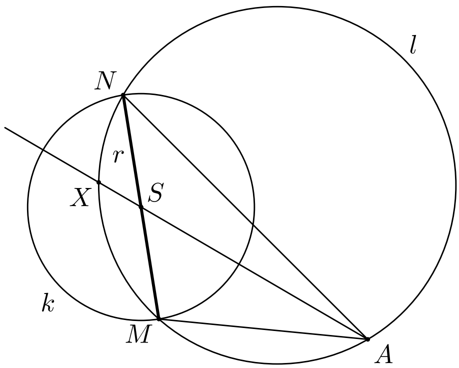
$$|PC| = \frac{|PL|^2}{|PK|}.$$

Body P, K jsou pevné a vzdálenost $|PL|$ také, poloha bodu C na polopřímce PK tedy nezávisí na volbě sečny p. V případě $|PK| = |PL|$, kdy vyjde $C = K$, je ovšem polopřímka PK společnou tečnou všem uvažovaným kružnicím m.

Příklad 3. Je dána kružnice k a bod A ležící v její vnější oblasti. Nechť MN je libovolný průměr kružnice k, při kterém jsou body A, M, N

vrcholy trojúhelníku. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AMN prochází kromě bodu A ještě dalším pevným bodem, který nezávisí na volbě průměru MN.

Řešení: Označme S střed kružnice k, r její poloměr a l kružnici opsanou trojúhelníku AMN (závislou na volbě průměru MN). Bod S leží ve vnitřní oblasti kružnice l, neboť je středem její tětivy MN (obr. 5). Polopřímka opačná k polopřímce SA, jež je na volbě MN nezávislá, proto protne kružnici l v jediném bodě, který označme X. Tento bod X ($X \neq A$) bude hledaným společným bodem všech kružnic l, ukážeme-li, že jeho vzdálenost od bodu S na volbě MN nezáleží.



Obr. 5

Využitím mocnosti bodu S ke kružnici l získáváme rovnosti

$$r^2 = |SN| \cdot |SM| = |SA| \cdot |SX|,$$

odkud

$$|SX| = \frac{r^2}{|SA|}.$$

Tím je důkaz hotov.

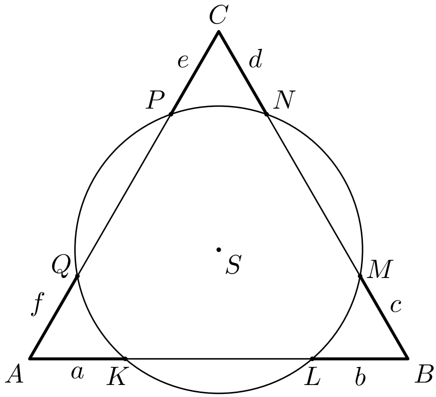
Příklad 4. Uvažujme libovolnou kružnici, jež protne strany daného rovnostranného trojúhelníku ABC v šesti bodech, které označíme K, L, M, N, P, Q podle obr. 6. Dokažte rovnost

$$|AK| + |BM| + |CP| = |BL| + |CN| + |AQ|.$$

Řešení: Použitím mocnosti bodů ke kružnici pro jednotlivé vrcholy trojúhelníku dostáváme rovnosti

$$|BL| \cdot |BK| = |BM| \cdot |BN|,$$
$$|CN| \cdot |CM| = |CP| \cdot |CQ|,$$
$$|AQ| \cdot |AP| = |AK| \cdot |AL|.$$

Trojúhelník ABC je rovnostranný, délku jeho stran označíme s. Pro lepší přehlednost dalších výpočtů ještě označme a, b, c, d, e, f délky úseček z dokazované rovnosti jako na obr 6.



Obr. 6

Uvedené rovnosti můžeme přepsat takto:

$$b \cdot (s-a) = c \cdot (s-d)$$
$$d \cdot (s-c) = e \cdot (s-f)$$
$$f \cdot (s-e) = a \cdot (s-b)$$

Sečtením všech tří rovností a následnou úpravou obdržíme

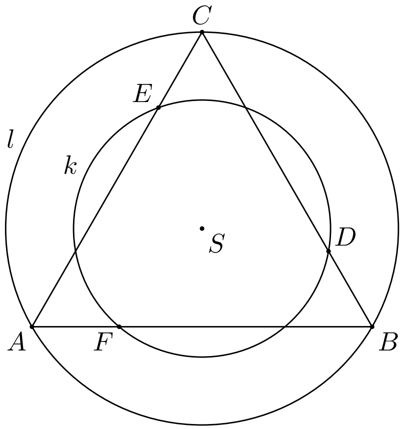
$$s \cdot (b+d+f) - (ba+dc+fe) = s \cdot (c+e+a) - (cd+ef+ab).$$

Výrazy odečítané na obou stranách poslední rovnosti se rovnají. Po jejich zrušení a následném vydělení číslem s získáme $b+d+f = c+e+a$, což je dokazovaná rovnost.

Příklad 5. Uvnitř stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body D, E, F. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a DEF jsou soustředné, právě když platí

$$|DB| \cdot |DC| = |EC| \cdot |EA| = |FA| \cdot |FB|.$$

Řešení: Označme l kružnici opsanou trojúhelníku ABC a r její poloměr. Kružnici opsanou trojúhelníku DEF označme k (obr. 7).



Obr. 7

Ze (záporných) mocností bodů D, E, F ke kružnici l získáme rovnosti

$$\begin{aligned} |DC| \cdot |DB| &= r^2 - |SD|^2, \\ |EC| \cdot |EA| &= r^2 - |SE|^2, \\ |FA| \cdot |FB| &= r^2 - |SF|^2. \end{aligned}$$

Součiny z levých stran se budou rovnat, právě když se budou rovnat pravé strany

$$r^2 - |SD|^2 = r^2 - |SE|^2 = r^2 - |SF|^2,$$

neboli $|SD| = |SE| = |SF|$. Rovnosti ze zadání jsou tedy ekvivalentní s tím, že bod S je středem kružnice opsané trojúhelníku DEF, že tedy kružnice k a l jsou soustředné.

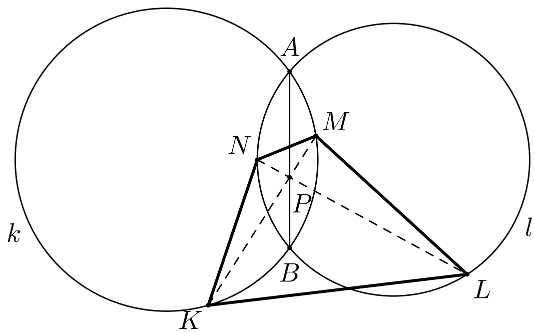
Až doposud jsme mocnost bodu ke kružnici využívali v podobě pravidla: *Protínají-li dvě různoběžky kružnici k po řadě ve dvojicích bodů A, B a C, D, pak pro jejich průsečík X platí $|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|$.* Užitečné je také opačné tvrzení: *Platí-li poslední rovnost pro dvě různoběžky AB, CD a jejich průsečík X, který je vnitřním bodem buď obou úseček AB, CD, nebo žádné z nich, leží body A, B, C, D na téže kružnici.*

Ze zadané rovnosti a popsané polohy bodu X totiž plyne, že vzniklé trojúhelníky XAD a XCB jsou podobné podle věty *sus*. Opíšeme-li tedy trojúhelníku ABC kružnici, musí na ni ležet i bod D, neboť úhly CBX, ADX jsou v uvažované kružnici obvodové úhly příslušné stejnému oblouku nad tětivou AC.

Předchozí tvrzení využijeme při řešení závěrečného příkladu.

Příklad 6. Jsou dány kružnice k a l se společnou tětivou AB. Jejím vnitřním bodem P veďme libovolnou tětivu KM kružnice k a libovolnou tětivu LN kružnice l. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový (obr. 8).

Řešení:



Obr. 8

Z mocnosti bodu P ke kružnicím k a l získáváme rovnosti

$$|PM| \cdot |PK| = |PA| \cdot |PB| = |PN| \cdot |PL|.$$

Z rovnosti krajních součinů plyne, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici, tedy čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový.

Na závěr zkuste vyřešit několik podobných úloh sami.

Úlohy (řešení úloh je na str. 25)

1. Pro úhlopříčky rovnoběžníku $ABCD$ platí $|AC| > |BD|$. Bod M je průsečík úhlopříčky AC s kružnicí opsanou trojúhelníku BCD. Dokažte, že přímka BD je společnou tečnou kružnic opsaných trojúhelníkům ABM a ADM. (Návod: Využijte mocnost průsečíku úhlopříček rovnoběžníku ke kružnicím opsaným trojúhelníkům BCD, ABM a ADM.)

2. Jsou dány dvě shodné kružnice k_1 a k_2, které mají společné právě dva různé body M a N. Libovolná kružnice k, jež se v bodě M dotýká přímky MN, protne kružnice k_1, k_2 po řadě v bodech K, L (různých od bodů M, N). Dokažte, že přímka KL prochází středem O tětivy MN. (Návod: Předpokládejte, že přímka OK protne kružnice k_1 a k po řadě v bodech L_1 a L_2 různých od K a pomocí mocnosti dokažte, že $L = L_2$.)

3. Nechť se přímka OA dotýká kružnice k v bodě A a její tětiva BC je s přímkou OA rovnoběžná. Víme, že přímky OB, OC protnou kružnici k po řadě v bodech K a L, $K \neq B$ a $L \neq C$. Dokažte, že přímka KL půlí úsečku OA. (Návod: Využijte podobnosti trojúhelníků.)

4. Je dána kružnice k o poloměru r se středem O, bod A ležící ve vnitřní oblasti kružnice k a úsečka délky h. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A, jehož vrcholy B, C leží na kružnici k a výška z vrcholu A má délku h. (Návod: Označte patu výšky z vrcholu A a pomocí mocnosti tohoto bodu a Eukleidovy věty najděte jeho polohu.)

5. Je dána kružnice k se středem O a její tětiva AB, různá od průměru. Na úsečce OB je zvolen libovolný bod T. V bodě T je sestrojena kolmice k úsečce OB. Označme C průsečík této kolmice s tětivou AB a D, E průsečíky kolmice s kružnicí k. Dále označme S pravoúhlý průmět bodu T na tětivu AB. Dokažte, že $|AS| \cdot |BC| = |TE| \cdot |TD|$. (Návod: K postupným úpravám levého součinu použijte mocnost bodu a Eukleidovy věty.)

L i t e r a t u r a

[1] Horák, S.: *Kružnice.* Mladá Fronta, Praha, 1966.
[2] Prasolov, V.: *Plane geometry, part 1.* `http://www.mccme.ru/prasolov`, internetový text, překlad: D. Leites.
[3] Gologan, R., Schwarz, D.: *Romanian Mathematical Competitons.* Romanian Mathematical Society, Theta Foundation, Bucharest, 2008.
[4] Shine C. Y. *Thirty Years of Brazilian Math Olympiads.* AOBM, Rio de Janeiro, 2009.