Rozhledy matematicko-fyzikální

Vlastimil Dlab

Zamyšlení nad jednou úlohou Diofanta

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 2, 6–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146521

A stejně můžeme pokračovat až do konce tabulky, například po řádcích shora dolů a každý řádek zleva doprava:

	1	2	3
1	1	0	0
2	1	1	0
3	1	3	1
4	1	7	6
5	1	15	25
6	1	31	90

Hodnota, která nás zajímá, je $P_{6,3}$. Pohled do tabulky říká, že je to 90, tedy stejný výsledek, jaký vyšel při řešení úlohy rozborem případů. Je tu jen jeden rozdíl, kdyby se nás teď někdo zeptal, kolika způsoby lze rozdělit třeba 10 dětí do 5 skupin, budeme jen o chvíli déle vyplňovat o něco větší tabulku, zatímco při řešení stejné úlohy rozborem případů by se i znalci kombinatoriky nejspíš dostali do potíží.

Kdybyste se o takovémto řešení úloh chtěli dozvědět více, hledejte pod heslem *dynamické programování*.

Literatura

[1] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 5. vyd., Prometheus, Praha, 2008.

Zamyšlení nad jednou úlohou Diofanta

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. This is a little note concerning a relation between the area and the perimeter of a right-angled triangle.

Diofantos Alexandrijský ve své sbírce úloh nazvané *Arithmetica* (viz např. [1]) vyžaduje v šesté kapitole pod číslem 22 určit strany pravoúhlého trojúhelníku, jehož obsah je 7 a obvod 12. Snadno se přesvědčíme, že délka jedné z odvěsen y takového trojúhelníku musí splňovat kvadratickou podmínku $6y^2 - 43y + 84 = 0$ (Diofantos uvádí ekvivalentní podmínku s kladnými koeficienty $172x = 336x^2 + 24$ pro $x = y^{-1}$), odkud vyplývá, že takový trojúhelník neexistuje. Kořeny příslušné kvadratické rovnice jsou totiž sdružená komplexní čísla $\frac{1}{12}(43 \pm 167\,\mathrm{i})$. Na rozdíl od Herona Alexandrijského, jehož kniha *Stereometria* ukazuje, že si byl při svých výpočtech problému odmocnin záporných čísel vědom, Diofantos tento stěžejní bod zcela minul (viz [2]).

Pro každé zadání hodnot pro obsah A a obvod P pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délku x a y, můžeme samozřejmě stejným způsobem jako Diofantos rozhodnout, zda trojúhelník existuje, či neexistuje. Navíc, jestliže existuje, určit též délky jeho stran.

Jelikož $A = \frac{1}{2}xy$ a $y = \frac{2A}{x}$, pak postupně dostaneme

$$P = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = x + \frac{2A}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{2A}{x}\right)^2}, \tag{1}$$

$$P - x - \frac{2A}{x} = \sqrt{x^2 + \frac{4A^2}{x^2}},$$

$$P^2 + x^2 + \frac{4A^2}{x^2} - 2Px - \frac{4AP}{x} + 4A = x^2 + \frac{4A^2}{x^2},$$

$$P^2 - 2Px - \frac{4AP}{x} + 4A = 0,$$

$$2Px^2 - (P^2 + 4A)x + 4AP = 0.$$

Pro dané hodnoty A a P odtud dostáváme dvě délky x (které mohou splývat):

$$\frac{P^2 + 4A + \sqrt{P^4 - 24AP^2 + 16A^2}}{4P} \quad \text{a} \quad \frac{P^2 + 4A - \sqrt{P^4 - 24AP^2 + 16A^2}}{4P}$$

Tyto délky určují odvěsny žádaného trojúhelníku, a ten tedy existuje právě v případě, že

$$P^4 - 24AP^2 + 16A^2 = (P^2 - 12A)^2 - 128A^2 \geq 0. \tag{2}$$

Odtud $P^2 \geq (12 + 8\sqrt{2})A$, tj. $P \geq 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\,\sqrt{A} = 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{A}$. V krajním případě, tj. když $P = 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{A} \doteq 4{,}828\,427\,12 \cdot \sqrt{A}$,

$$x = y = \frac{(12 + 8\sqrt{2} + 4)A}{8(1 + \sqrt{2})\sqrt{A}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\sqrt{A} = \sqrt{2A},$$

takže dostáváme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.

Bohužel, takovýto těžkopádný postup řešení příliš řádnému porozumění úlohy nepřispívá. Je nutné si uvědomit, že řešení nerovnosti (2) (tj. určení, která část grafu příslušné paraboly leží nad vodorovnou osou popisující hodnoty P^2) zahrnuje též případ $0 \leq P^2 \leq (12 - 8\sqrt{2})A$.

Vraťme se tedy zpět k našemu úkolu určit, v jakém poměru musí být P a A, aby požadovaný trojúhelník existoval. Zvolme pevnou hodnotu $A > 0$ a upravme příslušnou podmínku (1) pro P:

$$P(x) = \left(x + \frac{2A}{x}\right) + \sqrt{\left(x + \frac{2A}{x}\right)^2 - 4A}. \tag{3}$$

Položíme-li $z = x + \frac{2A}{x}$, je funkce

$$f(z) = z + \sqrt{z^2 - 4A}$$

rostoucí pro $z \geq 2\sqrt{A}$. Dále funkce (jejímž grafem je hyperbola)

$$g(x) = x + \frac{2A}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{2A}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2A}$$

má pro $x = \sqrt{2A}$ minimum $2\sqrt{2A}$ a je pro $0 \leq x \leq \sqrt{2A}$ klesající a pro $x \geq \sqrt{2A}$ rostoucí. Odtud vyplývá, že funkce $P(x)$ nabývá minimální hodnotu pro $x = \sqrt{2A}$, a tato hodnota je $2(1 + \sqrt{2})\sqrt{A}$ (dosazením do (3)). Vidíme tedy, že $P(x)$ je pro $0 \leq x \leq \sqrt{2A}$ klesající a pro $x \geq \sqrt{2A}$ rostoucí.

Pro $P \geq 2(1+\sqrt{2})\sqrt{A}$ tak dostáváme dvě hodnoty představující délky odvěsen příslušného pravoúhlého trojúhelníku.

Pro $P^2 = 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{A}$ je tento trojúhelník rovnoramenný.

Diofantos byl tedy ve svém výběru hodnot $A = 7$ a $P = 12$ k existenci trojúhelníku velmi blízko: Pravoúhlý trojúhelník o obsahu $A = 7$ existuje, pokud má obvod $P \geq 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{7} \doteq 12{,}774\,817\,4$.

Literatura

[1] Heath, T. L.: *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra.* Dover Publications, New York, 1964.

[2] Nahin, P. J.: *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton Univ. Press, Princeton and Oxford, 1998.