Martin Malý

O vyjádřitelnosti kombinačních čísel

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 3, 2–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146530

MATEMATIKA

O vyjádřitelnosti kombinačních čísel

Martin Malý, Brno

Abstract. The article deals with the identity

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-p-1-i}{k-p-1} \binom{p+i}{p} = \binom{n}{k},$$

where k, n, p are nonnegative integers meeting the condition $p < k \leq n$. The validity of the identity is discussed and the idea of its proof is outlined.

1. Úvod

Jak známo, kombinační čísla, tj. přirozená čísla, která uvažujeme ve tvaru

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k, n \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n,$$

mají vlastnosti, které lze vyjádřit obecnými větami. Jednou z těchto vlastností, vyjádřitelností každého kombinačního čísla $\binom{n}{k}$, $k \neq 0$, pomocí libovolného celého nezáporného čísla $p < k$ ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-p-1-i}{k-p-1} \binom{p+i}{p},$$

se budeme zabývat v tomto článku. Nejprve se přesvědčíme o tom, že jde o vlastnost každého kombinačního čísla $\binom{n}{k}$, $k \neq 0$, je-li $n = 5$. Pak načrtneme důkazový postup pro obecný případ.

2. Motivační úvaha

Označme $a, \ldots, e$ libovolné objekty, U jejich množinu, M množinu $\{1, \ldots, 5\}$ a vyjděme z tab. 2. Z ní snadno vyčteme, že v tab. 5 jsou zapsány vesměs platné kombinatorické vztahy. Jak lze tyto vztahy odhalit, ilustruje následující příklad.

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
a b c d e	**a** b c d e	**a** **b** c d e	**a** **b** **c** d e	**a** **b** **c** **d** e	**a** **b** **c** **d** **e**
	a **b** c d e	**a** b **c** d e	**a** **b** c **d** e	**a** **b** **c** d **e**	
	a b **c** d e	**a** b c **d** e	**a** **b** c d **e**	**a** **b** c **d** **e**	
	a b c **d** e	**a** b c d **e**	**a** b **c** **d** e	**a** b **c** **d** **e**	
	a b c d **e**	a **b** **c** d e	**a** b **c** d **e**	a **b** **c** **d** **e**	
		a **b** c **d** e	**a** b c **d** **e**		
		a **b** c d **e**	a **b** **c** **d** e		
		a b **c** **d** e	a **b** **c** d **e**		
		a b **c** d **e**	a **b** c **d** **e**		
		a b c **d** **e**	a b **c** **d** **e**		

Tab. 1: Výčet všech k-prvkových podmnožin množiny U podle k od 0 do 5; rámečky ve sloupci pro libovolné $k \in \mathrm{M}\backslash\{1\}$ ohraničují výčty všech 1-prvkových podmnožin množin $\{e\}$, $\{d, e\}$, …, S, kde S je množina tvořená posledními $6 - k$ prvky uspořádané pětice $(a, \ldots, e)$

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
a b c d e	**a** b c d e	**a** **b** c d e	**a** **b** **c** d e	**a** **b** **c** **d** e	**a** **b** **c** **d** **e**
	a **b** c d e	**a** b **c** d e	**a** **b** c **d** e	**a** **b** **c** d **e**	
	a b **c** d e	**a** b c **d** e	**a** **b** c d **e**	**a** **b** c **d** **e**	
	a b c **d** e	**a** b c d **e**	**a** b **c** **d** e	**a** b **c** **d** **e**	
	a b c d **e**	a **b** **c** d e	**a** b **c** d **e**	a **b** **c** **d** **e**	
		a **b** c **d** e	**a** b c **d** **e**		
		a **b** c d **e**	a **b** **c** **d** e		
		a b **c** **d** e	a **b** **c** d **e**		
		a b **c** d **e**	a **b** c **d** **e**		
		a b c **d** **e**	a b **c** **d** **e**		

Tab. 2: Výčet všech k-prvkových podmnožin množiny U podle k od 0 do 5; rámečky ve sloupci pro libovolné $k \in \{3, 4, 5\}$ ohraničují výčty všech 2-prvkových podmnožin množin $\{d, e\}$, $\{c, d, e\}$, …, S, kde S je množina tvořená posledními $7 - k$ prvky uspořádané pětice $(a, \ldots, e)$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$a\,b\,c\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,c\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,c\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boxed{\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}}$
	$a\,\boldsymbol{b}\,c\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,\boldsymbol{c}\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,c\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,d\,\boldsymbol{e}$	
	$a\,b\,\boldsymbol{c}\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,c\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,c\,d\,\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,c\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$	
	$a\,b\,c\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,c\,d\,\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{a}\,b\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$	
	$a\,b\,c\,d\,\boldsymbol{e}$	$a\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,\boldsymbol{c}\,d\,\boldsymbol{e}$	$a\,\boldsymbol{b}\,\boxed{\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}}$	
		$a\,\boldsymbol{b}\,c\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,c\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$		
		$a\,\boldsymbol{b}\,c\,d\,\boldsymbol{e}$	$a\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,e$		
		$a\,b\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,e$	$a\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,d\,\boldsymbol{e}$		
		$a\,b\,\boldsymbol{c}\,d\,\boldsymbol{e}$	$a\,\boldsymbol{b}\,c\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$		
		$a\,b\,c\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$	$a\,b\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$		

Tab. 3: Výčet všech k-prvkových podmnožin množiny U podle k od 0 do 5; rámečky ve sloupci pro libovolné $k \in \{4,\,5\}$ ohraničují výčty všech 3-prvkových podmnožin množin $\{c, d, e\}$, $\{b, c, d, e\}, \ldots,$ S, kde S je množina tvořená posledními $8 - k$ prvky uspořádané pětice $(a, \ldots, e)$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$a\,b\,c\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,c\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,c\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boxed{\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}}$
	$a\,\boldsymbol{b}\,c\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,\boldsymbol{c}\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,c\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,d\,\boldsymbol{e}$	
	$a\,b\,\boldsymbol{c}\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,c\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,c\,d\,\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,c\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$	
	$a\,b\,c\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,c\,d\,\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{a}\,b\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$	
	$a\,b\,c\,d\,\boldsymbol{e}$	$a\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,d\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,\boldsymbol{c}\,d\,\boldsymbol{e}$	$a\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$	
		$a\,\boldsymbol{b}\,c\,\boldsymbol{d}\,e$	$\boldsymbol{a}\,b\,c\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$		
		$a\,\boldsymbol{b}\,c\,d\,\boldsymbol{e}$	$a\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,e$		
		$a\,b\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,e$	$a\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,d\,\boldsymbol{e}$		
		$a\,b\,\boldsymbol{c}\,d\,\boldsymbol{e}$	$a\,\boldsymbol{b}\,c\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$		
		$a\,b\,c\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$	$a\,b\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{e}$		

Tab. 4: Výčet všech k-prvkových podmnožin množiny U podle k od 0 do 5; rámeček ve sloupci pro $k = 5$ ohraničuje výčet všech 4-prvkových podmnožin množiny $\{b, c, d, e\}$ (všimněte si, že množina $\{b, c, d, e\}$ je tvořena posledními $9 - k$ prvky uspořádané pětice $(a, \ldots, e)$)

$$\boxed{\begin{aligned} \binom{5}{3} &= 1\binom{2}{2} + 1\binom{3}{2} + 1\binom{4}{2} \\ \binom{5}{4} &= 2\binom{2}{2} + 1\binom{3}{2} \\ \binom{5}{5} &= 1\binom{2}{2} \end{aligned}}$$

Tab. 5: Zápis vztahů pro čísla tvaru $\binom{5}{k}$, $k \in \mathrm{M} \setminus \{1, 2\}$, odhalitelných „rámečkovou“ metodou užitím tab. 2

Příklad 1: Označme pro každé $k \in \mathrm{M} \cup \{0\}$ symbolem „$l(k)$“ počet všech řádků sloupce pro číslo k tab. 2 představujících zápis podmnožiny množiny U. Pak např. $l(4) = \binom{5}{4}$. Přitom, jak nám napovídají rámečky ve sloupci pro $k = 4$, je $l(4) = 2\binom{2}{2} + 1\binom{3}{2}$. Tedy $\binom{5}{4} = 2\binom{2}{2} + 1\binom{3}{2}$.

Sledujeme-li zprava doleva část tab. 5 tvořenou pravými stranami jednotlivých rovnic, vidíme, že pro každé $n \in \mathrm{M} \setminus \{4, 5\}$ je n-tý sloupec koeficientů kombinačních čísel n-tým řádkem Pascalova trojúhelníku. To ale znamená, že můžeme psát:

$$\binom{5}{3} = \binom{2}{0}\binom{2}{2} + \binom{1}{0}\binom{3}{2} + \binom{0}{0}\binom{4}{2} \tag{I}$$

$$\binom{5}{4} = \binom{2}{1}\binom{2}{2} + \binom{1}{1}\binom{3}{2} \tag{II}$$

$$\binom{5}{5} = \binom{2}{2}\binom{2}{2} \tag{III}$$

Položme si nyní otázku, zda zcela analogické vztahy, jako jsme dostali z tab. 2 pomocí rámečků ve sloupcích pro k od 3 do 5 a Pascalova trojúhelníku, lze získat pomocí rámečků ve sloupcích pro k od 2 do 5 a Pascalova trojúhelníku z tab. 1, resp. pomocí rámečků ve sloupcích pro k od 4 do 5 a Pascalova trojúhelníku z tab. 3, resp. pomocí rámečku ve sloupci pro $k = 5$ a Pascalova trojúhelníku z tab. 4. Odpověď na tuto otázku je kladná; jde o prvky množin po řadě $\{$(IV),(V),(VI),(VII)$\}$, $\{$(VIII),(IX)$\}$, $\{$(X)$\}$ souhrnně uvedené níže. (Ověřte.)

$$\binom{5}{2} = \binom{3}{0}\binom{1}{1} + \binom{2}{0}\binom{2}{1} + \binom{1}{0}\binom{3}{1} + \binom{0}{0}\binom{4}{1} \tag{IV}$$

$$\binom{5}{3} = \binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{1}{1}\binom{3}{1} \tag{V}$$

$$\binom{5}{4} = \binom{3}{2}\binom{1}{1} + \binom{2}{2}\binom{2}{1} \tag{VI}$$

$$\binom{5}{5} = \binom{3}{3}\binom{1}{1} \tag{VII}$$

$$\binom{5}{4} = \binom{1}{0}\binom{3}{3} + \binom{0}{0}\binom{4}{3} \tag{VIII}$$

$$\binom{5}{5} = \binom{1}{1}\binom{3}{3} \tag{IX}$$

$$\binom{5}{5} = \binom{0}{0}\binom{4}{4} \tag{X}$$

Všimněme si blíže rovností (I) až (X). Pravou stranou každé z nich je rozvoj čísla $\binom{5}{k}$, $k \in \mathrm{M}\setminus\{1\}$, utvořený pomocí čísel $\binom{p}{p}, \binom{p+1}{p}, \dots, \binom{p+5-k}{p}$, $0 < p < k$;*) označme jej $\sigma(k,p)$.

Příklad 2: Pravou stranou rovnosti (VII) je rozvoj $\sigma(5,1)$ čísla $\binom{5}{5}$ utvořený pomocí čísla $\binom{1}{1}$, pravou stranou rovnosti (II) je rozvoj $\sigma(4,2)$ čísla $\binom{5}{4}$ utvořený pomocí čísel $\binom{2}{2}, \binom{3}{2}$.

Vcelku jednoduše lze zjistit, že pro každá dvě čísla $k, p \in \mathrm{M}$, $p < k$, je v $\sigma(k,p)$ první sčítanec tvaru $\binom{5-p-1}{k-p-1}\binom{p}{p}$ a poslední sčítanec tvaru $\binom{k-p-1}{k-p-1}\binom{p+5-k}{p}$, přičemž „horní“ čísla levých činitelů jednotlivých sčítanců klesají v celém výrazu po jedné, „horní“ čísla pravých činitelů po jedné rostou a „dolní“ čísla pravých i levých činitelů jsou konstantní. (Proveďte si namátkovou kontrolu.) Pro každá dvě taková čísla k, p je tedy $\sigma(k,p)$ tvaru

$$\binom{5-p-1}{k-p-1}\binom{p}{p} + \binom{5-p-2}{k-p-1}\binom{p+1}{p} + \dots + \binom{k-p-1}{k-p-1}\binom{p+5-k}{p},$$

*) Srv. s popisky tabulek 1 až 4.

stručněji

$$\sum_{i=0}^{5-k} \binom{5-p-1-i}{k-p-1}\binom{p+i}{p}. \qquad (*)$$

To ale znamená, že pro každá dvě přirozená čísla k, p taková, že $p <$ $< k \leq 5$, lze číslo $\binom{5}{k}$ vyjádřit pomocí čísla p ve tvaru $(*)$. Lze v tomto tvaru vyjádřit číslo $\binom{5}{k}$ pomocí čísla p též pro každá dvě celá nezáporná čísla k, p splňující uvedené nerovnosti? Snadno zjistíme, že odpověď na tuto otázku je kladná. S tímto dílčím výsledkem se však nespokojujme a položme si otázku, zda pro každá tři celá nezáporná čísla k, n, p taková, že $p < k \leq n$, je

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-p-1-i}{k-p-1}\binom{p+i}{p} = \binom{n}{k}. \qquad (1)$$

3. Nástin důkazu

Poslední otázka, kterou jsme si položili v předchozí části tohoto článku, je poměrně náročná. V této části se proto nebudeme snažit na ni rigorózně odpovědět, nýbrž se omezíme pouze na několik informací o tom, jak lze postupovat při důkazu identity (1).

Při důkazu identity (1) lze využít toho, že je (poměrně snadno) odvoditelná z identity

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{t-1+m-i}{t-1}\binom{n+i}{n} = \binom{n+m+t}{n+t}, \qquad (2)$$

$m, n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{N}$, jenž představuje zobecnění identity

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}, \qquad (3)$$

$m, n \in \mathbb{N}_0$, kterou jsme již dokázali, pokud jsme vyřešili úlohu 1.106 uvedenou v [1]. Důkaz identity (1) lze tak převést na důkaz identity (2), která – označíme-li $V(m, n, t)$ rovnici (2) – vyplývá z identity (3) a premis

(a) $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \forall t \in \mathbb{N}\colon V(0, n, t)$,

(b) $\forall m, n \in \mathbb{N}_0\ \forall t \in \mathbb{N}\colon V(m, n, t+1) \wedge V(m+1, n, t) \rightarrow V(m+1, n, t+1)$, kde (a) je triviální o (b) se lze přesvědčit přímým důkazem, jenž sestrojíme užitím obecně známé identity

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

$k, n \in \mathbb{N}_0$, $k < n$. Vyplývání identity (2) z identity (3) a uvedených premis naznačuje obr. 1.

$V(0,n,2) \wedge V(1,n,1) \rightarrow V(1,n,2)$

$V(0,n,3) \wedge V(1,n,2) \rightarrow V(1,n,3)$

$\vdots$

$V(1,n,2) \wedge V(2,n,1) \rightarrow V(2,n,2)$

$V(1,n,3) \wedge V(2,n,2) \rightarrow V(2,n,3)$

$\vdots$

atd.

Obr. 1: Diagram naznačující vyplývání identity (2) z identity (3) a premis (a), (b); platnost každé z implikací, kde n je libovolné celé nezáporné číslo, je zaručena premisou (b), rovnosti uvedené v tmavém podtisku dostaneme ze vztahu $V(m,n,1)$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ (tj. z identity 3), z téhož vztahu, popř. z premisy (a) dostaneme v diagramu neuvedenou rovnost $V(0,n,1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, a konečně opět z premisy (a) dostaneme rovnosti uvedené ve světlém podtisku

4. Úloha namísto závěru

Z identity (3) lze odvodit následující speciální případ identity (1)

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{k-1} = \binom{n}{k},$$

$k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Ověřte.

Literatura

[1] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 5. vyd., Prometheus, Praha, 2008.