Vlastimil Dlab

Rovnoběžný šestiúhelník generovaný libovolně daným šestiúhelníkem

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 3, 9–11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146531

Rovnoběžný šestiúhelník generovaný libovolně daným šestiúhelníkem

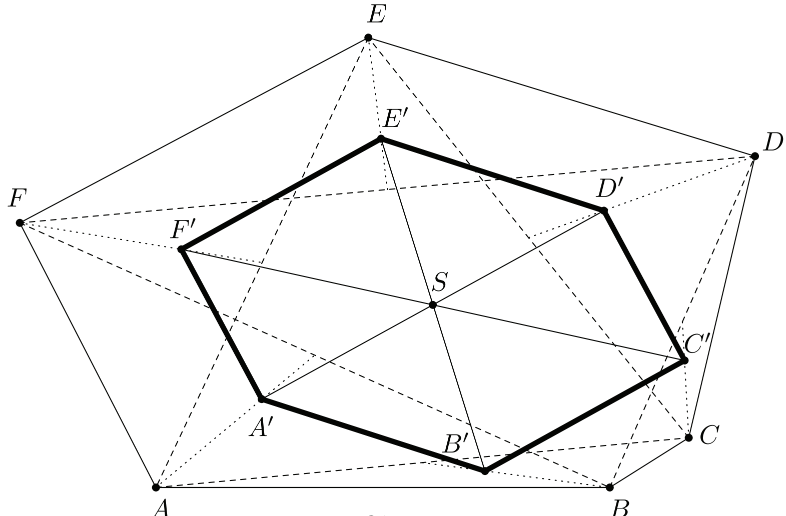
Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. The diagonals of an arbitrary hexagon define six triangles over its sides. The centroids of these triangles form the vertices of a new hexagon whose opposite sides are parallel. The article presents the proof of this fact and determines a relation betweenthe the areas of the hexagons.

Elementární rovinná geometrie byla od samých Euklidových Základů [3] během celé historie matematiky a astronomie zdrojem nejen překvapivých vztahů mezi geometrickými objekty, ale i překvapivých souvislostí s ostatními obory matematiky. Zájem o ní a její nevyčerpatelnou zásobu elementárních poznatků neupadá ani v současnosti.

V tomto článku chceme poukázat na jeden jednoduchý překvapující poznatek o šestiúhelnících a poukázat na přirozené využití komplexních čísel v rovinné geometrii. Tento aspekt komplexních čísel najdeme zdůrazněn v učebnici [2].

Naším cílem je důkaz následujícího tvrzení (znázorněného na obr. 1):



Obr. 1

Věta. *Nechť $ABCDEF$ je libovolný šestiúhelník a nechť A', B', C', D', E', F' jsou postupně těžiště trojúhelníků ABF, BCA, CDB, DEC, EFD a FAE. Potom je $A'B'C'D'E'F'$ rovnoběžný šestiúhelník, tj. $|A'B'| = |E'D'|$ a $A'B' \parallel E'D'$, $|B'C'| = |F'E'|$ a $B'C' \parallel F'E'$, $|C'D'| = |A'F'|$ a $C'D' \parallel A'F'$. Bod S je středem tohoto šestiúhelníku. Přitom*

$$P' = \frac{2}{9}(P + P_1 + P_2),$$

kde P' je obsah šestiúhelníku $A'B'C'D'E'F'$, P je obsah šestiúhelníku $ABCDEF$, P_1 obsah trojúhelníku ACE a P_2 obsah trojúhelníku BDF.

Užitím komplexních čísel je důkaz této věty poměrně jednoduchý. Každému bodu X jednoznačně odpovídá komplexní číslo x. Těžiště X' trojúhelníku XYZ je vyjádřeno komplexním číslem

$$x' = \frac{x + y + z}{3}.$$

To plyne ihned z vyjádření rovnice přímky dané dvěma body U a V, jímž odpovídají komplexní čísla u a v. Potom každý bod W této přímky je popsán rovnicí

$$w = u + t(v - u)$$

pro vhodné reálné číslo t. Pro $t = \frac{1}{2}$ dostáváme bod W splňující rovnost $|UW| = |WV|$, tj. $w = \frac{1}{2}(u + v)$. Pro $t = 1$ dostáváme bod V, pro $t = \frac{1}{3}$ dostáváme bod W splňující rovnost $|UW| = \frac{1}{3}|UV|$, tj. $w = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v$. Těžiště X' trojúhelníku XYZ tedy splňuje podmínku

$$x' = \frac{1}{2}(y + z) + \frac{1}{3}\left[x - \frac{1}{2}(y + z)\right] = \frac{1}{3}(x + y + z).$$

Náš postup dále vyžaduje jednoduché vyjádření obsahu P šestiúhelníku $ABCDEF$, jak jej nalezneme odvozené v [1]:

$$P = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{d} + d\bar{e} + e\bar{f} + f\bar{a}).$$

Podobně

$$P' = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(a'\bar{b'} + b'\bar{c'} + c'\bar{d'} + d'\bar{e'} + e'\bar{f'} + f'\bar{a'}),$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(a\bar{c} + c\bar{e} + e\bar{a}), \qquad P_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(b\bar{d} + d\bar{f} + f\bar{b}).$$

Zde Im (x) značí imaginární část čísla x a $\bar{x}$ komplexně sdružené číslo k číslu x.

A nyní už počítejme: Nejprve zaznamenejme, že bodům A, B, C, D, E, F postupně odpovídají čísla a, b, c, d, e, f, a tedy bodům A', B', C', D', E', F' postupně odpovídají čísla

$$a' = \frac{a+b+f}{3}, \quad b' = \frac{b+c+a}{3}, \quad c' = \frac{c+d+b}{3},$$
$$d' = \frac{d+e+c}{3}, \quad e' = \frac{e+f+d}{3}, \quad f' = \frac{f+a+e}{3}.$$

Proto platí $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{E'D'}$, neboť oba vektory odpovídají číslu

$$\frac{1}{3}[b+c+a-(a+b+f)] = \frac{c-f}{3} = \frac{1}{3}[d+e+c-(e+f+d)].$$

Stejně odvodíme, že $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{F'E'}$ a $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'F'}$. Navíc pro střed s dostáváme

$$s = \frac{a+b+c+d+e+f}{3}.$$

Užitím výše uvedených vzorců se nakonec snadno přesvědčíme, že

$$P' = \frac{1}{18}\,\mathrm{Im}\,[(a+b+f)(\bar{b}+\bar{c}+\bar{a})+(b+c+a)(\bar{c}+\bar{d}+\bar{b})+(c+d+b)(\bar{d}+\bar{e}+\bar{c})+$$
$$+(d+e+c)(\bar{e}+\bar{f}+\bar{d})+(e+f+d)(\bar{f}+\bar{a}+\bar{e})+(f+a+e)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{f})] =$$
$$= \frac{1}{9}\,\mathrm{Im}\,[(a\bar{b}+b\bar{c}+c\bar{d}+d\bar{e}+e\bar{f}+f\bar{a})+(a\bar{c}+c\bar{e}+e\bar{a})+(b\bar{d}+d\bar{f}+f\bar{b})+r] =$$
$$= \frac{2}{9}(P+P_1+P_2),$$

kde r je reálné číslo

$$r = 2(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d}+e\bar{e}+f\bar{f})+$$
$$+[(a+c+e)(\bar{b}+\bar{d}+\bar{f})+(\bar{a}+\bar{c}+\bar{e})(b+d+f)].$$

L i t e r a t u r a

[1] Dlab, V.: Obsah obecného mnohoúhelníku. *Učitel matematiky* **82** (2012), s. 105–108.

[2] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k algebře.* Matfyzpress, Praha, 2013 (připraveno k publikování).

[3] Euclid of Alexandria: *Elementy.* OPS, 2008–2012, (české vydání).