Josef Jírů

O jedné úloze celostátního kola FO

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 2, 9–15

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146522`

O jedné úloze celostátního kola FO

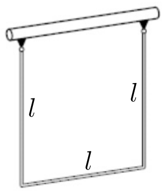
Josef Jírů, Gymnázium Pelhřimov

Abstract. The article describes a solution of a problem of Czech Physical Olympiad. It is interesting that the task combines mechanics and electrodynamics.

Na celostátním kole 53. ročníku fyzikální olympiády kategorie A v Pardubicích 22. února 2012 byla studentům v teoretické části předložena integrovaná úloha, která využívá poznatků z mechaniky tuhého tělesa a elektrodynamiky. Jde o fyzikálně zajímavou úlohu, a proto jsme se rozhodli ji nabídnout všem čtenářům Rozhledů matematicko-fyzikálních.

Zadání úlohy

Pravoúhlý rámeček složený ze tří stejných vodičů délky l je zavěšen na vodorovné nevodivé tyči (obr. 1) v prostoru homogenního magnetického pole s magnetickou indukcí $\boldsymbol{B}$. Rámeček vychýlíme do vodorovné polohy a uvolníme.



Obr. 1

a) Určete maximální úhlovou rychlost pohybu rámečku. (2 body)

b) Určete maximální velikost indukovaného napětí mezi závěsy, má-li magnetická indukce

1. svislý směr, (2 body)
2. směr osy otáčení, (1 bod)
3. vodorovný směr kolmý k ose otáčení. (5 bodů)

Řešte obecně, všechny číselné koeficienty vyjádřete přesně. Odpor vzduchu považujte za zanedbatelný. Moment setrvačnosti tenké homogenní tyče o hmotnosti m a délce l vzhledem k příčné ose otáčení je

$$J_0 = \frac{1}{12}ml^2.$$

Řešení části a)

Označme m hmotnost celého rámečku, h hloubku těžiště, kterou budeme měřit od osy otáčení. Potom platí

$$mgh = 2 \cdot \frac{m}{3} g \frac{l}{2} + \frac{m}{3} gl,$$

z čehož

$$h = \frac{2}{3}\, l.$$

Dále určíme moment setrvačnosti celého rámečku vzhledem k ose otáčení. Moment setrvačnosti jednoho svislého vodiče rámečku vzhledem k ose otáčení podle Steinerovy věty je

$$J_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{3}\, l^2 + \frac{m}{3} \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Moment setrvačnosti vodorovného vodiče rámečku vzhledem k ose otáčení je

$$J_2 = \frac{m}{3} l^2.$$

Celkový moment setrvačnosti rámečku určíme jako součet dílčích momentů:

$$J = 2J_1 + J_2 = \frac{5}{9} ml^2$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$mgh = \frac{1}{2}\, \omega_{\max}^2\, J,$$

z čehož po dosazení za h a J výše uvedených výrazů dostaneme

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{12g}{5l}}.$$

Řešení části b)

1. Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se mezi konci přímého vodiče délky l, který se pohybuje příčně rychlostí $\boldsymbol{v}$ v magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$, indukuje napětí o velikosti $U_i = Blv \sin\alpha$, kde

α je odchylka vektorových přímek vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$. Bez ohledu na orientaci indukce nahoru, či dolů, bude na středním vodiči maximální velikost napětí při průchodu nejnižší polohou, kde je $\sin\alpha = 1$ a současně i velikost rychlosti je maximální:

$$v_{\max} = l\omega_{\max} = \sqrt{\frac{12}{5}gl}.$$

Po dosazení dostaneme

$$U_{i\max} = Blv_{\max} = B\sqrt{\frac{12}{5}gl^3}.$$

Závěsné vodiče se pohybují v rovinách rovnoběžných s vektorem magnetické indukce, napětí se na nich neindukuje.

2. Na závěsných vodičích má indukované napětí navzájem opačnou polaritu, na zbývajícím vodorovném vodiči je napětí nulové. Proto je $U_i = 0$.

3. Označme α opět okamžitou odchylku vektorových přímek vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$. Ve výchozí vodorovné poloze rámečku je velikost rychlosti nulová, ve svislé poloze rámečku je $\sin\alpha = 0$, tedy v těchto polohách je nulové napětí. Maximální velikost napětí budeme hledat mezi těmito polohami. Rámeček má během pohybu hloubku svého těžiště

$$h_\alpha = \frac{2}{3}\,l\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}\,l\cos\alpha.$$

V této poloze je velikost rychlosti středního vodiče

$$v = l\omega = \sqrt{\frac{12}{5}gl\cos\alpha}$$

a velikost indukovaného napětí mezi jeho konci

$$U_i = Blv\sin\alpha = B\sqrt{\frac{12}{5}gl^3}\cdot\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Závěsné vodiče indukční čáry neprotínají, napětí se na nich neindukuje. Maximum funkce najdeme pomocí její první derivace podle proměnné α. Tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}\right) = \cos\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \sin\alpha\,\frac{-\sin\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}} = \frac{3\cos^2\alpha - 1}{2\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Má-li funkce v některém α maximum, pak je v něm tato derivace nulová. Z podmínky nulové derivace pro $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ dostaneme

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{resp. } \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

a tedy $\alpha \doteq 35{,}3^\circ$.

Dosazením do vztahu (1) dostaneme hledanou maximální velikost indukovaného napětí

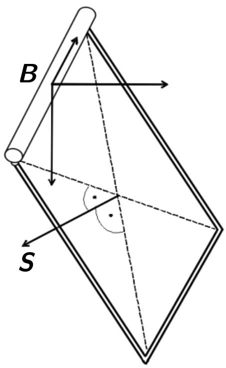
$$U_{i\,\max} = \sqrt[4]{\frac{4}{27}} \cdot B \cdot \sqrt{\frac{12}{5}gl^3} = \sqrt[4]{\frac{64}{75}} \cdot B \cdot \sqrt{gl^3} = \sqrt{\frac{8}{5\sqrt{3}}} \cdot B \cdot \sqrt{gl^3}.$$

Ještě k části b)

U části b) provedeme ještě komplexní rozbor řešení užitím obecného tvaru Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Takto postupovali někteří řešitelé. Indukční tok homogenního magnetického pole o magnetické indukci $\boldsymbol{B}$ protékající rovinnou plochou o obsahu S je

$$\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = BS\cos\alpha, \tag{2}$$

kde α je úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{S}$. Vektor $\boldsymbol{S}$ má směr normály k rovině smyčky a velikost $S = l^2$ (obr. 2).



Obr. 2

Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce je napětí rovno časovému úbytku indukčního toku

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BS\cos\alpha). \tag{3}$$

Toto napětí naměříme na celé uzavřené smyčce. Napětí mezi závěsy pak dostaneme po odečtení napětí na nevodivé tyči, které je nulové, neboť tyč je vzhledem k magnetickému poli v klidu. Tím napětí určené rovnicí (3) je současně hledaným napětím na smyčce.

V případě 2 je v průběhu pohybu úhel α konstantní s hodnotou $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Podle rovnosti (2) je pak $\Phi = \text{konst.}$ a z rovnosti (3), kde derivujeme konstantní funkci, vyjde $U_i = 0$.

Ve zbývajících dvou případech se však úhel α mění. Po provedení derivace funkce (2) dostaneme

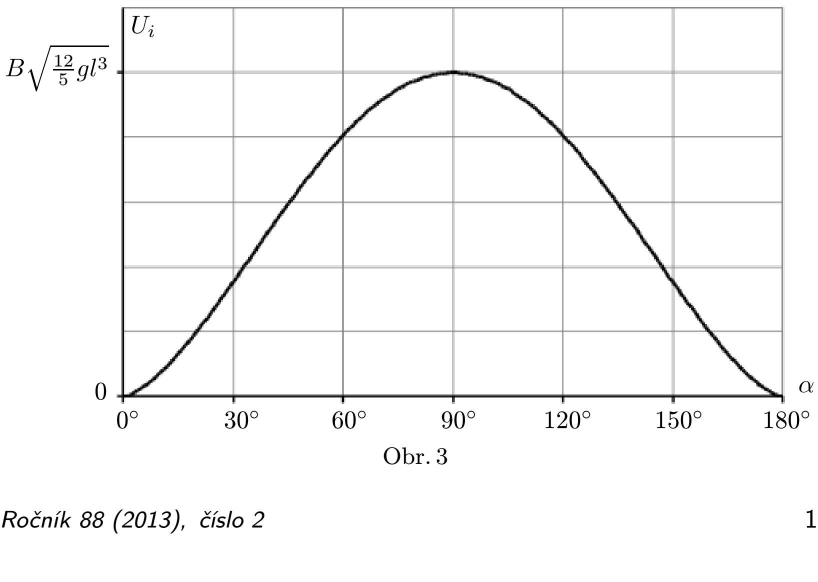
$$U_i = BS \sin\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = BS\omega \sin\alpha, \tag{4}$$

neboť $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega$.

V případě 1 při volbě směru $\boldsymbol{B}$ dolů platí

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5l}\sin\alpha}, \quad \alpha \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Indukční tok klesá z kladné hodnoty $\Phi = BS$ na zápornou hodnotu $\Phi = -BS$ stejné velikosti. Po celou dobu je proto časová změna indukčního toku $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ záporná a podle vztahu (3) je indukované napětí U_i po celou dobu kladné s výjimkou krajních poloh s maximem pro úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (obr. 3).



Obr. 3

Po dosazení do rovnosti (4) dostaneme

$$U_i = BS\sqrt{\frac{12g}{5l}}\sqrt{\sin^3\alpha}.$$

Indukované napětí U_i je maximální pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$, což nastane v nejnižší poloze. Dosazením dostaneme

$$U_{i\,\max} = BS\sqrt{\frac{12g}{5l}} = B\sqrt{\frac{12}{5}gl^3}.$$

V případě 3 při volbě směru $\boldsymbol{B}$ doprava platí

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5l}(-\cos\alpha)}, \quad \alpha \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle.$$

Po dosazení do rovnosti (4) dostaneme

$$U_i = BS\sqrt{\frac{12g}{5l}} \cdot \sin\alpha\sqrt{-\cos\alpha}. \tag{5}$$

Indukční tok je s výjimkou krajních poloh po celou dobu záporný, klesá z nulové hodnoty na hodnotu $\Phi = -BS$, poté opět vzroste na nulovou hodnotu. Ze vztahu (5) plyne, že indukované napětí je nulové pro úhel α s hodnotami $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, přičemž pro $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ je kladné a bude mít maximum, pro $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ je záporné a má minimum (obr. 4).

Lokální extrémy nalezneme derivací

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sin\alpha\sqrt{-\cos\alpha}\right) = \cos\alpha\sqrt{-\cos\alpha} + \sin\alpha\,\frac{\sin\alpha}{2\sqrt{-\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{-2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{2\sqrt{-\cos\alpha}} = \frac{3\sin^2\alpha - 2}{2\sqrt{-\cos\alpha}} = \frac{1 - 3\cos^2\alpha}{2\sqrt{-\cos\alpha}}.$$

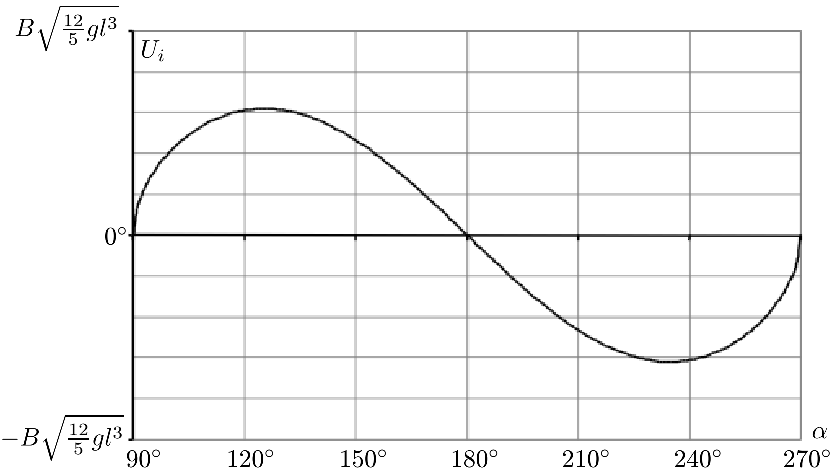
Z podmínky nulové derivace pro $\alpha \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ dostaneme dvě symetrická řešení vzhledem k nejnižší poloze rámečku. Např. z podmínky

$$\frac{3\sin^2\alpha - 2}{2\sqrt{-\cos\alpha}} = 0$$

dostaneme $\sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (maximum) a $\sin\alpha_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ (minimum). Odtud $\alpha_1 = 125{,}3^\circ$ pro maximum a $\alpha_2 = 234{,}7^\circ$ pro minimum.

Dosazením do vztahu (5) a uvážením $S = l^2$ dostaneme hledanou maximální velikost indukovaného napětí

$$U_{i\,\max,\min} = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{27}}\cdot B\cdot\sqrt{\frac{12}{5}gl^3} = \pm\sqrt[4]{\frac{64}{75}}\cdot B\cdot\sqrt{gl^3} = \pm\sqrt{\frac{8}{5\sqrt{3}}}\cdot B\cdot\sqrt{gl^3}.$$



Obr. 4

Jak se s řešením úlohy vypořádali studenti?

Z celkového počtu 50 řešitelů celostátního kola získalo pět studentů plný počet 10 bodů, z nich jako nejlepší řešitel této úlohy byl vyhodnocen student Jakub Krásenský z Gymnázia Jihlava. Celkově se však úloha ukázala ze čtyř teoretických úloh jako nejobtížnější, průměrný bodový zisk byl 3,8, u zbývajících tří úloh bylo dosaženo průměrů 7,1; 5,4 a 5,1.

Všechny úlohy celostátního kola 53. roč. FO kat. A a jejich řešení je možné najít na adrese `www.fyzikalniolympiada.cz`, stejně tak jako ostatní úlohy všech kategorií za posledních 16 let. Pro studenty posledních i nižších ročníků středních škol je to výzva k porovnání svých schopností se svými vrstevníky v krajských kolech jednotlivých krajů a třeba i v celostátním finále.