Jaromír Kukal

Poučení nejen o Newtonových býcích

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 1-2, 38–52

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146616

[2] Krbálek, M.: Equilibrium distributions in a thermodynamical traffic gas. *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), s. 5813–5821.

[3] Helbing, D., Farkas, I., Vicsek, T.: Simulating dynamical features of escape panic. *Nature* **407/6803** (2000), s. 487–490.

[4] Krbálek, M.: Inter-vehicle gap statistics on signal-controlled crossroads. *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 205004.

Poučení nejen o Newtonových býcích

Jaromír Kukal, FJFI ČVUT, Praha

Abstract. The classical algebraic problem of three pasturelands and bulls is expressed as a simple mathematical model with unknown parameters. Then, the model is generalised for an arbitrary number of pasturelands and enriched with the rounding of the time data. This problem results in the solution of a system of linear inequations with the use of Fourier elimination method. However, the given problem can also be considered a model confronted with real data with measurement error. The article compares three ways of balancing the measurement error according to Gauss, Chebyshev and Laplace. The model of grazing down the grass is so simple that all the three ways are easy to perform algorithmically. This can be interesting for both the mathematical experts looking for the motives for their first attempts at computer programming and experienced computer programmers looking for new ways.

Slovní úlohy se zemědělskou problematikou nejsou vysloveně populární. Možná je to tím, že jejich autoři chápou uvedený obor lidské činnosti jako příliš triviální, což se odráží v zadání a posléze i v řešení. Jako nezemědělce mě nadchla stará Newtonova úloha o býcích, kteří spásali průběžně dorůstající trávu. Klasik fyziky v ní ukazuje jednoduchý dynamický systém, který je možné studovat pouze algebraickými metodami. Na uvedené úloze mě nejvíce provokuje metodika určení doby vypasení veškeré trávy v ohradě a její případná chyba. Jejím rozborem se dá dospět i k pastvinám a la Fourier, Gauss, Čebyšev či Laplace.

Pastevecká slovní úloha

Traduje se, že Newton kdysi vymyslel následující slovní úlohu:

Tři býci spasou dva akry trávy za dva dny. Dva býci spasou dva akry trávy za čtyři dny. Za kolik dnů spase pět býků šest akrů trávy?

Problém se evidentně nedá řešit úsudkem pomocí přímé a nepřímé úměry, neboť se předpokládá, že tráva během pasení dorůstá. Pokud navíc víme, že počáteční zatravnění, rychlost růstu trávy a rychlost jejího spásání jsou konstantní, vyjde nám ve třetím případě šest dnů. Vydal jsem se po stopách údajně Newtonových pastvin, ohrad, travin, krav, býků a telat, abych zjistil, jak to bylo doopravdy.

Newtonovi býci

V roce 1707 v knize Arithmetica Universalis skutečně Isaac Newton (1643–1727) formuloval problém polí a krav [1] či býků, jak kdo chce, ve kterém jsem pouze jinak označil proměnné:

n_1 býků spase s_1 dílů polí za t_1 dnů

n_2 býků spase s_2 dílů polí za t_2 dnů

n_3 býků spase s_3 dílů polí za t_3 dnů

Jaký je vztah mezi uvedenými devíti celočíselnými veličinami? Pokusme se na slovní úlohu nahlédnout jako na jednoduchý model s neznámými parametry, které je třeba jednoznačně určit ze dvou pozorování a následně je aplikovat na třetí případ.

Nechť $n, s, t \in \mathbb{N}$ jsou počet pasoucích se býků, plocha pastviny a doba vypasení trávy. Uvedené předpoklady nás nutí zavést tři reálné kladné parametry modelu: počáteční množství trávy, rychlost růstu trávy vztažené na jednotku plochy a rychlost spásání trávy jedním býkem. Po jejich označení jako $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ můžeme formulovat vztah mezi světem agronomie a zootechniky jako rovnost

$$as + bst = cnt.$$

Po vydělení kladnou rychlostí pasení a zavedení parametrů

$$p = \frac{a}{c} > 0, \quad q = \frac{b}{c} > 0$$

dostaneme rozumnější vztah

$$ps + qst = nt. \tag{1}$$

Parametry p, q jsou relativizované výchozí množství trávy a relativizovaná rychlost růstu trávy vzhledem ke konzumačním možnostem jednoho býka. Počáteční množství trávy p je tedy vyjádřeno v býkodnech na (jeden) díl pole a rychlost růstu q v býcích na díl pole. Pokud by tráva rostla příliš rychle a býků bylo málo, pak to nespasou nikdy. Proto se budeme modelem pastvy zabývat pouze v případě, kdy navíc platí

$$q < \frac{n}{s}. \tag{2}$$

Tak konečně dostaneme explicitní vztah pro dobu pastvy

$$t = \frac{p}{\dfrac{n}{s} - q}, \tag{3}$$

který oceníme nejen při výpočtu t_3, ale hlavně při analýze chyby modelu v dalších kapitolách. Pokud uvažujeme o m ohradách současně spásaných býky, pak v každé ohradě musí platit rovnost (1), tedy

$$ps_k + qs_kt_k = n_kt_k \quad \text{pro každé } k \in M = \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{4}$$

Vraťme se k Newtonovi a jeho původní úloze. Nejprve pro $m = 2$ vyřešíme soustavu rovnic (4) za předpokladu $t_2 \neq t_1$. Kdyby byly obě doby pasení stejné, těžko bychom odhalili detaily chování pastvin. Při troše trpělivosti ze dvou rovnic získáme oba neznámé parametry

$$p = \frac{\dfrac{n_1}{s_1} - \dfrac{n_2}{s_2}}{\dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{t_2}}, \tag{5}$$

$$q = \frac{\dfrac{n_2t_2}{s_2} - \dfrac{n_1t_1}{s_1}}{t_2 - t_1}. \tag{6}$$

Případnou změnou pořadí prvních dvou ohrad zajistíme první podmínku řešitelnosti Newtonovy úlohy

$$t_2 > t_1.$$

Parametry modelu pastvy p, q musí být kladné, z čehož plynou další dvě podmínky

$$\frac{n_1}{s_1} > \frac{n_2}{s_2},$$

$$\frac{n_2 t_2}{s_2} > \frac{n_1 t_1}{s_1}.$$

Čtvrtá a poslední podmínka daná Newtonovou úlohou je rovnost (1) pro třetí ohradu

$$ps_3 + qs_3 t_3 = n_3 t_3,$$

kde dosazením za parametry z (5) a (6) získáme požadovanou hlavní vazbu mezi celočíselnými veličinami, jejíž odvození je ponecháno čtenáři.

Po návratu ke konkrétní úloze v předchozí stati nalezneme hodnoty parametrů modelu $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$. Naštěstí je q relativně malé, tedy tráva moc rychle neroste, a tak ze vztahu (3) konečně určíme $t = t_3 = 6$.

Obecný model se zaokrouhlováním

Chceme-li se dostat vpřed, můžeme jít cestou zobecňování nebo zpochybňování původního zadání úlohy. Rozumným cílem je pokusit se nalézt neznámé parametry p, q modelu (3) z číselných údajů o $m > 2$ pastvinách. Příklad konkrétního zadání pro čtyři pastviny je uveden v tab. 1.

k	n_k	s_k	t_k
1	3	2	2
2	2	2	4
3	5	6	6
4	5	8	11

Tab. 1: Výchozí data o pastvě

První tři řádky pouze opakují zadání a řešení původní slovní úlohy a nejsou v žádném vzájemném rozporu. Ten však nastává ve čtvrté ohradě, která by podle Newtona měla být holá až za 16 dnů. S počtem býků těžko něco naděláme, ale rozloha pastviny a doba pastvy mohou být v praxi reálné kladné veličiny. Přesnost určení rozlohy pastvin nehodlám zpochybňovat. Horší to bude s dobou pastvy. Dobytek se pase, pouze když vidí, co žere, tedy ne v noci. Pokud osoba stanovující dobu pasení bydlí daleko, pak neslyší případné bučení hlady. Když navíc chodí kontrolovat stáda každý den za úsvitu, pak vlastně zaokrouhluje nahoru dobu pasení na nejbližší celé číslo. Tomu odpovídá komplikovanější model

$$t = \left\lceil \frac{p}{\frac{n}{s} - q} \right\rceil$$

opět s kladnými parametry a omezující podmínkou (2). Pro každou pastvinu pak musí platit

$$t_k - 1 < \frac{p}{\frac{n_k}{s_k} - q} \leq t_k$$

a navíc ještě

$$\frac{n_k}{s_k} > q. \tag{7}$$

Po vynásobení kladným jmenovatelem dostaneme spolu s (7) soustavu lineárních nerovnic

$$\left(\frac{n_k}{s_k} - q\right)(t_k - 1) < p \leq \left(\frac{n_k}{s_k} - q\right) t_k \tag{8}$$

pro kladné neznámé p a q. Pro $t_k \in \mathbb{N}$ plynou z nerovností (8) automaticky i (7), takže je zbytečné je zahrnovat do soustavy nerovnic. Soustavy lineárních rovnic umíme řešit například eliminační metodou, ale co s ostrými a neostrými nerovnicemi?

Fourierova metoda řešení soustav lineárních nerovnic

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) se proslavil nejen svými řadami, integrálem, transformací a metodami řešení parciálních diferenciálních rovnic, ale i jednou maličkostí, kterou obvykle tajíme i studentům vysokých škol. Díky Fourierovi umíme řešit soustavy lineárních rovnic a nerovnic [2] tak, že ze soustavy o N neznámých zkonstruujeme soustavu o $N-1$ neznámých. Pokud to není realizovatelné, pak soustava nemá řešení.

V první fázi Fourierovy metody se zaměříme na rovnice v soustavě. Pokud tam vůbec nějaké jsou, pak vybereme libovolnou rovnici a vyjádříme z ní libovolnou obsaženou proměnnou w. Takto vyjádřenou proměnnou w dosadíme do zbývajících rovnic a nerovnic a upravíme je. Tak se počet rovnic a proměnných zmenší o jednu a počet nerovnic se nemění. Pokud je soustava řešitelná, pak se nám takto podaří „odstranit“ několik proměnných a všechny rovnice, což jste jistě čekali. Mnohem zajímavější je následující postup, tj. eliminace proměnných z nerovnic.

Ve druhé fázi Fourierovy metody vybereme libovolnou proměnnou w, která se vyskytuje ve zbylých nerovnicích. Pokud se v některé nerovnici vybraná proměnná w nevyskytuje, pak ji necháme beze změny. Ve zbylých nerovnicích proměnnou w osamostatníme. Tak dostaneme nerovnice čtyř typů

$$w \leq A_k, \tag{9}$$

$$w < B_k, \tag{10}$$

$$C_k \leq w, \tag{11}$$

$$D_k < w, \tag{12}$$

kde A_k, B_k, C_k, D_k jsou lineární funkcí zbylých proměnných. Nerovnice typu (9) a (10) jsou vlastně horní odhady proměnné w, zatímco v případech (11) a (12) jde o odhady dolní. Pokud chybí v soustavě nerovnic horní odhady w, pak eliminace úspěšně skončila. Obdobně je tomu při absenci dolních odhadů. Ve zbylém případě jsme povinni zkombinovat všechny dolní odhady (indexované pomocí j) se všemi horními odhady (s indexem k). Tak vznikne nová soustava nerovnic neobsahujících proměnnou w a obsahující nerovnice typu

$$\begin{aligned} C_j &\leq A_k,\\ C_j &< B_k,\\ D_j &< A_k,\\ D_j &< B_k, \end{aligned}$$

které vznikly z (9), (10),(11) a (12) sčítáním.

Hlavní nevýhodou Fourierovy metody je obecně velký počet nerovnic, které v průběhu řešení vznikají. To je hlavní důvod, proč upadla téměř i právem v zapomnění. Jedinou výjimkou jsou soustavy nerovnic s malým počtem neznámých, což je i ten náš zaokrouhlený hovězí problém.

Fourierovi býci

Vyzbrojeni starou, ale téměř zapomenutou metodou se můžeme pustit do soustavy nerovnic (8) pro dvě kladné neznámé. Jde o soustavu $2m$ nerovnic, kterou pomocí Fourierovy eliminace proměnné p převedeme na soustavu m^2 nerovnic obsahujících pouze proměnnou q. Laskavému čtenáři doporučuji obecný postup prověřit na datech z tab. 1 a těch 8 nerovnic pro p a q, resp. 16 nerovnic pro q si napsat a upravit. Našim cílem je úlohu o Fourierových býcích vyřešit obecně, tj. zjistit, kdy má vůbec řešení, definovat množinu všech řešení a určit konkrétně jedno z nich.

Pro všechny dvojice indexů $j, k \in M$ dostaneme eliminací p soustavu nerovnic

$$\left(\frac{n_j}{s_j} - q\right)(t_j - 1) < j\left(\frac{n_k}{s_k} - q\right)t_k.$$

Ekvivalentními úpravami z ní dostaneme

$$u_{j,k}\, q < v \leq v_{j,k}, \tag{13}$$

kde

$$u_{j,k} = 1 - t_j + t_k, \qquad v_{j,k} = (1 - t_j)\frac{n_j}{s_j} - \frac{t_k n_k}{s_k}.$$

Nerovnice (13) určují nejen horní a dolní meze pro parametr q, ale i řešitelnost úlohy. Stačí určit několik extrémních hodnot

$$\begin{aligned} T_0 &= \min\{v_{j,k};\ u_{j,k} = 0\},\\ T_1 &= \min\{v_{j,k}/u_{j,k};\ u_{j,k} > 0\},\\ T_2 &= \max\{v_{j,k}/u_{j,k};\ u_{j,k} < 0\},\\ T_3 &= \max(0, T_2). \end{aligned}$$

Přitom musíme mít na paměti, že minimum z prázdné množiny hodnot je $+\infty$ a analogicky maximum z téže množiny je $-\infty$. Úloha o Fourierových býcích má řešení, právě když $T_0 > 0 \wedge T_3 < T_1$. Tím je zároveň určen přípustný interval hodnot parametru q, neboť $T_3 < q < T_1$. Pro libovolné přípustné q je parametr p zdola i shora omezen nerovnicemi (8), pomocí kterých snadno určíme horní a dolní obálku jako funkce

$$\begin{aligned} f(q) &= \min\left\{\left(\frac{n_k}{s_k} - q\right)t_k;\ k \in M\right\},\\ g(q) &= \max\left\{\left(\frac{n_k}{s_k} - q\right)(t_k - 1);\ k \in M\right\}. \end{aligned}$$

Množinu všech řešení dané úlohy tvoří konvexní mnohoúhelník (dokažte), kterému nepatří některé strany a vrcholy (které?). Uvedená množina je popsána vztahem

$$S = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2; g(q) < p \leq f(q)\}.$$

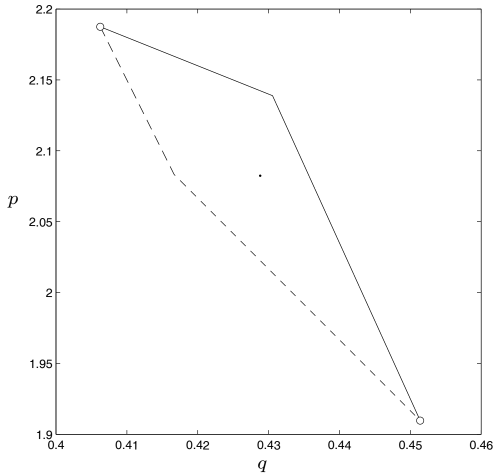
Pokud chceme určit jednoduše libovolné přípustné řešení, pak stačí zveřejnit například

$$q = (T_1 + T_2)/2, \qquad p = (f(q) + g(q))/2.$$

V tab. 2 vidíme pro srovnání výsledky identifikace parametrů Newtonových, Fourierových a dalších býků spolu s chybou e, která je u Fourierových býků ještě nulová, neboť jsme se po zaokrouhlení přesně trefili do zadaných dob pasení. Na obr. 1 vidíme celou množinu přípustných řešení S. Vlivem čtvrté ohrady, kde se býci dlouho nepásli, jsme nuceni připustit, že tráva zas tak rychle neroste, neboť pro všechny prvky z S evidentně platí $q < \frac{1}{2}$.

býci a la	p	q	e	t_1	t_2	t_3	t_4
Newton	2,0000	0,5000	5,0000	2	4	6	**16**
Fourier	2,0825	0,4288	0,0000	2	4	6	11
Gauss	2,4705	0,4014	0,2820	2,2487	4,1269	5,7192	11,0473
Čebyšev	2,4551	0,4067	**0,2457**	**2,2457**	4,1379	**5,7543**	**11,2457**
Laplace	2,3571	0,4107	0,5865	2,1639	**4,0000**	5,5775	**11,0000**

Tab. 2: Odhad parametrů modelu



Obr. 1: Množina řešení Fourierových býků

Kdy se napásli aneb chyba měření času

Je na čase si odpočinout od nerovnic, ale zůstat ještě na pastvinách. Zapomeneme při tom na zaokrouhlování a vrátíme se k modelu (3). Budeme předpokládat, že máme k dispozici zkušeného pastevce, který ze stavu porostu nebo zoufalého chování stáda dovede určit přesnou dobu vypasení veškeré trávy v ohradě, což nutně nemusí být přirozené číslo. Každopádně jde o měření času (relativizované konstantní délkou dne), takže je nutné brát ohled na chybu měření, která rovněž může vysvětlovat rozpory v tab. 1. Chybu měření můžeme chápat jako rozdíl mezi praxí a teorií. Praxe je zde reprezentována naměřenými dobami pasení, avšak teorie je dána modelem (3). Z toho plyne okamžitě chyba v k-té ohradě jako rozdíl

$$\Delta_k = t_k - \frac{p}{\dfrac{n_k}{s_k} - q}. \tag{14}$$

Opět jsme omezeni na kladné hodnoty parametrů a navíc je třeba, aby ve všech ohradách platil vztah (7). Existují tři základní představy, jak formulovat celkovou chybu měření, které se uplatňují při určování parametrů modelu z naměřených dat.

Gaussovy ohrady vyžadují numerické řešení

Johann Carl Fridrich Gauss (1777–1855) se proslavil v mnoha oborech matematiky a fyziky. V oblasti matematické statistiky je známé Gaussovo normální rozdělení a s ním související teorie měření. Z ní využijeme metodu nejmenších čtverců [3]. V případě Gaussových býků se budeme snažit nalézt minimum součtu čtverců odchylek

$$SSQ(q,p) = \sum_{k=1}^{m} \Delta_k^2 \tag{15}$$

vzhledem k odhadovaným parametrům p a q. Model (3) je lineární vůči parametru p, ale nelineární vůči q. Z toho plyne, že parametr q budeme schopni určit pouze numericky.

Po zavedení pomocné veličiny

$$x_k = \frac{n_k}{s_k} - q \tag{16}$$

upravíme (15) na tvar

$$SSQ(q,p) = \sum_{k=1}^{m}(t_k - px_k^{-1})^2 = \sum_{k=1}^{m} t_k^2 - 2p\sum_{k=1}^{m} t_k x_k^{-1} + p^2 \sum_{k=1}^{m} x_k^{-2},$$

což je pro pevně zvolené q kvadratická funkce p s minimem v bodě

$$p = \varphi(q) = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k x_k^{-1}}{\sum_{k=1}^{m} x_k^{-2}}.$$

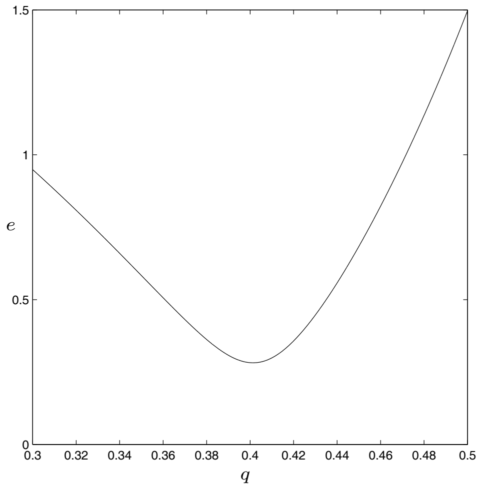
To je cesta, jak zmenšit dimenzi optimalizované funkce (15) na jednorozměrnou funkci $F(q) = SSQ(q, \varphi(q))$ a zabývat se jejím systematickým vyčíslováním pro

$$0 < q < \min\{n_k/s_k; k \in M\} \tag{17}$$

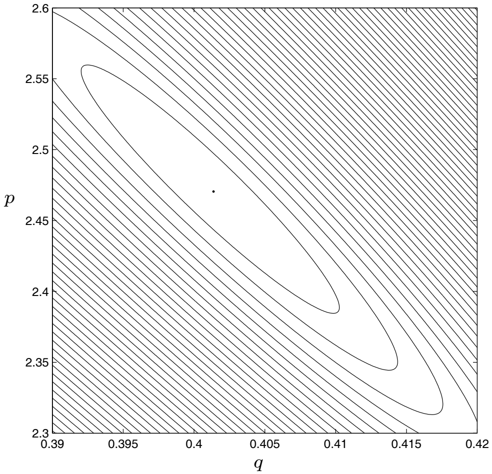
s využitím počítačových programů. Ve statistice je však zvykem převádět SSQ na odhad chyby modelu e jako směrodatné odchylky pro $m-2$ stupňů volnosti podle vztahu

$$e = \sqrt{\frac{SSQ}{m-2}}.$$

Na obr. 2 vidíme závislost chyby modelu e na parametru q, ze které byly na počítači určeny optimální hodnoty parametrů uvedené v tab. 2. Pro kontrolu správnosti řešení je na obr. 3 znázorněna vrstevnicová mapa chyby modelu $e(q, p)$ s roztečí vrstevnic 0,02 a polohou numericky nalezeného minima.



Obr. 2: Chyba modelu pro Gaussovy pastviny



Obr. 3: Vrstevnicová mapa směrodatné odchylky

Čebyševovy pastviny a jiná soustava nerovnic

Pafnutij Lvovič Čebyšev (1825–1894) přišel s jinou koncepcí chyby modelu, která nás opět přivede k soustavě nerovnic.

V teorii aproximace požadoval Čebyšev, aby v absolutní hodnotě největší chyba modelu (14) byla vzhledem k parametrům modelu minimální [4], což je někdy nazýváno principem minimaxu. Tomu odpovídá minimalizace jinak definované chyby dané vztahem

$$e(p,q) = \max\{|\Delta_k|; k \in M\}. \tag{18}$$

Opět budeme úlohu řešit pro pevnou hodnotu parametru q omezenou podmínkou (17). Pro každou ohradu a maximální chybu e musí platit

$$-e \le t_k - \frac{p}{\dfrac{n_k}{s_k} - q} \le +e.$$

S využitím (16), (17) a po ekvivalentních úpravách dostaneme soustavu lineárních nerovnic pro kladné neznámé p a e ve tvaru

$$x_k(t_k - e) \le p \le x_k(t_k + e).$$

Jde opět o soustavu $2m$ lineárních nerovnic o dvou neznámých, ze které Fourierovou metodou snadno eliminujeme parametr p a získáme soustavu

m^2 nerovnic

$$x_j(t_j - e) \leq x_k(t_k + e).$$

Po ekvivalentních úpravách dostaneme dolní odhad chyby

$$e \geq \frac{x_j t_j - x_k t_k}{x_j + x_k}.$$

Má-li být chyba e minimální vzhledem ke q, pak rovnou máme

$$e = \mu(q) = \max\left\{\frac{x_j t_j - x_k t_k}{x_j + x_k}; j, k \in M\right\}. \tag{19}$$

Optimální hodnota parametru q byla opět určena numericky z grafu na obr. 4. Parametr p dopočteme snadno ze vztahu

$$p = \min\{x_k(t_k + e); k \in M\} \tag{20}$$

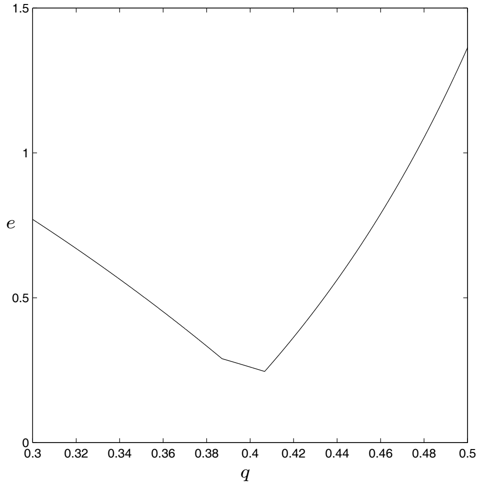
a polohu minima opět ověříme ve vrstevnicové mapě na obr. 5. V tab. 2 si povšimněte, že ve třech ohradách je absolutní hodnota chyby modelu stejná, což je typická vlastnost Čebyševovy aproximace, kdy počet stejných maximálních chyb musí být větší než počet parametrů modelu. Uvedeného faktu si později všiml Jevgenij Jakovlevič Remez (1895–1975) a formuloval příslušné rovnice [5]. V našem případě použijeme tři ohrady se vzájemně různými indexy $i, j, k \in M$ a budeme u nich předpokládat chybu až na znaménko rovnou e. Snadno nahlédneme, že všechny tři chyby nemohou mít v optimálním případě stejné znaménko. Ve dvou ohradách zvolíme chybu rovnou $+e$, ale ve třetí nutně $-e$. Tak dostaneme soustavu tří nelineárních Remezových rovnic

$$t_i - \frac{p}{\dfrac{n_i}{s_i} - q} = +e,$$

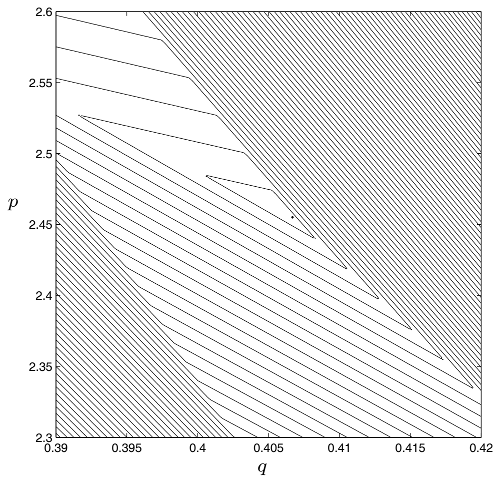
$$t_j - \frac{p}{\dfrac{n_j}{s_j} - q} = +e,$$

$$t_k - \frac{p}{\dfrac{n_k}{s_k} - q} = -e,$$

kterou snadno převedeme na soustavu tří kvadratických rovnic. Celkově však musíme vyšetřit $m(m-1)(m-2)/2$ trojic ohrad a určit prostým porovnáním tu, která má minimální chybu (18). Aplikací na naše čtyři ohrady získáme dvanáct Remezových soustav a nejlepší řešení se shoduje s numerickým podle (19) a (20).



Obr. 4: Chyba modelu pro Čebyševovy ohrady



Obr. 5: Vrstevnicová mapa maximální chyby

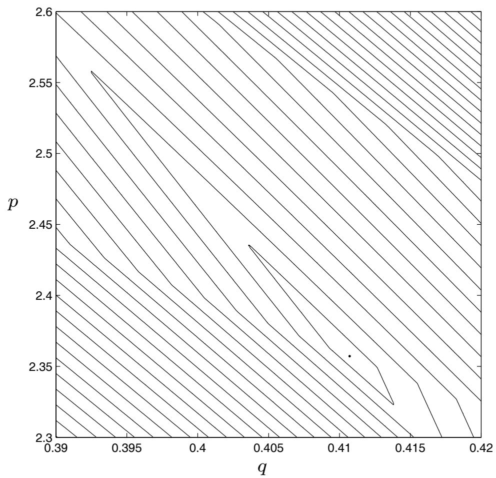
Laplaceova překombinovaná telátka

Jiné pojetí chyby měření navrhl Pierre Simon de Laplace (1749–1827), kterého zajímala minimalizace průměrné absolutní hodnoty [6] odchylky dané vztahem

$$e(p,q) = \sum_{k=1}^{m} |\Delta_k|. \tag{21}$$

Tomu odpovídá dvoustranné exponenciální, neboli Laplaceovo rozdělení chyby. I zde existuje jednoduchý trik založený na faktu, že počet nulových chyb optimálního řešení je nejméně roven počtu neznámých parametrů. Pak se nabízí jednoduchý postup, kdy pro všechny dvojice ohrad určíme parametry p a q původní metodou podle Newtona s využitím vztahů (5) a (6) a jejich analogií pro další dvojice ohrad. Opět nás bude zajímat ta kombinace ohrad, která vede na minimální hodnotu průměrné absolutní chyby (21). Výsledné optimální hodnoty jsou uvedeny v posledním řádku tab. 2 s vyznačením dvou bezchybných ohrad.

Pro názornost je opět uvedena vrstevnicová mapa průměrné chyby s polohou jejího optima na obr. 6. Doufám, že vás oslovila jednoduchost minimalizace (21), která souvisí s nulovými body funkcí s absolutními hodnotami.



Obr. 6: Vrstevnicová mapa střední chyby Laplaceových telat

Závěr

Parkinson kdysi řekl, že každý jednoduchý problém má tendenci sám sebe zkomplikovat natolik, aby se posléze stal prakticky neřešitelným. Modifikací Newtonovy úlohy o býcích se nám to málem stalo, neboť pouze Fourierův, Čebyševův a Laplaceův dobytek vede na explicitně řešitelné úlohy o m ohradách. V případě Gaussových býků raději dáme přednost numerickému řešení jednorozměrné optimalizační úlohy. Pokud bychom chtěli analyzovat uvedeným způsobem skutečnou dynamiku růstu trávy a jejího spásání s různě plným žaludkem, pak bychom museli více studovat modelování biologických systémů, formulovat příslušné diferenciální rovnice a konečně hledat jejich neznámé parametry na počítači. To by sice překročilo rámec článku, ale numericky řešitelné by to rozhodně ještě bylo.

Věřím, že býčí úlohy osloví i IT komunitu, která si s jejich pomocí může procvičit výrazy, větvení, cykly či dokonce symbolické výpočty v libovolném programovacím jazyce.

Literatura

[1] Newton, I.: *Arithmetica Universalis.* London, 1707.

[2] Schrijver, A.: *Theory of Linear and Integer Programming.* John Wiley & Sons, 1998.

[3] Stigler, S. M.: Gauss and the Invention of Least Squares. *Ann. Statist.* **9**, č. 3 (1981), s. 465–474.

[4] Rivlin, T. J.: *The Chebyshev Polynomials.* Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York–London–Sydney, 1974.

[5] Fraser, W.: A Survey of Methods of Computing Minimax and Near-Minimax Polynomial Approximations for Functions of a Single Independent Variable. *J. ACM* **12** (1965), s. 295.

[6] Laplace, P. S.: Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements. *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences Presentés par Divers Savan* **6** (1974), s. 621–656.