Martina Štěpánová

Sylvesterovy–Hadamardovy, Kravčukovy a Sylvesterovy–Kacovy matice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 62 (2017), No. 2, 81–101

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146811`

Sylvesterovy–Hadamardovy, Kravčukovy a Sylvesterovy–Kacovy matice

Martina Štěpánová, Praha

Abstrakt. Je zcela běžné, že speciální třídy matic jsou pojmenovány podle matematika, který je buď poprvé představil nebo podstatně přispěl k jejich studiu. Článek je věnován třem třídám matic nesoucích ve svých názvech jména čtyř matematiků: Sylvesterovým–Hadamardovým maticím, Kravčukovým maticím a Sylvesterovým–Kacovým maticím. Přestože na první pohled nemají uvedené třídy příliš společného, jsou v textu ukázány jejich vzájemné souvislosti.

Všichni zmínění matematici žili v 19. a 20. století, data narození nejstaršího a nejmladšího z nich dělí bez jednoho měsíce sto let. Jedná se o anglického matematika Jamese Josepha Sylvestera (3. 9. 1814–15. 3. 1897), francouzského matematika Jacquese Salomona Hadamarda (8. 12. 1865–17. 10. 1963), ukrajinského matematika Michaila Filipoviče Kravčuka (27. 9. 1892–9. 3. 1942) a matematika Marka Kace (3. 8. 1914–26. 10. 1984), který se narodil na území dnešního Polska a v roce 1943 získal americké občanství.[1] Společným pojítkem tří z nich (s výjimkou Michaila Filipoviče Kravčuka) není jen teorie matic, ale i židovský původ.

V textu budeme symbolem $\mathbb{N}$ značit množinu $\{1, 2, \ldots\}$ a symbolem $\mathbb{N}_0$ množinu $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

1. Sylvesterovy–Hadamardovy matice

V roce 1867 publikoval anglický matematik James Joseph Sylvester článek s neobvykle dlouhým názvem *Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers* [19]. V textu, od jehož vydání letos uplyne přesně 150 let, představil speciální typy reálných matic:

Uvažujme matici prvního, resp. druhého řádu

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

[1] Není však jisté, zda je Kacovo datum narození 3. 8. uvedené na jeho rodném listě správné. Ač Mark Kac narozeniny slavil v tento den, prohlašoval, že se narodil až 16. 8. Odchylku dat vysvětloval tím, že místo jeho narození tehdy spadalo pod nadvládu carského Ruska, které používalo juliánský kalendář (informace jsou převzaty z [14]).

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `stepanov@karlin.mff.cuni.cz`

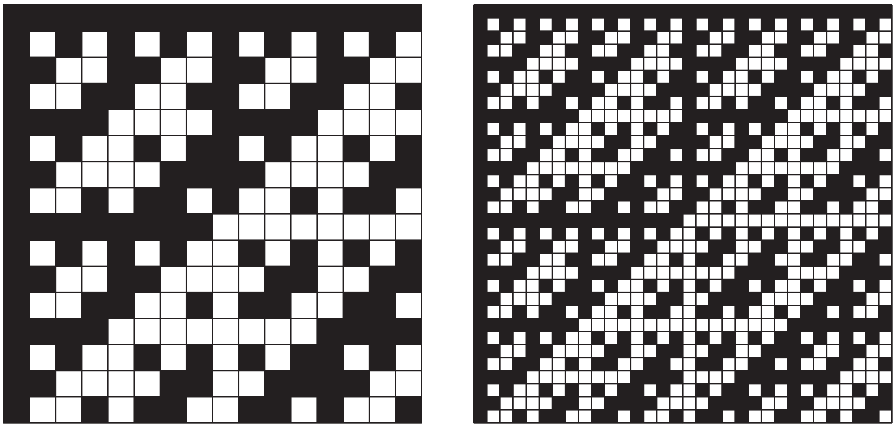
a dále Kroneckerův součin $S_2 \otimes S_2$, tj. matici[2]

$$S_4 = S_2 \otimes S_2 = \begin{pmatrix} S_2 & S_2 \\ S_2 & -S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poté uvažujme Kroneckerovy součiny

$$S_8 = S_2 \otimes S_4, \quad S_{16} = S_2 \otimes S_8, \quad S_{32} = S_2 \otimes S_{16}, \ \ldots, \ S_{2^k} = S_2 \otimes S_{2^{k-1}}, \ \ldots$$

Na následujícím obrázku jsou schématicky znázorněny matice S_{16} a S_{32}, a to pomocí relativně často používaného způsobu: číslo 1 je nahrazeno černým čtverečkem, zatímco číslo -1 bílým čtverečkem.



Obr. 1. Matice S_{16} a S_{32}

Matice S_{2^k}, $k \in \mathbb{N}_0$, mají některé společné vlastnosti zjevné na první pohled: jsou symetrické, mají v prvních řádcích a v prvních sloupcích pouze prvek 1, pro $k \geq 1$ jsou jejich stopy, tj. součty prvků na hlavní diagonále, nulové atd. Další zajímavou společnou vlastností jsou počty změn znamének v jednotlivých řádcích. Sledujme změny na řádcích konkrétní matice S_{16} (obr. 1 vlevo). V prvním řádku k žádné změně znaménka nedochází, v druhém řádku se znaménko změní patnáctkrát, ve třetím sedmkrát, ... Počty změn na jednotlivých řádcích jsou

$$\mathbf{0},\ 15,\ 7,\ \mathbf{8},\ 3,\ \mathbf{12},\ \mathbf{4},\ 11,\ 1,\ \mathbf{14},\ \mathbf{6},\ 9,\ \mathbf{2},\ 13,\ 5,\ \mathbf{10},$$

kde tučně zvýrazněná čísla odpovídají řádkům, které končí prvkem 1 (tj. černým čtverečkem). Ve výčtu počtů změn znamének se vyskytují všechna celá čísla z intervalu $\langle 0; 15 \rangle$. Pokud bychom na obr. 1 počítali změny i pro matici S_{32}, naše oči by zřejmě po chvíli „vypověděly službu“. Počty změn znamének na řádcích matice S_{32}

[2]Kroneckerovým součinem $A \otimes B$ komplexních matic A a B, kde $A = (a_{ij})$ je typu $p \times q$ a B je typu $r \times s$, je bloková matice $(a_{ij}B)$ typu $pr \times qs$.

však lze odvodit z počtu změn v matici S_{16}. Označme p_i počet změn znamének na i-tém řádku matice S_{16}. Potom na i-tém řádku, $1 \leq i \leq 16$, matice S_{32} bude změn $2p_i$, končí-li i-tý řádek matice S_{16} prvkem 1 (černým čtverečkem), a $2p_i + 1$, končí-li i-tý řádek matice S_{16} prvkem -1 (bílým čtverečkem). Na $(i + 16)$-tém řádku matice S_{32} bude změn $2p_i$, končí-li i-tý řádek matice S_{16} prvkem -1 (bílým čtverečkem), a $2p_i+1$, končí-li i-tý řádek matice S_{16} prvkem 1 (černým čtverečkem). Počty změn znamének na řádcích matice S_{32} (odvozené z počtů změn znamének na řádcích matice S_{16}) jsou souhrnně zachyceny v druhém a třetím řádku následující tabulky.

	0	15	7	**8**	3	**12**	**4**	11	1	**14**	**6**	9	**2**	13	5	**10**
1.–16. ř.	0	31	15	16	7	24	8	23	3	28	12	19	4	27	11	20
17.–32. ř.	1	30	14	17	6	25	9	22	2	29	13	18	5	26	10	21

Pro každé celé číslo z intervalu $\langle 0;\, 15\rangle$ tedy dostaneme jak jeho dvojnásobek, tak dvojnásobek zvětšený o 1. Počty změn znamének na řádcích matice S_{32} proto budou opět vyjádřeny všemi celými čísly z intervalu $\langle 0;\, n-1\rangle = \langle 0;\, 31\rangle$. Stejnou úvahu můžeme použít pro libovolné $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}_0$. Dospěli jsme tedy k závěru, že uvedenou vlastnost mají všechny zkonstruované matice S_n, tj. zobrazení, které každému řádkovému indexu přiřazuje odpovídající počet znaménkových změn, je bijekcí množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ na množinu $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.[3]

Pro další výklad však budou nejpodstatnější jiné dvě společné vlastnosti matic S_{2^k}: 1) prvky matic jsou z množiny $\{-1;\, 1\}$; 2) skalární součiny[4] dvou různých řádků (a obdobně sloupců) matice jsou rovny 0 (tj. řádky, resp. sloupce jsou navzájem kolmé).

Naskýtá se otázka, zda existují matice také jiných (i když třeba ne všech) řádů, které splňují obě charakteristiky. Odpověď na otázku lze nalézt v článku francouzského matematika Jacquese Salomona Hadamarda *Résolution d'une question relative aux déterminants* [4], který je datován rokem 1893, či v následujících odstavcích.

Definice 1. Čtvercová matice, jejíž prvky jsou buď -1 či 1 a libovolné dva různé řádky jsou na sebe kolmé, se nazývá *Hadamardova*. Hadamardova matice řádu 2^k, kterou lze vytvořit výše uvedeným způsobem ($S_{2^k} = S_2 \otimes S_{2^{k-1}}$), se nazývá *Sylvesterova–Hadamardova*.

Je zřejmé, že pro Hadamardovu matici H řádu n platí $HH^T = nI$, kde I značí jednotkovou matici řádu n. Po vynásobení tohoto vztahu maticí H^{-1} zleva dostaneme rovnost $H^T = nH^{-1}$ a z ní vynásobením maticí H zprava ekvivalentní rovnost $H^T H = nI$. Odtud plyne, že Hadamardova matice má nejen ortogonální řádky, ale i sloupce.

Hadamardovy matice jsou zobecněním matic Sylvesterových–Hadamardových. Zobecněním Hadamardových matic jsou tzv. *komplexní Hadamardovy matice*, jejichž

[3]Odlišný důkaz uvedeného tvrzení lze nalézt v [13]. Vlastnost, že počty změn znamének na řádcích matic S_{2^k} jsou různá nezáporná celá čísla z intervalu $\left\langle 0; 2^k - 1\right\rangle$, se v uvedeném textu nazývá *full sign spectrum*.

[4]Skalárním součinem „$\cdot$“ přitom rozumíme „středoškolský“ skalární součin, tj. zobrazení množiny $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ do $\mathbb{C}$, kde pro $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ je $u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$.

prvky jsou vybírány z množiny $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$, a jejich zobecněním jsou tzv. *Hadamardovy matice Butsonova typu*, jejichž prvky jsou m-té odmocniny z 1 pro pevně zvolené přirozené číslo m.[5]

Následující matice jsou příklady Hadamardových matic řádů 1, 2 a 4, které nejsou Sylvesterovy–Hadamardovy:

$$\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom se snažili vymyslet Hadamardovu matici řádu 3, budeme neúspěšní. Je zřejmé, že dvojice řádků (sloupců) matice řádu $n \geq 2$ musí vždy mít $\frac{n}{2}$ stejných prvků a $\frac{n}{2}$ rozdílných (a tedy opačných) prvků, a proto Hadamardova matice musí mít vždy sudý řád. Existence Hadamardových matic různých řádů je stále aktuálním tématem. Než pro zajímavost uvedeme několik informací z této oblasti, zavedeme dva nové pojmy.

Definice 2. Hadamardovu matici, která má v prvním řádku a v prvním sloupci pouze prvek 1, nazýváme *Hadamardovou normalizovanou maticí.* Dvě Hadamardovy matice nazýváme *ekvivalentní*, jestliže lze z jedné získat druhou pouze použitím následujících operací: permutací řádků (sloupců) a vynásobením některých řádků (sloupců) číslem -1.

Každá Hadamardova matice je evidentně ekvivalentní s Hadamardovou normalizovanou maticí.

Věta 1. *Řád Hadamardovy matice je* 1, 2 *nebo násobek čísla* 4.

Důkaz: Příklady Hadamardových matic řádů 1 a 2 byly uvedeny výše, lichý řád byl jednoduchou úvahou vyloučen. Uvažujme proto dále Hadamardovu matici, pro jejíž řád n je $n \geq 4$. Převedeme-li ji na ekvivalentní Hadamardovu normalizovanou matici, lze její sloupce přeuspořádat tak, aby její první tři řádky byly

$$\begin{pmatrix} 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 \\ 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 & -1 \ \dots \ -1 & -1 \ \dots \ -1 \\ 1 \ \dots \ 1 & -1 \ \dots \ -1 & 1 \ \dots \ 1 & -1 \ \dots \ -1 \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{a} & \underbrace{\qquad\qquad}_{b} & \underbrace{\qquad\qquad}_{c} & \underbrace{\qquad\qquad}_{d} \end{pmatrix},$$

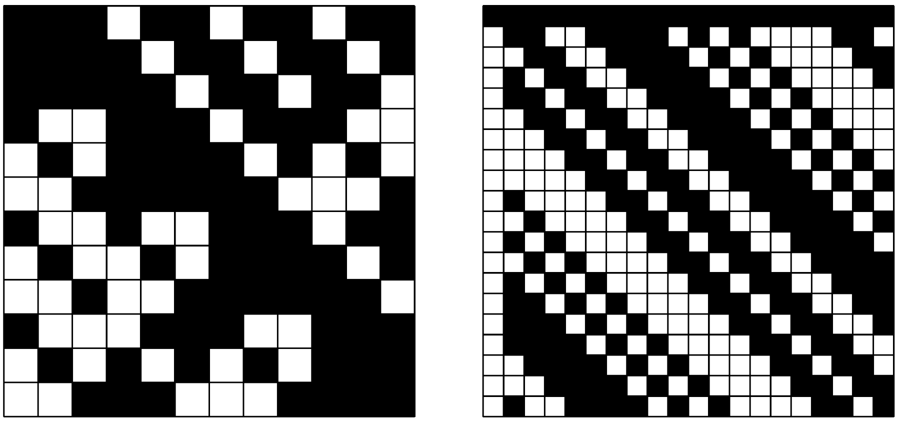
kde počty sloupců v první, druhé, třetí a čtvrté skupině jsou nezáporná celá čísla a, b, c, d. Potom

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= n, \\ a + b - c - d &= 0, \\ a - b + c - d &= 0, \\ a - b - c + d &= 0. \end{aligned}$$

[5] Nutno však podotknout, že terminologie je v této problematice nejednotná. Existují např. přístupy, v nichž jsou naopak komplexní Hadamardovy matice (prvky matice jsou jakákoliv čísla ležící na jednotkové kružnici) zobecněním Hadamardových matic Butsonova typu.

Druhá, resp. třetí, resp. čtvrtá rovnice soustavy plyne z ortogonality vektorů v 1. a 2., resp. v 1. a 3., resp. v 2. a 3. řádku matice. Sečtením rovnic dostaneme $n = 4a$, čímž je důkaz hotov.[6] $\square$

Již Hadamard předpokládal, že pro každé n dělitelné čtyřmi existuje Hadamardova matice řádu n. Tato tzv. *Hadamardova domněnka* se považuje za platnou i dnes. Nejnižším násobkem čísla 4, který nelze vyjádřit jako 2^k, $k \in \mathbb{N}$, je číslo 12. Hadamardovu matici tohoto řádu a rovněž řádu 20 sestavil roku 1893 přímo Jacques Hadamard v již zmíněné práci [4]. Tyto matice jsou znázorněny na obr. 2 opět pomocí čtverečků (existuje jedna, resp. tři třídy navzájem ekvivalentních Hadamardových matic řádu 12, resp. 20).



Obr. 2. Hadamardovy matice řádů 12 a 20

Z metod, které roku 1933 – v roce své předčasné smrti – představil v článku *On orthogonal matrices* [15] anglický matematik Raymond Edward Alan Christopher Paley (1907–1933), vyplývá existence Hadamardových matic řádů $s + 1$ a $2(t + 1)$, kde s, t jsou mocniny prvočísel,[7] $s \equiv 3 \pmod 4$ a $t \equiv 1 \pmod 4$.

Vzhledem k existenci Sylvesterovy, resp. Paleyových konstrukcí, resp. na základě zobecnění Sylvesterovy konstrukce[8] tak platí následující tvrzení:

Věta 2. *Hadamardova matice řádu n existuje pro každé přirozené číslo $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.*

Jestliže jsou matice H_p, H_q Hadamardovy matice řádů p, q, potom $H_p \otimes H_q$ je také Hadamardova matice, a to řádu pq.

Jestliže s_i, t_j jsou mocniny prvočísel, $s_i \equiv 3 \,(mod\, 4)$, $t_j \equiv 1 \,(mod\, 4)$, potom existuje Hadamardova matice řádu

$$\prod_{i,j} 2\,(s_i + 1)\,(t_j + 1)\,.$$

[6] Dodejme, že rovněž $n = 4b = 4c = 4d$.

[7] Nejmenší mocniny prvočísel jsou 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 64, 67, 71, 73, 79, 81, 83, 89, 97, 101, ...

[8] Viz opět [4].

Protože přirozené mocniny čísla 2 náležejí množině $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$ a jelikož je zřejmě $s_i + 1 \in \{4, 8, 12, 20, 24, 28, 32, 44, 48, 60, 68, 72, 80, 84, \ldots\}$, resp. $2\,(t_j + 1) \in \{12, 20, 28, 36, 52, 60, 76, 84, \ldots\}$, existuje pět přirozených čísel dělitelných čtyřmi a menších než 100, které nepatří ani do jedné z uvedených množin: 40, 56, 88, 92 a 96. S výjimkou čísla 92 je však lze zapsat jako součin čísel, které v množinách figurují. Protože řád 92 je jedním z mnoha řádů, k nimž nelze na základě věty 2 Hadamardovu matici sestrojit, bylo k potvrzení Hadamardovy domněnky nutné hledat další metody konstrukcí.

Snahy matematiků o objevení Hadamardovy matice řádu n pro některá relativně malá n trvaly dlouho. Například ještě 100 let po vydání Hadamardova článku [4], tj. roku 1993, byly Hadamardovy matice pro n dělitelné čtyřmi známy jen pro $n < 428$. Matice H_{428} nebyla známa ani na přelomu tisíciletí, ke změně došlo až díky výsledkům článku *A Hadamard matrix of order 428* [8], který roku 2005 publikovali[9] Hadi Kharaghani a Behruz Tayfeh-Rezaie. Poté se pozornost obrátila k dalšímu „problematickému“ číslu dělitelnému čtyřmi, a to k číslu 668. Tento problém zůstává nevyřešen zřejmě dodnes. Totéž platí – vybíráme-li mezi čísly dělitelnými čtyřmi a menšími než 1000 — ještě pro čísla 716 a 892.

Rozlučme se dočasně s Hadamardovými maticemi krátkým přehledem několika jejich dalších vlastností:[10]

Norma každého vektoru v řádku či sloupci Hadamardovy matice H řádu n je $\sqrt{n}$. Matice $\widehat{H} = H/\sqrt{n}$ je zřejmě unitární, neboť je $\widehat{H}^T = \widehat{H}^{-1}$.

Hadamardovy matice jsou úzce spjaty s tzv. *Hadamard's maximum determinant problem*, v němž se hledají obecně komplexní matice řádu n s prvky a_{ij}, $|a_{ij}| \leq 1$, jejichž determinant je v absolutní hodnotě maximální možný. Hadamard dokázal, že tato největší hodnota je $n^{\frac{n}{2}}$ a že mezi maticemi s prvky z množiny $\{-1;\, 1\}$ splňují rovnost $|\det H| = n^{\frac{n}{2}}$ pouze Hadamardovy matice.

2. Kravčukovy matice

Na úvod této části zopakujme několik vzorečků, které v mnohých z nás vyvolají vzpomínky na léta strávená ve škamnách na základní škole.

$$\begin{array}{lcccccc}
(a+b)^2 & = & a^2 & + & 2ab & + & b^2, \\
(a+b)\,(a-b) & = & a^2 & & & - & b^2, \\
(a-b)^2 & = & a^2 & - & 2ab & + & b^2,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
(a+b)^3 & = & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3, \\
(a+b)^2\,(a-b) & = & a^3 & + & a^2b & - & ab^2 & - & b^3, \\
(a+b)\,(a-b)^2 & = & a^3 & - & a^2b & - & ab^2 & + & b^3, \\
(a-b)^3 & = & a^3 & - & 3a^2b & + & 3ab^2 & - & b^3.
\end{array}$$

[9] Výsledek však byl oznámen již v červnu roku 2004.

[10] Zájemce o další studium odkazujeme například na práce [5], [16] či [12].

Je zřejmé, že pokud za a zvolíme 1, získáme polynomy druhého či třetího stupně proměnné b. Volme tedy $a = 1$ a zobecněme exponent na libovolné $n \in \mathbb{N}_0$. Potom

$$(1+b)^{n-j}(1-b)^j = \sum_{i=0}^{n} k_{ij}^{(n)} b^i, \qquad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Umístíme-li koeficienty $k_{ij}^{(n)}$ do matice (pro pevné j do j-tého sloupce), získáme čtvercovou matici řádu $n+1$.

Definice 3. Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Potom *Kravčukovou maticí* $K_n = \left(k_{ij}^{(n)}\right)$ rozumíme matici řádu $n+1$, jejíž prvky $k_{ij}^{(n)}$ jsou koeficienty ze vztahu (1).

Právě definovaný, nepříliš známý pojem se v české literatuře vyskytuje i pod názvem *Krawtchoukovy matice*. Příjmení Krawtchouk se běžně používá v anglických textech na základě jména, které je uvedeno na Kravčukových francouzsky psaných pracích.

Michail Kravčuk ale „své“ matice vůbec nestudoval, zavedeny byly až více než čtyřicet let po jeho smrti. V krátkých článcích *Sur une généralisation des polynomes d'Hermite* [10] a *Sur la distribution des racines des polynomes orthogonaux* [11] z let 1929 a 1933 se však zabýval tzv. *Kravčukovými polynomy*, které mají úzkou souvislost s řádky Kravčukovy matice. Tyto matice představil původem indický matematik Nirmal Kumar Bose (1940–2009) až roku 1985 v knize *Digital filters: theory and applications* [1].

Řádkové, resp. sloupcové indexy Kravčukových matic budeme dále označovat čísly $0, 1, 2, \ldots, n$ místo používanějšího značení $1, 2, \ldots, n+1$ a hovořit budeme o nultém až n-tém řádku, resp. sloupci.

Kravčukovy matice nejnižších řádů jsou

$$K_0 = (1), \qquad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 10 & 2 & -2 & -2 & 2 & 10 \\ 10 & -2 & -2 & 2 & 2 & -10 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Jestliže nulté sloupce Kravčukových matic K_n, $n \in \mathbb{N}_0$, zapíšeme „vycentrovaně“ pod sebe, dostaneme notoricky známý Pascalův trojúhelník:

$\boxed{j=0}$

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}$$

Prvky v nultých sloupcích Kravčukových matic jsou totiž binomické koeficienty, konkrétně $k_{i0}^{(n)} = \binom{n}{i}$. Prvky v posledních, tj. n-tých sloupcích jsou v absolutní hodnotě opět tyto koeficienty, ale lišící se pro lichý řádkový index i znaménkem, tj. $k_{in}^{(n)} = (-1)^i \binom{n}{i}$. V nultých řádcích je pouze prvek 1, v n-tých řádcích se pravidelně střídají prvky 1 a -1. Kravčukovy matice jsou také „až na znaménko symetrické podle středu“: absolutní hodnoty čtyř prvků v i-tém či $(n-i)$-tém řádku a současně v j-tém a $(n-j)$-tém sloupci jsou shodné, přesněji

$$\left|k_{ij}^{(n)}\right| = \left|k_{i,n-j}^{(n)}\right| = \left|k_{n-i,j}^{(n)}\right| = \left|k_{n-i,n-j}^{(n)}\right|.$$

Kravčukova matice má proto pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ tvar

$$K_n = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
\binom{n}{1} & & & & & & -\binom{n}{1} \\
\binom{n}{2} & & k_{ij}^{(n)} & \cdots & \pm k_{ij}^{(n)} & & \binom{n}{2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\binom{n}{n-2} & & \pm k_{ij}^{(n)} & \cdots & \pm k_{ij}^{(n)} & & (-1)^{n-2}\binom{n}{n-2} \\
\binom{n}{n-1} & & & & & & (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} \\
1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-1} & (-1)^n
\end{pmatrix}.$$

Je přirozené se ptát, zda lze vyplnit dosud prázdná místa bez výpočtů koeficientů polynomů $(1+b)^{n-j}(1-b)^j$. Výraz $(1+b)^{n-j}(1-b)^j$ je možné roznásobit a z rovnosti (1) zjistit, že pro prvky Kravčukovy matice platí

$$k_{ij}^{(n)} = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{n-j}{i-r}\binom{j}{r}. \tag{2}$$

Postupovat však můžeme jednodušším způsobem; lze využít tzv. *čtvercové identity*. K jejímu důkazu bude vhodné znát několik vztahů.

Je všeobecně známo, že součtem dvou sousedních prvků na řádku Pascalova trojúhelníku je prvek, který leží bezprostředně pod (a mezi) nimi (při neexistenci jednoho ze sčítanců přičítáme k jednomu prvku číslo 0). V naší symbolice tedy platí vztah $k_{i-1,0}^{(n)} + k_{i,0}^{(n)} = k_{i,0}^{(n+1)}$. Obdobný vztah však platí i pro $j \neq 0$. Uvažujme tedy i trojúhelníky vytvořené ze sloupců Kravčukových matic K_n, $n \in \mathbb{N}_0$, s indexy $j = 1, 2, \ldots$; říkejme jim např. *zobecněné Pascalovy trojúhelníky.* Dva takové trojúhelníky (pro $j = 1$ a $j = 2$) jsou znázorněny níže (na místech, kde $n < j$, je symbol $\bullet$):

$$\boxed{j = 1}$$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n = 0 & & & & & & \bullet & & & & & \\
n = 1 & & & & & 1 & & -1 & & & & \\
n = 2 & & & & \boxed{1} & & \boxed{0} & & -1 & & & \\
n = 3 & & & 1 & & 1 & & -1 & & -1 & & \\
n = 4 & & 1 & & \boxed{2} & & 0 & & -2 & & \boxed{-1} & \\
n = 5 & 1 & & 3 & & \boxed{2} & & -2 & & \boxed{-3} & & -1 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

$$\boxed{j = 2}$$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n = 0 & & & & & & \bullet & & & & & \\
n = 1 & & & & & \bullet & & \bullet & & & & \\
n = 2 & & & & 1 & & -2 & & 1 & & & \\
n = 3 & & & 1 & & \boxed{-1} & & -1 & & 1 & & \\
n = 4 & & 1 & & 0 & & -2 & & 0 & & 1 & \\
n = 5 & 1 & & 1 & & \boxed{-2} & & -2 & & \boxed{1} & & 1 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

V následující větě vyjádříme nejen součet dvou sousedních prvků na témže řádku libovolného (zobecněného) Pascalova trojúhelníku, ale představíme také tři vztahy, které platí pro prvky různých trojúhelníků. Dále přitom budeme prvky $k_{-1,j}^{(n)}$ a $k_{n+1,j}^{(n)}$ pokládat rovny 0.

Věta 3. *Nechť* $K_n = \left(k_{ij}^{(n)}\right)$ *a* $K_{n+1} = \left(k_{ij}^{(n+1)}\right)$ *jsou Kravčukovy matice. Potom platí*

(i) $k_{i-1,j}^{(n)} + k_{ij}^{(n)} = k_{ij}^{(n+1)}$, (iii) $k_{ij}^{(n+1)} + k_{i,j+1}^{(n+1)} = 2k_{ij}^{(n)}$,

(ii) $k_{ij}^{(n)} - k_{i-1,j}^{(n)} = k_{i,j+1}^{(n+1)}$, (iv) $k_{ij}^{(n+1)} - k_{i,j+1}^{(n+1)} = 2k_{i-1,j}^{(n)}$.

Důkaz: (i) Dle (1) je

$$(1+b)^{n+1-j}(1-b)^j \quad = \quad \sum_{i=0}^{n+1} k_{ij}^{(n+1)} b^i, \qquad j = 0, 1, \ldots, n+1. \tag{3}$$

Vypočítáme levou stranu vztahu (3):

$$(1+b)^{n+1-j}(1-b)^j = (1+b)(1+b)^{n-j}(1-b)^j =$$

$$= (1+b)\sum_{i=0}^{n} k_{ij}^{(n)} b^i = \sum_{i=0}^{n} k_{ij}^{(n)} b^i + b\sum_{i=0}^{n} k_{ij}^{(n)} b^i =$$

$$\begin{aligned} = k_{0j}^{(n)} b^0 \; + \; k_{1j}^{(n)} b \; + \; k_{2j}^{(n)} b^2 \; + \; \cdots \; + \; k_{nj}^{(n)} b^n \qquad\qquad\qquad \\ + \; k_{0j}^{(n)} b \; + \; k_{1j}^{(n)} b^2 \; + \; \cdots \; + \; k_{n-1,j}^{(n)} b^n \; + \; k_{nj}^{(n)} b^{n+1} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \left(k_{i-1,j}^{(n)} + k_{ij}^{(n)} \right) b^i.$$

Vzhledem k pravé straně vztahu (3) je $k_{i-1,j}^{(n)} + k_{ij}^{(n)} = k_{ij}^{(n+1)}$.
(ii) Postupujeme zcela analogicky jako v důkazu části (i), pouze uvážíme, že

$$(1+b)^{n+1-(j+1)}(1-b)^{j+1} = (1-b)\,(1+b)^{n-j}\,(1-b)^j\,,$$

což je ekvivalentní rovnosti

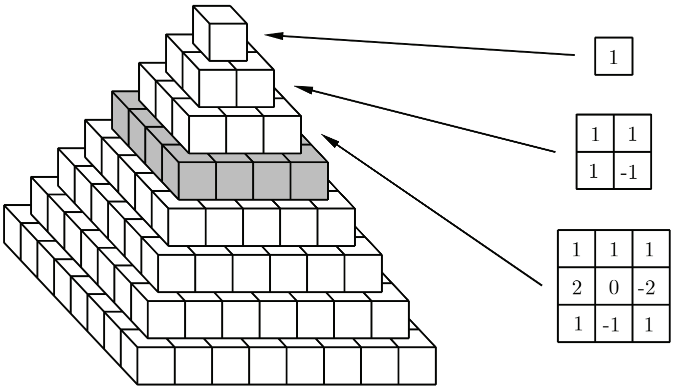
$$\sum_{i=0}^{n+1} k_{i,j+1}^{(n+1)}\, b^i = (1-b)\sum_{i=0}^{n} k_{ij}^{(n)}\, b^i.$$

(iii) Postačí sečíst rovnosti (i) a (ii).
(iv) Postačí odečíst od rovnosti (i) rovnost (ii). □

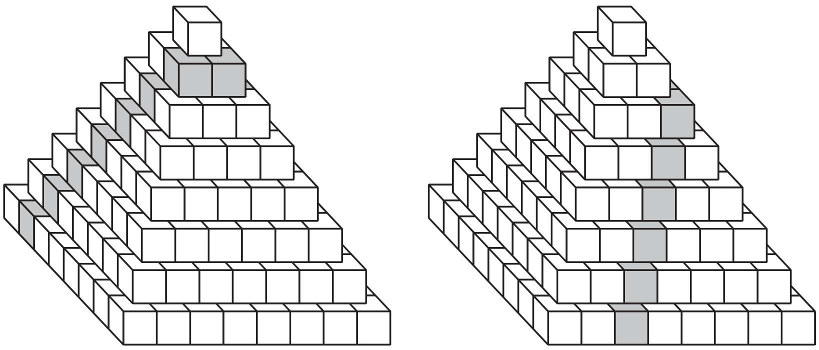
Vztah (i) je notoricky známý. Pro každou ze zbývajících rovností uvedeme příklad pro konkrétní hodnoty indexů (jednotlivá čísla jsou pro lepší orientaci čtenáře zvýrazněna ve výše uvedených zobecněných Pascalových trojúhelnících):

$$\begin{array}{llll} \text{(ii)} & k_{11}^{(2)} - k_{01}^{(2)} = k_{12}^{(3)}\,, & & 0 - 1 = -1\,, \\ \text{(iii)} & k_{41}^{(5)} + k_{42}^{(5)} = 2k_{41}^{(4)}\,, & & -3 + 1 = 2\cdot(-1)\,, \\ \text{(iv)} & k_{21}^{(5)} - k_{22}^{(5)} = 2k_{11}^{(4)}\,, & & 2 - (-2) = 2\cdot 2\,. \end{array}$$

Půvabné zobecnění Pascalových trojúhelníků uvedl Jerzy Kocik v pojednání *Krawtchouk matrices, Feynman path integral and the split quaternions* [9]. Jestliže Kravčukovy matice poskládáme „na sebe“, získáme „jehlan“, kterému budeme říkat *Kravčukova pyramida* (obr. 3). Množinu prvků $k_{ij}^{(n)}$ se stejným indexem n nazývejme *patro* pyramidy (patro pro $n = 3$ je na obr. 3 zvýrazněno šedě).



Obr. 3. Kravčukova pyramida; prvky $k_{ij}^{(n)}$ se stejným indexem $n = 3$



Obr. 4. Prvky $k_{ij}^{(n)}$ se stejným indexem $i = 1$ (vlevo) a $j = 2$ (vpravo)

Na obrázcích 3 a 4 jsou viditelné vždy dvě stěny Kravčukovy pyramidy (přesněji řečeno její části) – levá a přední. Levá stěna obsahuje prvky Pascalova trojúhelníku. Řezy pyramidou „rovinami“ rovnoběžnými s touto stěnou získáme zobecněné Pascalovy trojúhelníky pro jednotlivé indexy j (na obr. 4 vpravo jsou šedě zvýrazněny prvky s indexem $j = 2$). Řezy rovnoběžnými se zadní stěnou pyramidy získáme prvky se stejnými indexy i (na obr. 4 vlevo jsou šedě zvýrazněny prvky s indexem $i = 1$).

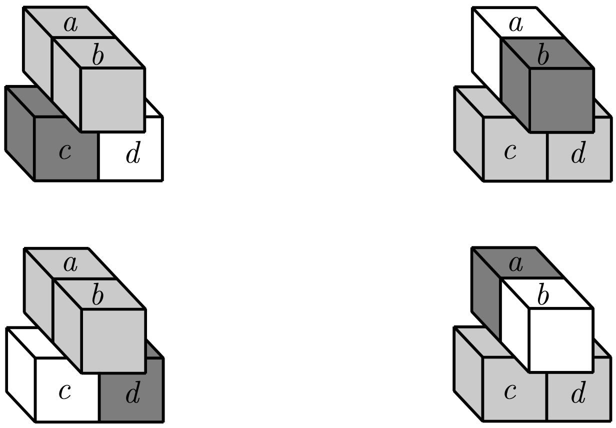
Na Kravčukově pyramidě lze hezky znázornit i vztahy z věty 3. Označíme-li kvůli úspoře místa v obrázku

$$a = k_{i-1,j}^{(n)}, \qquad b = k_{i,j}^{(n)}, \qquad c = k_{i,j}^{(n+1)}, \qquad d = k_{i,j+1}^{(n+1)},$$

lze rovnosti z věty 3 přepsat takto:

(i) $a + b = c$, (iii) $c + d = 2b$,

(ii) $b - a = d$, (iv) $c - d = 2a$.



Obr. 5. Znázornění rovností (i)–(iv) z věty 3

Vybereme-li z pyramidy čtyři stavební kameny odpovídající prvkům a, b, c, d a pro jednotlivé rovnosti obarvíme kameny, s nimiž operujeme, světle šedou barvou a výsledek tmavě šedou barvou, lze vztahy znázornit tak, jak je tomu na obrázku 5.

Ve všech čtyřech vztazích sčítáme (odčítáme) prvky ze stejného patra pyramidy, výsledek nacházíme o patro níže (rovnosti (i) a (ii), na obr. 5 vlevo), nebo o patro výše (rovnosti (iii) a (iv), na obr. 5 vpravo). V případě vztahu (i), resp. (ii) se „pohybujeme“ v rovinách rovnoběžných s levou, resp. pravou stěnou pyramidy. V rovnosti (iii), resp. (iv) se „pohybujeme“ v rovinách rovnoběžných se zadní, resp. přední stěnou pyramidy.

Nyní můžeme přistoupit k formulaci a důkazu výše zmíněné čtvercové identity.

Věta 4. *Nechť*

$$K_n = \begin{pmatrix} & & & \\ & k_{i-1,j}^{(n)} & k_{i-1,j+1}^{(n)} & \\ & k_{i,j}^{(n)} & k_{i,j+1}^{(n)} & \\ & & & \end{pmatrix}$$

je Kravčukova matice pro $i = 1, 2, \ldots, n$ *a* $j = 0, 1, \ldots n-1$. *Potom*

$$k_{i,j}^{(n)} = k_{i-1,j}^{(n)} + k_{i-1,j+1}^{(n)} + k_{i,j+1}^{(n)},$$

tj. pro čtyři navzájem „sousedící“ prvky Kravčukovy matice K_n *platí: prvek v levém dolním rohu je součtem tří prvků zbývajících.*

Důkaz: S využitím rovností (i) a (iii) předchozí věty dostaneme

$$\left(k_{i-1,j}^{(n)} + k_{ij}^{(n)}\right) + \left(k_{i-1,j+1}^{(n)} + k_{i,j+1}^{(n)}\right) = k_{ij}^{(n+1)} + k_{i,j+1}^{(n+1)} = 2k_{ij}^{(n)},$$

a tudíž

$$k_{i-1,j}^{(n)} + k_{i-1,j+1}^{(n)} + k_{i,j+1}^{(n)} = k_{ij}^{(n)}. \qquad \square$$

K sestavení Kravčukovy matice K_n tedy stačí napsat na její nultý řádek $(n+1)$-krát prvek 1, do posledního sloupce binomické koeficienty se střídajícími se znaménky a zbývající prvky vyplnit (od pravého horního rohu k levému dolnímu rohu matice) pomocí čtvercové identity:

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ & & \swarrow & \swarrow & -\binom{n}{1} \\ & & & \swarrow & \binom{n}{2} \\ & & & & \vdots \\ & & & & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Také s Kravčukovými maticemi se na chvíli rozloučíme, tak jako u předcházející třídy matic, uvedením jejich další zajímavé vlastnosti:[11]

- Jestliže K_n je Kravčukova matice, potom $(K_n)^2 = 2^n I$.

U Kravčukových matic tedy na sebe obecně nejsou kolmé dva různé řádky či dva různé sloupce, ale navzájem kolmé jsou dvojice řádek–sloupec s výjimkou dvojic se stejným indexem.

3. Sylvesterovy–Kacovy matice

V roce 1854 se výše zmíněný James Joseph Sylvester zabýval v práci *Théorème sur les déterminants de M. Sylvester* [18] determinanty

$$\begin{vmatrix} \lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Tím si zajistil, že se jeho příjmení dostalo do názvu další třídy matic.

Definice 4. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom *Sylvesterova–Kacova matice* C_n je čtvercová matice řádu $n+1$ tvaru

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & 2 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[11] Podrobnější informace o Kravčukových maticích lze nalézt v publikacích již zmíněného Jerzyho Kocika a dále Philipa Feinsilvera, kolegů z Southern Illinois University v Carbondale. Na základě jejich textů byla sepsána tato část právě čteného článku. Z konkrétních prací uvedených autorů jmenujme [2] a [3].

Příjmení Marka Kace je v pojmenování těchto matic především na počest jeho úspěšného důkazu věty o vlastních číslech matic C_n (viz níže věta 5) a nalezení příslušných vlastních vektorů. Stalo se tak roku 1946 v průběhu jeho přednášek v souvislosti s Brownovým pohybem.[12] Z Kacových publikací jmenujme *Random walk and the theory of Brownian motion* [6] z roku 1947 a *Probability and related topics in the physical sciences* [7] z roku 1959. Sylvesterovy–Kacovy matice jsou relativně často nazývány pouze *Kacovy matice*.

Pro označení řádkových, resp. sloupcových indexů budeme i u těchto matic dále používat čísla $0, 1, \ldots, n$. Při této úmluvě je Sylvesterova–Kacova matice C_n čtvercovou maticí, pro jejíž prvky $c_{ij}^{(n)}$ je

$$c_{ij}^{(n)} = \begin{cases} j, & \text{jestliže } i = j - 1, \\ n - j, & \text{jestliže } i = j + 1, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Několik prvních Sylvesterových–Kacových matic je tedy

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Jak říká následující věta, vlastní čísla Sylvesterovy–Kacovy matice jsou prvky aritmetické posloupnosti s diferencí 2.

Věta 5. *Vlastní čísla Sylvesterovy–Kacovy matice C_n jsou*

$$n, \; n-2, \; n-4, \; \ldots, \; -(n-4), \; -(n-2), \; -n.$$

Větou 5 jsme se zabývali již v minulém ročníku tohoto časopisu v článku *Olga Taussky-Todd: z Olomouce do Pasadeny* [20]. Reprodukovali jsme i jeden její jednoduchý důkaz, který lze v mírně modifikované podobě nalézt v článku *Another look at a matrix of Mark Kac* [21] manželů Olgy Taussky-Todd (1906–1995) a Johna Todda (1911–2007). Důkaz již opakovat nebudeme, jen připomeneme, že jsme pouze vyjádřili determinant charakteristické matice $C_n - \lambda I$, kde I je jednotková matice řádu $n + 1$, a provedli běžné řádkové či sloupcové úpravy, resp. rozvinuli determinant podle jeho řádku. Dospěli jsme k rovnosti

$$\det(C_n - \lambda I) = (n - \lambda) \cdot \det\Big(C_{n-1} - (\lambda + 1)I\Big).$$

[12] Hodnoty vlastních čísel matic C_n byly „tušeny“ již dvacet let před Kacovým prvním důkazem. O důkaz se roku 1926 neúspěšně snažil rakouský fyzik Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961) v třetí části textu [17].

Protože je $\det(C_1 - \lambda I) = (\lambda-1)(\lambda+1)$ a $\det\Big(C_1 - (\lambda+1)I\Big) = \lambda(\lambda+2)$, je vyjádření charakteristických polynomů Sylvesterových–Kacových matic, a tedy i důkaz věty 5, již jen mechanickou záležitostí.

Pro náš další výklad však budou více než důkaz věty důležitější její triviální důsledky: vlastní čísla Sylvesterových–Kacových matic jsou navzájem různá, Jordanův kanonický tvar J_n matice C_n je diagonální matice řádu $n+1$ s prvky $n, n-2, n-4, \ldots, -(n-4), -(n-2), -n$ na diagonále a sloupce matice A ze vztahu $J_n = A^{-1}C_nA$ jsou tvořeny $n+1$ vlastními vektory matice C_n. Pokusme se na matici A nezapomenout. Napadla vás nyní otázka, zda se s ní ještě v dalším textu potkáme, že? Nebo jsme s ní již byli seznámeni? Kdo si počká, ten se dočká! Neodhalujme nyní tajemství a uveďme některé zajímavé vlastnosti matice C_n.

Prvky Sylvesterovy–Kacovy matice C_n jsou nezáporná čísla a součty prvků ve všech jejích sloupcích jsou n. Je proto velmi jednoduché získat z této matice matici *sloupcově stochastickou*, tj. matici, jejíž prvky jsou nezáporné a součty prvků ve všech jejích sloupcích jsou rovny 1. Stačí vzít matici $\widetilde{C}_n = \frac{1}{n}C_n$.

Pro $n = 4$ například dostáváme

$$\widetilde{C}_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky stochastické matice vyjadřují pravděpodobnosti změny jisté situace z jednoho stavu do druhého.

Uvažujme dva klobouky L a P, v nichž je celkem n koulí. Náhodně vybereme libovolnou kouli a přemístíme ji z jednoho klobouku do druhého. Symbolem $\langle k\rangle$ označme stav, kdy je v klobouku L právě k koulí (tj. v klobouku P je $n-k$ koulí). Potom prvek $\widetilde{c}_{ij}^{(n)}$ vyjadřuje pravděpodobnost, že se po přesunu jedné koule změní stav $\langle j\rangle$ na stav $\langle i\rangle$.

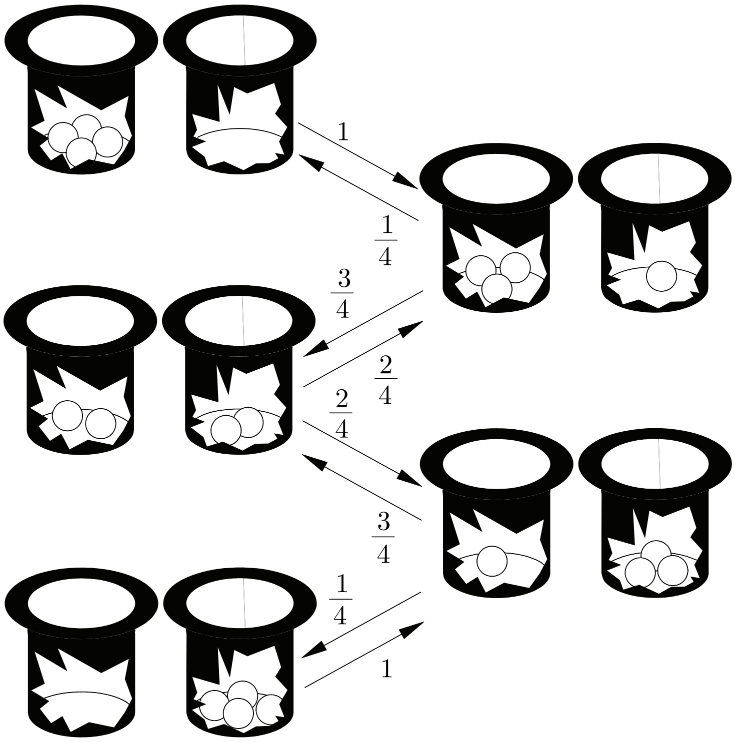
Na obrázku 6 jsou znázorněny klobouky s $n = 4$ koulemi, tj. situace odpovídá matici $\widetilde{C}_4$. Hodnota $\frac{3}{4}$ prvku $\widetilde{c}_{21}^{(4)}$ vyjadřuje pravděpodobnost, že ze stavu $\langle 1\rangle$ přejdeme přemístěním libovolné koule do stavu $\langle 2\rangle$. Při výběru přemisťované koule totiž máme celkem čtyři možnosti (jedna koule v klobouku L a tři v klobouku P), avšak jen při výběru jedné ze tří koulí v klobouku P budou v klobouku L dvě koule, tj. pravděpodobnost přechodu ze stavu $\langle 1\rangle$ do stavu $\langle 2\rangle$ je skutečně $\frac{3}{4}$.

Sylvesterovu–Kacovu matici C_n lze také jednoduchou transformací převést na matici symetrickou.

Věta 6. *Pro Sylvesterovu–Kacovu matici C_n existuje podobná matice $\widehat{C}_n$, která je symetrická. Za matici D_n ze vztahu*

$$\widehat{C}_n = D_n^{-1}C_nD_n$$

lze volit například diagonální matici řádu $n+1$ s prvky $d_{ii} = \sqrt{\binom{n}{i}}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, na diagonále.



Obr. 6. Přemisťování koulí mezi dvěma klobouky

Důkaz: Evidentně je $\widehat{c}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{i}}} \cdot c_{ij}^{(n)} \cdot \sqrt{\binom{n}{j}}$. S výjimkou prvků $\widehat{c}_{i,i+1}^{(n)}$ a $\widehat{c}_{i+1,i}^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, budou prvky $\widehat{c}_{ij}^{(n)}$ nulové.
Protože $c_{i,i+1}^{(n)} = i+1$, platí pro prvky $\widehat{c}_{i,i+1}^{(n)}$ (v linii ihned nad diagonálou)

$$\widehat{c}_{i,i+1}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{i}}} \cdot (i+1) \cdot \sqrt{\binom{n}{i+1}} = \sqrt{(n-i)\,(i+1)}.$$

Jelikož $c_{i+1,i}^{(n)} = n-i$, platí pro prvky $\widehat{c}_{i+1,i}^{(n)}$ (v linii ihned pod diagonálou)

$$\widehat{c}_{i+1,i}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{i+1}}} \cdot (n-i) \cdot \sqrt{\binom{n}{i}} = \sqrt{(n-i)\,(i+1)}$$

a důkaz je hotov. □

Např. pro $n = 3$ je

$$\widehat{c}_{01}^{(3)} = \widehat{c}_{10}^{(3)} = \sqrt{3}, \qquad \widehat{c}_{12}^{(3)} = \widehat{c}_{21}^{(3)} = 2 \qquad \text{a} \qquad \widehat{c}_{23}^{(n)} = \widehat{c}_{32}^{(n)} = \sqrt{3},$$

o čemž se můžeme přesvědčit i vypočítáním součinu $D_3^{-1}C_3D_3$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Vztahy mezi třídami matic

Představili jsme tři třídy matic, které spolu na první pohled příliš nesouvisí. Nejvýraznějšími společnými rysy jsou zcela jistě skutečnosti, že se jedná o matice čtvercové a že jejich prvky jsou celá čísla. Nyní ukážeme, že jsou v rodině matic blízkými příbuznými a že vztahy mezi nimi jsou relativně důvěrné.

Používejme dále řádkové i sloupcové indexy všech matic, tedy i Sylvesterových–Hadamardových, z množiny $\{0, 1, \ldots\}$.[13]

Uvažujme Kravčukovu matici K_n. Víme, že „až na znaménka je středově souměrná“. Převeďme ji jednoduchou operací na matici symetrickou.

Definice 5. *Symetrickou Kravčukovou maticí* M_n budeme rozumět matici

$$M_n = K_nB_n$$

řádu $n+1$, kde B_n je čtvercová diagonální matice řádu $n+1$, jejíž prvky b_{ii} na diagonále jsou binomické koeficienty $\binom{n}{i}$.

Násobíme tedy j-tý sloupec Kravčukovy matice binomickým koeficientem $\binom{n}{j}$. Např.

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Početní ověření, že přívlastek *symetrická* je v názvu matice $M_n = \left(m_{ij}^{(n)}\right)$ zcela na místě, tj. že platí $m_{ij}^{(n)} = m_{ji}^{(n)}$, necháváme na čtenáři.[14]

Protože $M_n = K_nB_n$, je $K_n = M_nB_n^{-1}$. Pokud bychom tedy naopak chtěli ze symetrické Kravčukovy matice M_n získat Kravčukovu matici K_n, stačí matici M_n vynásobit zprava diagonální maticí s prvky $b_{ii}^{-1} = 1/\binom{n}{i}$.

[13] Sylvesterova–Hadamardova matice S_{2^k} je řádu 2^k, její řádkové a sloupcové indexy jsou z množiny $\left\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\right\}$; Kravčukova matice K_n je řádu $n + 1$, indexy jsou z množiny $\{0, 1, \ldots, n\}$ atd.

[14] Pro zájemce přidáváme nápovědu: prvky $m_{ij}^{(n)}$ a $m_{ji}^{(n)}$ stačí vyjádřit v závislosti na prvcích $k_{ij}^{(n)}$ a $k_{ji}^{(n)}$, poté zapsat pomocí vztahu (2) a výsledky porovnat.

Právě zavedená symetrická Kravčukova matice nám umožní propojit Sylvesterovy–Hadamardovy matice S_{2^k} s Kravčukovými maticemi K_n, a to i pro $n \geq 2$. Pro nejnižší řády je přímo $S_1 = K_0$ a $S_2 = K_1$.

Definice 6. Nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a $n = \sum_l d_l 2^l$ (binární rozvoj čísla n). Potom zobrazení $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ nazveme *dvojkovou přeřazovací funkcí*, jestliže

$$f(n) = \sum_l d_l.$$

Jelikož prvky d_l mohou nabývat jen hodnot 0 nebo 1, je hodnota $f(n)$ rovna počtu jedniček — jakožto koeficientů — v binárním rozvoji čísla n.

V následující tabulce je několik hodnot $f(n)$ pro nejmenší n.

n											$f(n)$
0	$=$									$0 \cdot 2^0$	0
1	$=$									$1 \cdot 2^0$	1
2	$=$							$1 \cdot 2^1$			1
3	$=$							$1 \cdot 2^1$	$+$	$1 \cdot 2^0$	2
4	$=$					$1 \cdot 2^2$					1
5	$=$					$1 \cdot 2^2$			$+$	$1 \cdot 2^0$	2
6	$=$					$1 \cdot 2^2$	$+$	$1 \cdot 2^1$			2
7	$=$					$1 \cdot 2^2$	$+$	$1 \cdot 2^1$	$+$	$1 \cdot 2^0$	3
8	$=$			$1 \cdot 2^3$							1
9	$=$			$1 \cdot 2^3$					$+$	$1 \cdot 2^0$	2
10	$=$			$1 \cdot 2^3$			$+$	$1 \cdot 2^1$			2
11	$=$			$1 \cdot 2^3$			$+$	$1 \cdot 2^1$	$+$	$1 \cdot 2^0$	3
12	$=$			$1 \cdot 2^3$	$+$	$1 \cdot 2^2$					2
13	$=$			$1 \cdot 2^3$	$+$	$1 \cdot 2^2$			$+$	$1 \cdot 2^0$	3
14	$=$			$1 \cdot 2^3$	$+$	$1 \cdot 2^2$	$+$	$1 \cdot 2^1$			3
15	$=$			$1 \cdot 2^3$	$+$	$1 \cdot 2^2$	$+$	$1 \cdot 2^1$	$+$	$1 \cdot 2^0$	4
16	$=$	$1 \cdot 2^4$									1

Je zřejmé, že $f(2^k) = 1$ a že $f(2^k + t) = 1 + f(t)$ pro $0 \leq t < 2^k$. Přidáme-li k poslednímu vztahu údaj $f(0) = 0$, získáme rekurzivní zavedení funkce f. Platnost rovnosti $f(2^k + t) = 1 + f(t)$ je názorně vidět v posledním sloupci tabulky: je-li $n = 2^k$, sníží se hodnota $f(n)$ na 1 a počet koeficientů $d_l = 1$ se načítá jakoby znovu od začátku. Nejprve se zopakují hodnoty $f(2^{k-1})$ až $f(2^k - 1)$ a poté se tyto hodnoty zvětší o jedničku.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 \\
1 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 3 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 3 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 & 5 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Věta 7. *Nechť* $S_{2^k} = (s_{qr})$ *je Sylvesterova–Hadamardova matice. Potom pro prvky* $m_{ij}^{(k)}$ *symetrické Kravčukovy matice* M_k *řádu* $k+1$ *platí*

$$m_{ij}^{(k)} = \sum_{\substack{f(q)=i\\ f(r)=j}}^{k} s_{qr}.$$

Při hledání prvků symetrické Kravčukovy matice tedy postupujeme takto: ohodnotíme řádky a sloupce matice S_{2^k} pomocí funkce f a prvky $m_{ij}^{(k)}$ poté získáme sečtením všech prvků s_{qr}, které leží v řádcích a sloupcích, jejichž ohodnocení je i a j.

Potřebujeme přitom znát hodnoty prvků $m_{ij}^{(k)}$ pro všechna $i, j = 0, 1, \ldots, k$. Čísla $m_{ij}^{(k)}$ pomocí vztahu uvedeného ve větě 7 doopravdy získáme, neboť $f(2^k - 1) = k$, a tedy

$$\bigl\{f(0), f(1), \ldots, f(2^k-1)\bigr\} = \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Postup ukážeme na přechodu od konkrétní matice $S_{2^3} = S_8$ k symetrické Kravčukově matici M_3 řádu 4. Matice S_8 spolu s ohodnocením řádků a sloupců je

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 3 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \mathbf{2} \\ 1 \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ 3 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & 1 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & -1 & \mathbf{-1} & 1 & -1 & 1 \\
1 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & -1 & \mathbf{-1} & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Například prvek $m_{21}^{(3)}$ je součtem prvků v řádcích ohodnocených 2 ($q = 3, 5, 6$) a současně ve sloupcích ohodnocených 1 ($r = 1, 2, 4$), tj.

$$m_{21}^{(3)} = s_{31} + s_{32} + s_{34} + s_{51} + s_{52} + s_{54} + s_{61} + s_{62} + s_{64} = -3.$$

Po výpočtu zbývajících prvků získáme skutečně matici

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a po vynásobení této matice zprava diagonální čtvercovou maticí s prvky $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$ na diagonále i matici K_3.

Pojďme ještě odhalit vztah Kravčukových a Sylvesterových–Kacových matic, čímž dokončíme propojení všechny tříd matic uvedených v článku.

Vzpomínáte na neodtajněné tajemství? Na transformační matici A ze vztahu $AJ_n = C_n A$ tvořenou vlastními vektory Sylvesterovy–Kacovy matice C_n? Matici A již známe, není to totiž nic jiného než Kravčukova matice K_n! Složky každého z $n+1$

vlastních vektorů matice C_n jsou, vybereme-li vlastní vektory začínající prvkem 1, právě koeficienty Kravčukovy matice pro $j = 0, 1, \ldots, n$. Například pro $n = 3$ tedy platí $K_3 J_3 = C_3 K_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Závěr

Zavzpomínejme na závěr na všechny definované třídy matic. Představme si je jako města na mapě a projděme znovu cesty, po nichž můžeme tato místa navštívit.

Za výchozí stanoviště pro zdolání túry je dobré zvolit Sylvesterovy–Hadamardovy matice S_{2^n} řádu 2^n, které jsou součástí aglomerace matic Hadamardových. Od matic S_{2^n} lze s pomocí dvojkové přeřazovací funkce vystoupat k symetrickým Kravčukovým maticím M_n řádu $n + 1$, od nichž vede nenáročná cesta s jedinou překážkou v podobě násobení vhodnou diagonální maticí ke Kravčukovým maticím K_n řádu $n+1$. Do cíle, ke Sylvesterovým–Kacovým maticím C_n řádu $n+1$, dospějeme nepříliš znaveni pomocí vztahu $C_n = K_n J_n K_n^{-1}$, kde Jordanovy kanonické tvary J_n sestavíme velice jednoduše s využitím věty o vlastních číslech matic C_n.

Poděkování. Děkuji touto cestou doc. Antonínu Slavíkovi, doc. Jindřichu Bečvářovi a rovněž mně neznámému recenzentovi za přečtení předchozí verze textu a za následné cenné připomínky.

L i t e r a t u r a

[1] Bose, N.: *Digital filters: theory and applications.* North-Holland, Amsterdam, 1985.

[2] Feinsilver, P., Kocik, J.: *Krawtchouk matrices from classical and quantum random walks.* In Viana, M. A. G., Richards, D. P. (eds.): Algebraic Methods in Statistics and Probability, AMS, 2001, 83–96.

[3] Feinsilver, P., Kocik, J.: *Krawtchouk polynomials and Krawtchouk matrices.* In Baeza-Yates, R., Glaz, J., Gzyl, H., Hüsler, J., Palacios, J. L. (eds.): Recent Advances in Applied Probability, Springer-Verlag, Boston, 2005, 115–141.

[4] Hadamard, J.: *Résolution d'une question relative aux déterminants.* Bull. des Sci. Math. *17* (1893), 240–246.

[5] Horadam, K. J.: *Hadamard matrices and their applications.* Princeton University Press, Princeton, 2006.

[6] Kac, M.: *Random walk and the theory of Brownian motion.* Amer. Math. Monthly *54* (1947), 369–391.

[7] Kac, M.: *Probability and related topics in physical sciences.* Interscience Publishers, New York, 1959.

[8] Kharaghani, H., Tayfeh-Rezaie, B.: *A Hadamard matrix of order 428.* J. Comb. Des. *13* (2005), 435–440.

[9] Kocik, J.: *Krawtchouk matrices, Feynman path integral and the split quaternions.* In Budzban, G., Hughes, H. R., Schurz, H. (eds.): Probability on algebraic and geometric structures, AMS, 2016, 131–164.

[10] Krawtchouk, M.: *Sur une généralisation des polynomes d'Hermite.* C. R. Acad. Sci. *189* (1929), 620–622.

[11] Krawtchouk, M.: *Sur la distribution des racines des polynomes orthogonaux.* C. R. Acad. Sci. *196* (1933), 739–741.

[12] Lampio, P. H. J.: *Classificaton of difference matrices and complex Hadamard matrices.* Aalto University publication series Doctoral dissertations 177/2015, Helsinki, 2015.

[13] Mitrouli, M.: *Sylvester Hadamard matrices revisited.* Spec. Matrices *2* (2014), 120–124.

[14] O'Connor, J. J., Robertson, E. F.: *Mark Kac.* Dostupné z `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/kac.html`

[15] Paley, R. E. A. C.: *On orthogonal matrices.* J. Math. Phys. *12* (1933), 311–320.

[16] Seberry, J., Yamada, M.: *Hadamard matrices, sequences, and block designs.* In Stinson, D. J., Dinitz, J. (eds.): Contemporary Design Theory–A Collection of Surveys, John Wiley, 1992, 431–560.

[17] Schrödinger, R.: *Quantisierung als Eigenwertproblem (Dritte Mitteilung).* Ann. Phys. *80* (1926), 437–490.

[18] Sylvester, J. J.: *Théorème sur les déterminants.* Nouvelles Ann. Math. *13* (1854), 305.

[19] Sylvester, J. J.: *Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers.* Phil. Mag. *34* (1867), 461–475.

[20] Štěpánová, M.: *Olga Taussky-Todd: z Olomouce do Pasadeny.* PMFA *61* (2016), 197–213.

[21] Taussky-Todd, O., Todd, J.: *Another look at a matrix of Mark Kac.* Linear Algebra Appl. *150* (1991), 341–360.