Rozhledy matematicko-fyzikální

Jan Tomsa
Existuje obecný vzorec pro součet mocnin přirozených čísel?

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 3, 1–13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146626

Existuje obecný vzorec pro součet mocnin přirozených čísel?

Jan Tomsa, Ústav biofyziky 2. LF UK, Praha

Abstract. The article derives the formula for the sum of the kth powers of positive integers from 1 to n in the form of a polynomial in the variable n. The determination of the coefficients $a_{k,j}$ of the polynomial (a two-parametric problem) is converted into the determination of the members of a progression B_p, so called Bernoulli numbers (a one-parametric problem), and a recurrent formula for these numbers is derived. Then, mutual divisibility of the polynomials is examined for different values of k, and Nikomachos theorem is mentioned as a special case.

Tento problém mě zajímá už od středoškolských let, kdy jsem se v soutěžích (Matematická olympiáda) setkal s úlohami, v nichž se tento prvek vyskytoval. Vždy však šlo buď jen o dokázání nějaké dílčí vlastnosti, nebo o výrazy pro konkrétní mocniny. S obecnou formulí jsem se tehdy nesetkal. Existuje vůbec?

Nechť n a k jsou přirozená čísla (k může být i 0). Označme

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k = \sum_{m=1}^{n} m^k.$$

Zcela zjevně je $S_0(n) = n$. Ke vzorci

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

se váže historka o sedmiletém K. F. Gaussovi, jak rychle sečetl přirozená čísla od 1 do 100, když učitel potřeboval zaměstnat žáky.*) Známé jsou rovněž vzorce

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

*) Pozn. redakce: viz http://www.storyofmathematics.com/19th_gauss.html.

v podrobnější literatuře (např. [1], [6]) lze najít i vzorce pro $S_4(n)$, $S_5(n)$ a další. Dokázat je lze např. indukcí podle n, což přenechávám čtenáři za snadné cvičení.

My si povšimneme faktu, že v těchto vzorcích jsou vesměs polynomy stupně $k+1$. Abychom to mohli tvrdit obecně, dokážeme nejprve jeden pomocný vztah (vzpomínám si, že byl kdysi předmětem jedné olympijské úlohy). Platí totiž

$$n \cdot S_k(n) = S_{k+1}(n) + S_k(1) + S_k(2) + \ldots + S_k(n-1).$$

Důkaz se provede nejlépe pomocí jednoduchého schématu. Rozepíšeme-li n-krát pod sebou sumu $S_k(n)$ do sčítanců, pak uvidíme, že prvky nad diagonálou a na ní tvoří dohromady výraz

$$S_{k+1}(n) = 1 \cdot 1^k + 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k + \ldots + n \cdot n^k,$$

zatímco každý řádek pod diagonálou představuje jeden z následujících sčítanců na pravé straně:

$$\begin{array}{ccccc}
1^k & 2^k & 3^k & \ldots & n^k \\
1^k & 2^k & 3^k & \ldots & n^k \\
1^k & 2^k & 3^k & \ldots & n^k \\
\multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
1^k & 2^k & 3^k & \ldots & n^k
\end{array}$$

Ze vztahu přímo vyplývá důkaz našeho tvrzení indukcí podle k: je-li $S_k(n)$ polynom stupně $k+1$ (splněno pro $k = 0, 1, 2, 3$), pak $n \cdot S_k(n)$ je polynom stupně $k+2$. Z našeho vztahu plyne $S_{k+1}(n) < n \cdot S_k(n)$, jeho stupeň tudíž nemůže být vyšší. (Jiný rekurentní vztah s týmž důsledkem je odvozen např. v [2] a [3].) Můžeme tedy hledat vzorec ve tvaru

$$S_k(n) = a_{k,0} + a_{k,1}n + \ldots + a_{k,k+1}n^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} a_{k,j}n^j.$$

Jde nyní o to nalézt obecné vyjádření koeficientů $a_{k,j}$. Vyjděme z triviálního faktu, že

$$S_k(n+1) = S_k(n) + (n+1)^k.$$

S použitím binomické věty můžeme psát

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_{k,i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} n^j = \sum_{j=0}^{k+1} a_{k,j} n^j + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^j .$$

Vzhledem k tomu, že binomické koeficienty jsou pro $j > i$, resp. $j > k$, rovny nule, můžeme na levé straně prohodit pořadí sumací a sumy na pravé straně sloučit do jedné:

$$\sum_{j=0}^{k+1} n^j \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \binom{i}{j} a_{k,i} = \sum_{j=0}^{k+1} n^j \cdot \left(a_{k,j} + \binom{k}{j} \right)$$

Jde o rovnost dvou polynomů, takže pro každé j musí platit

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{i}{j} a_{k,i} = a_{k,j} + \binom{k}{j} .$$

Speciálně pro $j = 0$ je

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_{k,i} = a_{k,0} + 1.$$

Levá strana je rovna jedné, neboť vyjadřuje hodnotu $S_k(1)$. To ovšem znamená, že $a_{k,0} = 0$, jinými slovy, polynom $S_k(n)$ neobsahuje absolutní člen, a je tudíž „dělitelný“ n (v tom smyslu, že z něj lze n vytknout).

Vraťme se však k předchozí rovnosti. Suma vlevo fakticky začíná až od $i = j$ (předchozí členy jsou rovny nule), přičemž první nenulový člen je roven $a_{k,j}$. Po jeho odečtení přejde rovnost na tvar

$$\sum_{i=j+1}^{k+1} \binom{i}{j} a_{k,i} = \binom{k}{j} .$$

Zavedením nových indexů $p = k - j$, $q = i - j$ ji můžeme přepsat na

$$\sum_{q=1}^{p+1} \binom{k-p+q}{k-p} a_{k,k-p+q} = \binom{k}{k-p}$$

neboli (díky symetrii Pascalova trojúhelníku)

$$\sum_{q=1}^{p+1} \binom{k-p+q}{q} a_{k,k-p+q} = \binom{k}{p}. \tag{$*$}$$

Tato rovnost (resp. soustava rovností) v principu poskytuje rekurentní metodu, jak pro libovolné k koeficienty určovat. Stačí postupně dosazovat $p = 0, 1, 2, \ldots$ a do nové rovnosti vždy koeficienty určené z rovností předešlých. Tak pro $p = 0$ máme

$$\binom{k+1}{1} a_{k,k+1} = \binom{k}{0}, \quad a_{k,k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

Dále pro $p = 1$ (uvažujeme-li $k > 0$) je

$$\binom{k}{1} a_{k,k} + \binom{k+1}{2} a_{k,k+1} = \binom{k}{1}, \quad a_{k,k} = \frac{1}{2}.$$

Známe již první dva členy hledaného polynomu, takže platí

$$S_k(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + o(n^k).$$

To má názornou geometrickou interpretaci. Nakreslíme-li graf funkce $y = x^k$ v intervalu $\langle 0; n \rangle$, pak první člen má význam integrálu, tedy plochy pod grafem funkce. Samotnou sumu $S_k(n)$ můžeme znázornit plochou sloupkového grafu téže funkce pro přirozená x. Pokud ty části plochy sloupků, které přečnívají nad křivku, aproximujeme trojúhelníky, pak součet jejich ploch je roven polovině plochy posledního sloupku, což představuje druhý člen naší prozatímní formule (obr. 1).

Poslední člen $o(n^k)$ je polynom stupně nejvýše $k - 1$. Zbývá určit jeho koeficienty. V zásadě bychom mohli pokračovat v předchozím postupu, tj. např. pro $p = 2$ (uvažujeme $k > 1$) je

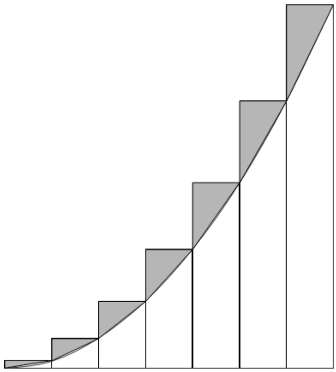
$$\binom{k-1}{1} a_{k,k-1} + \binom{k}{2} a_{k,k} + \binom{k+1}{3} a_{k,k+1} = \binom{k}{2},$$

$$a_{k,k-1} = \frac{k}{12}.$$

Pokud však dosadíme $p = 3$, zjistíme (možná trochu překvapivě), že $a_{k,k-2} = 0$. To mimo jiné znamená, že z hlediska numerických odhadů máme k dispozici velice výhodnou formuli

$$S_k(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \frac{k \cdot n^{k-1}}{12} + o(n^{k-2})$$

(poslední člen je polynom stupně nejvýše $k - 3$).



Obr. 1

Dříve, než budeme pokračovat, porovnejme dosavadní výsledky s obecně známými vzorci uvedenými shora:

$$S_0(n) = \frac{n^1}{1} = n$$

$$S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n^1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{2n^1}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{12} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Poznámka: Absolutní členy, které formule zdánlivě generuje pro $k = 0$, resp. $k = 1$, neuvažujeme, neboť při výpočtu příslušných koeficientů jsme předpokládali $k > 0$, resp. $k > 1$; není zde tedy žádný spor s poznatkem, že jsou rovny nule.

Odvodíme $S_4(n)$. Podle předchozího je $a_{4,5} = \frac{1}{5}$, $a_{4,4} = \frac{1}{2}$, $a_{4,3} = \frac{1}{3}$, $a_{4,2} = 0$, $a_{4,0} = 0$. Z podmínky $S_4(1) = 1$ určíme

$$a_{4,1} = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30},$$

$$S_4(n) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^1}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Najdeme ještě $S_5(n)$. Známe $a_{5,6} = \frac{1}{6}$, $a_{5,5} = \frac{1}{2}$, $a_{5,4} = \frac{5}{12}$, $a_{5,3} = 0$, $a_{5,0} = 0$, ale neznáme $a_{5,2}$ ani $a_{5,1}$. Z podmínky $S_5(1) = 1$ však plyne, že jejich součet je roven $-\frac{1}{12}$. Vzorec tedy můžeme hledat ve tvaru

$$S_5(n) = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 + xn^2 - (x+1)n}{12},$$

kde x je neznámá konstanta. Z podmínky $S_5(2) = 33$ určíme $x = -1$, takže $a_{5,2} = -\frac{1}{12}$, $a_{5,1} = 0$. Hledaný vzorec má tudíž tvar

$$S_5(n) = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

Správnost obou vzorců lze dokázat indukcí, což opět přenechávám čtenáři za snadné cvičení. To vše jsou však jen dílčí úspěchy, obecný vzorec pro $S_k(n)$, resp. pro koeficienty $a_{k,j}$, stále nemáme.

Poznámka: Pohled na dosud odvozené vzorce by nás mohl svádět k lákavé hypotéze, že

$$S_{k+2}(n) = (A_k n^2 + B_k n + C_k) \cdot S_k(n),$$

kde A_k, B_k a C_k jsou vhodné koeficienty. Skutečně totiž

$$\frac{S_2(n)}{S_0(n)} = \frac{2n^2+3n+1}{6},$$

$$\frac{S_3(n)}{S_1(n)} = \frac{n^2+n}{2},$$

$$\frac{S_4(n)}{S_2(n)} = \frac{3n^2+3n-1}{5},$$

$$\frac{S_5(n)}{S_3(n)} = \frac{2n^2+2n-1}{3}.$$

Pokud by hypotéza platila, znamenalo by to, že obecný vzorec pro $S_k(n)$ pro sudé, resp. liché, k můžeme získat z $S_0(n)$, resp. $S_1(n)$, vynásobením konečným počtem kvadratických trojčlenů. Bohužel, není tomu tak. Hledání $S_6(n)$ ve tvaru $(An^2 + Bn + C) \cdot S_4(n)$ nevede k cíli.

Jde tedy o to, zda dokážeme předchozí postup korektně zobecnit. Dosavadní výsledky naznačují, že koeficienty $a_{k,k-p}$ jsou pro pevné p vždy nějakou jednoduchou funkcí k. Pokud bychom měli hypotézu, jak tyto funkce konstruovat, mohli bychom ji dosazením do rovnosti $(*)$ ověřit. Jak ale vyjádřit obecný člen posloupnosti

$$\left\{\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}, \frac{k}{12}, 0, \dots\right\}?$$

Jistou heuristickou ideu nabízí pohled na naši přibližnou formuli. Již jsme se zmínili, že první člen představuje integrál funkce x^k, tedy primitivní funkci. Ve druhém členu vystupuje n^k, tedy funkce samotná, třetí člen obsahuje výraz $k \cdot n^{k-1}$, tedy první derivaci této funkce. Pokud si na chvíli představíme, že n není přirozené číslo, ale spojitá proměnná, a označíme

$$F_{k,m}(n) = \frac{\mathrm{d}^m(n^k)}{\mathrm{d}n^m},$$

nabízí se hypotéza rovnosti

$$S_k(n) = \sum_{m=-1}^{k-1} b_m F_{k,m}(n),$$

kde b_m jsou nějaké (zatím neznámé) koeficienty nezávislé na k.

Poznámka: Důvodem, proč sumu sčítáme pouze do $m = k - 1$, je požadavek zaručit absenci absolutního členu, kterou jsme již dokázali. Pro $m = k$ bychom dostali absolutní člen obecně různý od nuly.

V posledním výrazu klademe

$$F_{k,-1}(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1}, \qquad F_{k,0}(n) = n^k$$

(jinými slovy: primitivní funkci, resp. funkci samotnou považujeme za mínus první, resp. nultou derivaci). Pro $0 < m < k$ je pak samozřejmě

$$F_{k,m}(n) = k(k-1)\dots(k-m+1) \cdot n^{k-m} = \frac{k!}{(k-m)!} \cdot n^{k-m}.$$

Vyjádření pomocí faktoriálů platí dokonce i pro $m = 0$, jakož i pro $m = -1$. Naše hypotéza tudíž vede na vztah

$$a_{k,k-m} = \frac{k!}{(k-m)!} \cdot b_m$$

pro všechna $m < k$ (možnost $m = k$ neuvažujeme, neboť již víme, že $a_{k,0} = 0$). Vztah zjevně platí pro $m = -1, 0, 1, 2$. Hodnoty příslušných koeficientů jsou: $b_{-1} = 1$, $b_0 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{12}$, $b_2 = 0$. Zvolíme-li v rovnosti $(*)$ substituci $m = p - q$, dostaneme po dosazení a úpravě

$$\sum_{m=-1}^{p-1} \frac{b_m}{(p-m)!} = \frac{1}{p!}.$$

Tuto „nekonečnou soustavu rovností“ zapíšeme v maticové formě

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{-1} \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} \\ \frac{1}{1!} \\ \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{3!} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Matice soustavy je dolní trojúhelníkovou maticí, což znamená, že postupně lze z každé rovnice přímo určit jeden koeficient. Jinými slovy, máme rekurentní vzorec pro výpočet členů posloupnosti koeficientů:

$$b_{-1} = 1,$$

$$b_p = \frac{1}{(p+1)!} - \sum_{m=-1}^{p-1} \frac{b_m}{(p-m+1)!} \quad \text{pro } p > -1$$

V poslední rovnosti jsme p nahradili $p + 1$ a oddělili poslední člen sumy.

Hypotézu tím lze pokládat za dokázanou, neboť z rekurentní definice je zřejmé, že taková posloupnost existuje. Výpočtem snadno ověříme, že vzorec dává správné hodnoty pro $p = 0, 1, 2$. Další členy posloupnosti jsou: $b_3 = -\frac{1}{720}$, $b_4 = 0$, $b_5 = \frac{1}{30\,240}$, $b_6 = 0$, $b_7 = -\frac{1}{1\,209\,600}$, $b_8 = 0$, $b_9 = \frac{1}{47\,900\,160}$, $b_{10} = 0, \dots$

Podařil se významný krok, neboť problém dvouparametrický (hledání koeficientů $a_{k,j}$) byl převeden na jednoparametrický (hledání koeficientů b_p), neboli jsme našli posloupnost $\big(b_p\big)_{p=-1}^{\infty}$ takovou, že

$$S_k(n) = \sum_{p=-1}^{k-1} b_p \cdot \frac{k!}{(k-p)!} \cdot n^{k-p}.$$

Známe její první (vlastně „mínus první“) člen i rekurentní předpis pro výpočet dalších členů. Např. pro $k = 6$ obdržíme

$$S_6(n) = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^1}{42} = \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42},$$

pro $k = 7$ obdržíme

$$S_7(n) = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12} = \\ = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}.$$

Za povšimnutí stojí, že hypotéza o kvadratických trojčlenech se sice nepotvrdila, nicméně platí

$$\frac{S_6(n)}{S_2(n)} = \frac{3n^4+6n^3-3n+1}{7},$$
$$\frac{S_7(n)}{S_3(n)} = \frac{3n^4+6n^3-n^2-4n+2}{6}.$$

Bohužel polynomy 4. stupně v čitateli nelze „elegantně“ rozložit.

K úplnému vyřešení problému v uzavřeném tvaru chybí již jen přímé vyjádření p-tého členu posloupnosti (b_p) jako funkce proměnné p (tedy ne rekurentní). Nenulové členy klesají velmi rychle, numerické testy naznačují, že zhruba jako $1/(p+1)!$, z hlediska výpočtů se tudíž jeví výhodnějším zkoumat posloupnost

$$B_p = p! \cdot b_{p-1},$$

pro niž se rekurentní definice změní na

$$B_0 = 1, \qquad B_p = 1 - \frac{1}{p+1} \sum_{m=0}^{p-1} \binom{p+1}{m} B_m.$$

Výsledná formule pak jednoduchou úpravou přejde na tvar

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^{k} B_p \binom{k+1}{p} n^{k-p+1}.$$

Nazývá se *Bernoulliův* [5] (v drobné obměně též *Faulhaberův* [6]) *vzorec* a čísla B_p *Bernoulliova čísla.* Několik prvních hodnot udává tabulka:

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B_p	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2\,730}$	0	$\frac{7}{6}$	0

Na otázku z nadpisu článku tedy můžeme odpovědět kladně, ovšem s tím, že vzorec obsahuje Bernoulliova čísla. Jejich explicitní vyjádření sice existuje, ale je dost složité a jeho odvození by dalece přesahovalo záměr tohoto článku. Zde pro pořádek uveďme jen tolik, že pro lichá $p > 1$ jsou všechna $B_p = 0$, pro sudá $p > 0$ střídají znaménka [5].

Poznámka: Dříve se jako Bernoulliova čísla označovaly jen sudé (nenulové) členy posloupnosti, navíc brané kladně, tj. $\tilde{B}_p = |B_{2p}|$, pro $p = 1, 2, \ldots$ [1]. V této symbolice má náš vzorec formu

$$S_k(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \sum_{p=1}^{[\frac{k}{2}]} \frac{(-1)^{p+1}\tilde{B}_p}{2p} \binom{k}{2p-1} n^{k-2p+1}.$$

(Symbol $[x]$ znamená celou část čísla x, tedy největší celé číslo, které je menší nebo rovné x.)

Vraťme se však ještě na chvíli k rozkladům $S_k(n)$ na součiny polynomů. Pokud pokračujeme ve výpočtech pro vyšší mocniny, i nadále zjišťujeme, že pro sudá $k > 2$ výraz pravidelně obsahuje činitel $S_2(n)$, pro lichá $k > 3$ činitel $S_3(n)$:

$$S_8(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3}{15}$$

$$S_9(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \cdot \frac{2n^6 + 6n^5 + n^4 - 8n^3 + n^2 + 6n - 3}{5}$$

$$S_{10}(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot$$

$$\cdot \frac{3n^8 + 12n^7 + 8n^6 - 18n^5 - 10n^4 + 24n^3 + 2n^2 - 15n + 5}{11}$$

Jinými slovy, pravděpodobnou se nyní jeví hypotéza, že

$$S_{2k}(n) = S_2(n) \cdot P_k(n),$$

$$S_{2k+1}(n) = S_3(n) \cdot Q_k(n),$$

kde $P_k(n)$ a $Q_k(n)$ jsou polynomy stupně $2k-2$ (uvažujeme $k > 1$).

Jak $S_2(n)$, tak $S_3(n)$ obsahují výraz $n(n+1)$. To, že z polynomu $S_k(n)$ lze vytknout n, jsme již dokázali. Dále samozřejmě platí

$$S_k(n) = S_k(n+1) - (n+1)^k$$

a jak již víme, z obou výrazů na pravé straně lze vytknout výraz $n+1$. K důkazu hypotézy je tudíž třeba dokázat, že dále lze vytknout:

- pro sudá k ještě výraz $2n+1$,
- pro lichá k ještě jednou $n(n+1)$, tedy celkově $n^2(n+1)^2$.

Pro lichá k je důkaz snadný. Poslední (lineární) člen polynomu $S_k(n)$ je totiž roven $B_k \cdot n$, a jelikož pro lichá $k > 1$ je $B_k = 0$, je posledním nenulovým členem polynomu člen kvadratický, a lze z něj tudíž vytknout n^2. To však rovněž znamená, že z $S_k(n+1)$ lze vytknout $(n+1)^2$ a vzhledem k poslednímu vztahu lze totéž učinit s $S_k(n)$.

Důkaz pro sudá k je trochu komplikovanější (alespoň jednodušší se mi nepodařilo nalézt). Nejprve rozšiřme definiční obor polynomu $S_k(n)$, definovaného Bernoulliovým vzorcem, na všechna reálná čísla, tj. definujme jej jako funkci na $\mathbb{R}$. Pozorný čtenář si všimne, že odvození vzorce bylo provedeno nezávisle na předpokladu $n \in \mathbb{N}$, takže rovnost

$$S_k(n) = S_k(n-1) + n^k$$

je splněna nejen pro přirozená, ale pro všechna reálná čísla n. Spočtěme nyní $S_k(n) + S_k(-n)$. Dosazením a úpravou získáme

$$S_k(n) + S_k(-n) = \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^{k} B_p \binom{k+1}{p} n^{k-p+1} \left(1 + (-1)^{k-p+1}\right).$$

Vzhledem k tomu, že k je sudé, jsou členy se sudým p rovny nule. Pro lichá $p > 1$ jsou $B_p = 0$, takže jediný nenulový člen na pravé straně je člen s $p = 1$. Je proto

$$S_k(n) + S_k(-n) = \frac{1}{k+1} \cdot B_1 \binom{k+1}{1} n^k \left(1 + (-1)^k\right) = n^k.$$

Z toho však plyne rovnost

$$S_k(n-1) + S_k(-n) = 0.$$

Dosadíme-li $n = \frac{1}{2}$, zjistíme, že $S_k(-\frac{1}{2}) = 0$. Polynom $S_k(n)$ má tedy v bodě $n = -\frac{1}{2}$ nulový bod, a je tudíž dělitelný výrazem $2n + 1$.

Poznámka: Dosazením $n = 0$ bychom získali alternativní důkaz dělitelnosti výrazem $n + 1$. Obdobným postupem pro lichá k bychom odvodili rovnost $S_k(n-1) = S_k(-n)$. Z předchozího vyplývá, že funkce $\tilde{S}_k(n) = S_k(n - \frac{1}{2})$ je pro liché k sudá, pro sudé k lichá.

Vzájemnou dělitelnost polynomů $S_k(n)$ lze znázornit schématem:

$$S_0(n) \to S_1(n) \begin{array}{l} \nearrow \; S_2(n) \to S_{2k}(n), \quad k > 1 \\ \\ \searrow \; S_3(n) \to S_{2k+1}(n), \quad k > 1 \end{array}$$

Zde skončíme, i když možnosti zkoumání problému nejsou vyčerpány. Zajímavé by asi bylo vyšetřovat vlastnosti polynomů $P_k(n)$ a $Q_k(n)$. Zde uveďme jen tolik, že vzhledem k vlastnostem $S_2(n)$, resp. $S_3(n)$, mají stejnou vlastnost jako $S_k(n)$ pro lichá k, a tudíž analogicky $\tilde{S}_k(n)$ definované polynomy $\tilde{P}_k(n)$ a $\tilde{Q}_k(n)$ jsou sudé funkce.

Závěrem doplňme, že rovnost $S_3(n) = S_1^2(n)$ je známa už od starověku, nazývá se *Nikomachův teorém* [6]. Nevíme přesně, jak Nikomachos (kolem r. 150 n. l.) [4] tento vztah dokazoval – pravděpodobně uvažoval podle schématu:

1	2	3	4	5	6	7	…	n
2	4	6	8	10	12	14	…	$2n$
3	6	9	12	15	18	21	…	$3n$
4	8	12	16	20	24	28	…	$4n$
5	10	15	20	25	30	35	…	$5n$
6	12	18	24	30	36	42	…	$6n$
7	14	21	28	35	42	49	…	$7n$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$	$7n$	…	$n\times n$

Na jedné straně je

$$\begin{gathered}(1+2+\ldots+n)+(2+4+\ldots+2n)+\ldots+(n+2n+\ldots+n\cdot n)=\\=1\cdot(1+2+\ldots+n)+2\cdot(1+2+\ldots+n)+\ldots+n\cdot(1+2+\ldots+n)=\\=(1+2+\ldots+n)\cdot(1+2+\ldots+n),\end{gathered}$$

na straně druhé je

$$\begin{gathered}1=1\cdot(1\cdot 1)\\(2+2)+4=2\cdot(2\cdot 2)\\(3+6)+(6+3)+9=3\cdot(3\cdot 3)\\(4+12)+(8+8)+(12+4)+16=4\cdot(4\cdot 4)\\(5+20)+(10+15)+(15+10)+(20+5)+25=5\cdot(5\cdot 5)\\(6+30)+(12+24)+(18+18)+(24+12)+(30+6)+36=6\cdot(6\cdot 6)\end{gathered}$$

Literatura

[1] Rektorys, K., a kol.: *Přehled užité matematiky.* SNTL, Praha, 1981.

[2] Rokyta, M.: *Součet k-tých mocnin přirozených čísel.* `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/general/tahaky/soucty_mocnin.pdf.`

[3] Slavík, J.: Součet k-tých mocnin čísel řady přirozené. *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky* **16** (1887), s. 121–122. `http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/122780/CasPestMatFys_016-1887-3_4.pdf.`

[4] Úlehla, J.: *Dějiny matematiky I.* Dědictví Komenského, Praha, 1901.

[5] `http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number`

[6] `http://mathworld.wolfram.com/PowerSum.html`