Martina Štěpánová

Konstrukce pravidelného pětiúhelníku o dané straně

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 4, 1–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147006

Konstrukce pravidelného pětiúhelníku o dané straně

Martina Štěpánová, MFF UK, Praha

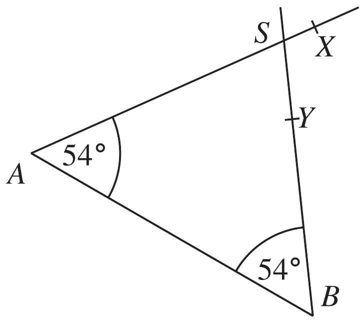
Abstract. In the paper, several constructions of a regular pentagon given its side are presented. They are based primarily on the similarity of geometric objects and on the golden ratio.

Podnětem k sepsání tohoto článku byl dotaz několika mých studentů, kteří si neporadili s příkladem v písemné práci. Jeho součástí byla konstrukce pravidelného pětiúhelníku o dané straně. Studenti si jinak jednoduchý úkol zkomplikovali tím, že si zapomněli přinést úhloměr, tj. úlohu byli nuceni řešit tzv. *eukleidovsky*. Daný problém by tedy mohl znít takto:

Příklad: *Je dána úsečka AB. Bez použití úhloměru sestrojte pravidelný pětiúhelník $ABCDE$.*

Je zřejmé, že úloha má dvě řešení. V textu budeme kvůli jednoduchosti popisovat konstrukci jediného řešení ležícího ve zvolené polorovině. Střed kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$ budeme značit S.

V případě, že bychom mohli použít úhloměr, je úloha triviální. Postačí sestrojit průsečík S ramen AX a BY úhlů BAX a ABY, jejichž velikost je 54° (obr. 1). Poté sestrojíme kružnici se středem S a poloměrem $|SA|$, což je kružnice opsaná pravidelnému pětiúhelníku se stranou AB. Jeho vrcholy C, D, E získáme opakovaným nanesením vzdálenosti $|AB|$ od bodu B po uvedené kružnici.



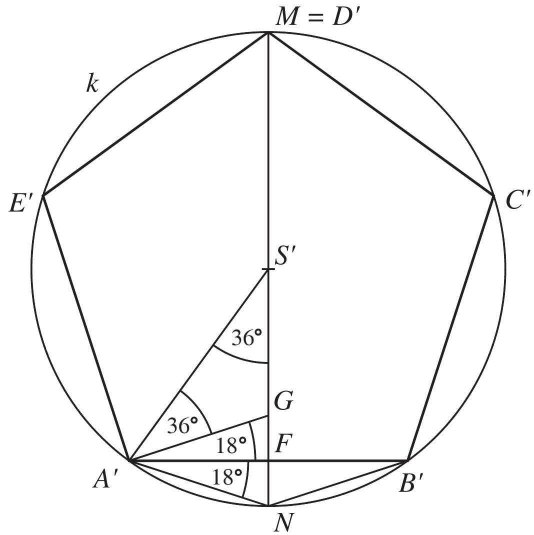
Obr. 1

V článku budou představena různá řešení daného problému, která jsou založená na podobnosti geometrických útvarů nebo využívají tzv. *zlatého řezu.*

Konstrukce založené na podobném zobrazení

Princip první skupiny konstrukcí je jednoduchý. Víme, že jakékoliv dva pravidelné pětiúhelníky jsou podobné. Nejprve proto sestrojíme pravidelný pětiúhelník $A'B'C'D'E'$ o straně libovolné délky a poté jej zobrazíme ve vhodné podobnosti.

Připomeneme alespoň jednu – zřejmě nejznámější – konstrukci pravidelného pětiúhelníku vepsaného dané kružnici k. K odůvodnění této konstrukce budeme potřebovat vypočítat délku strany a_5 uvažovaného pětiúhelníku v závislosti na poloměru r kružnice k. Začněme tímto výpočtem (obr. 2).



Obr. 2

Uvažujme tedy kružnici k se středem S', jí vepsaný pětiúhelník $A'B'C'D'E'$ a její průměr MN, kde $M = D'$. Průsečík úseček $S'N$ a $A'B'$ označme F a bod osově souměrný s bodem N podle osy $A'B'$ označme G. Potom

$$|\sphericalangle NS'A'| = 36^\circ, \quad |\sphericalangle S'A'N| = 72^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle S'A'F| = 54^\circ,$$

z čehož plyne

$$|\sphericalangle NA'F| = |\sphericalangle FA'G| = 18^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle GA'S'| = |\sphericalangle GS'A'| = 36^\circ.$$

Trojúhelník $GS'A'$ je tedy rovnoramenný a platí

$$|NA'| = |GA'| = |GS'| = a_{10},$$

kde a_{10} je délka strany pravidelného desetiúhelníku vepsaného dané kružnici k.

Trojúhelníky $S'A'N$ a $A'NG$ jsou podobné, proto

$$\frac{|S'A'|}{|A'N|} = \frac{|A'N|}{|NG|},$$

neboli

$$\frac{r}{a_{10}} = \frac{a_{10}}{r - a_{10}} \tag{$*$}$$

a následně

$$a_{10}^2 + ra_{10} - r^2 = 0.$$

Kořeny této kvadratické rovnice s neznámou a_{10} jsou $\pm\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$. Avšak pouze kladné číslo může vyjadřovat délku úsečky, proto

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Trojúhelník $A'FG$ je pravoúhlý, tedy

$$\frac{1}{2}a_5 = |A'F| = \sqrt{|A'G|^2 - |GF|^2} =$$

$$= \sqrt{a_{10}^2 - \left(\frac{r - a_{10}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a_{10}^2 - r^2 + 2ra_{10}}{4}} =$$

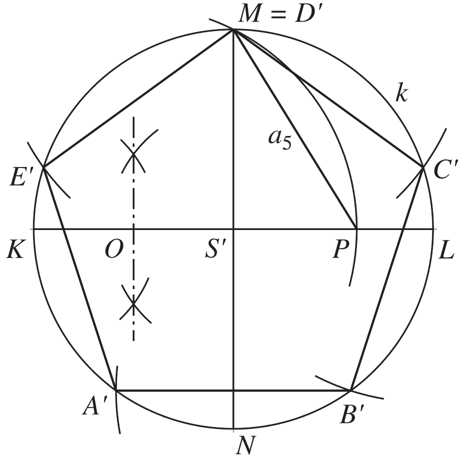
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^2 - r^2 + 2r\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Délka strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného kružnici o poloměru r je proto

$$a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Připomeňme nyní konstrukci pravidelného pětiúhelníku vepsaného dané kružnici (obr. 3). Tento postup je již ve známém Ptolemaiově díle *Almagest* [1] z 2. století. Ze současné, česky psané literatury je problematika pravidelných mnohoúhelníků obsažena např. v učebních textech [3, s. 118] nebo [4, s. 45]. Jde o tuto konstrukci:

Nechť je dána kružnice k se středem S'. Sestrojme libovolnou dvojici jejích navzájem kolmých průměrů KL, MN a střed O úsečky KS'. Dále zkonstruujme kružnici se středem O a poloměrem $|OM|$ a její průsečík s úsečkou KL označme P. Potom délka strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného kružnici k je rovna vzdálenosti bodů M a P.



Obr. 3

Odůvodnění: Z pravoúhlého trojúhelníku $OS'M$ plyne

$$|OM| = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

Protože $|OM| = |OP|$, je

$$|S'P| = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

a délka přepony MP pravoúhlého trojúhelníku $MS'P$ je

$$|MP| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right)^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

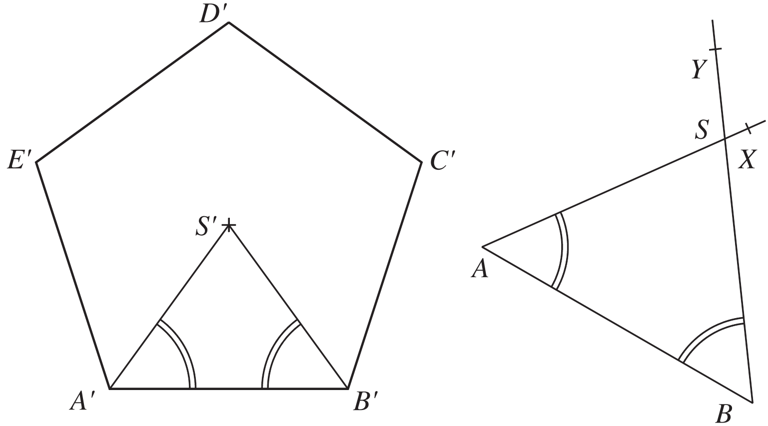
Správnost výše uvedené konstrukce úsečky MP délky a_5 je tím dokázána.

Při konstrukci pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ o dané straně AB lze tedy nejprve sestrojit libovolný pravidelný pětiúhelník $A'B'C'D'E'$ a poté pokračovat některým z následujících (případně obdobných) způsobů.

a) Sestrojíme polopřímky AX a BY tak, aby

$$|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle B'A'S'|\,.$$

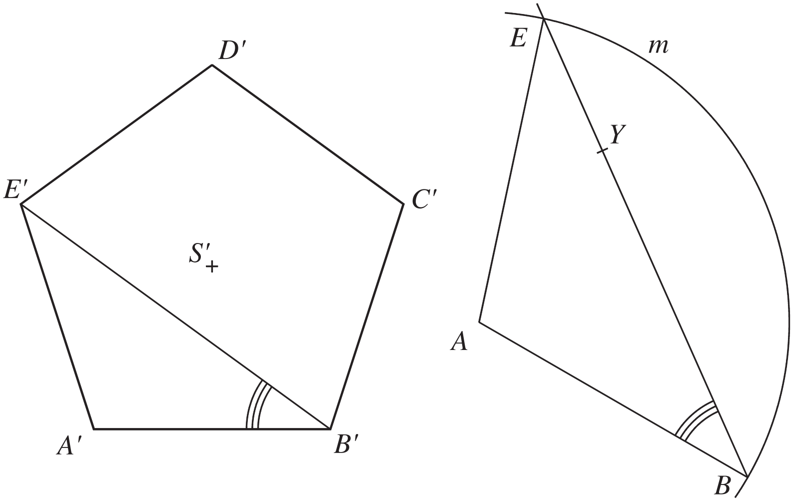
Průsečík polopřímek AX a BY je střed S kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$ (obr. 4). Další postup je zřejmý.



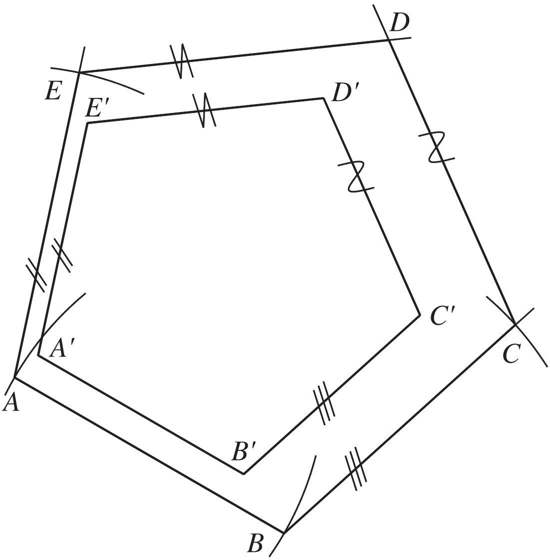
Obr. 4

b) Sestrojíme polopřímku BY, pro kterou $|\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle A'B'E'|$, a kružnici m se středem A a poloměrem $|AB|$ (obr. 5). Průsečík polopřímky BY a kružnice m různý od bodu B je vrchol E pětiúhelníku. Konstrukcí zbývajících vrcholů C, D pětiúhelníku existuje více a jsou zjevné.

c) Pravidelný pětiúhelník $A'B'C'D'E'$ umístíme tak, aby úsečky AB a $A'B'$ byly rovnoběžné (obr. 6). To lze snadno zajistit při konstrukci pravidelného pětiúhelníku $A'B'C'D'E'$ volbou takového průměru $MN = D'N$ kružnice jemu opsané, aby úsečky AB a MN byly na sebe kolmé. Poté stačí využít rovnoběžnosti stran obou pětiúhelníků a znalosti délky strany AB. (Speciálním případem je umístění rovnoběžných úseček AB a $A'B'$ tak, aby $A = A'$ nebo $B = B'$.)



Obr. 5



Obr. 6

Konstrukce spjaté se zlatým řezem

Rozdělit danou úsečku FG ve zlatém řezu znamená najít její bod H, který ji rozdělí na dvě části takové, že poměr délky celé úsečky ku délce delší části je roven poměru délky delší části ku délce kratší části.

Úloha má dvě (symetrická) řešení; kvůli jednoduchosti budeme dále uvažovat takové řešení, pro které je $|FH| > |GH|$.

Zmíněný poměr lze zapsat takto:

$$\frac{|FG|}{|FH|} = \frac{|FH|}{|HG|}.$$

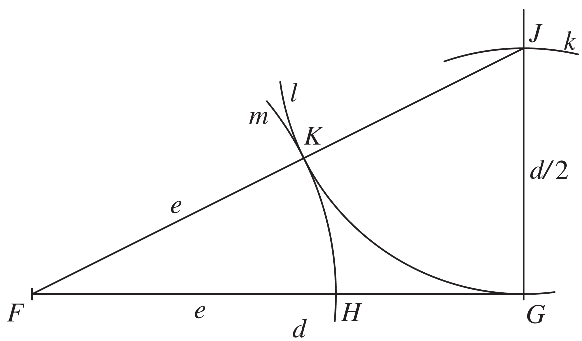
Označíme-li $d = |FG|$, $e = |FH|$, potom $|HG| = d - e$ a dále

$$\frac{d}{e} = \frac{e}{d-e}.$$

Tento poměr nezáleží na volbě úsečky, je konstantní. Jedná se o tzv. *zlaté číslo*, jehož hodnota je $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \doteq 1{,}618\,034$.[1)]

Uveďme opět alespoň jednu z možných konstrukcí bodu H (obr. 7):

Nechť je dána úsečka FG. Bodem G veďme přímku kolmou na přímku FG. Jeden z jejích průsečíků s kružnicí k se středem G a poloměrem $\frac{d}{2}$ označme J. Sestrojme úsečku FJ a její průsečík s kružnicí l se středem J a poloměrem $\frac{d}{2}$ označme K. Hledaný bod H je průsečík úsečky FG a kružnice m se středem F a poloměrem $|FK|$.



Obr. 7

[1)] Uvedenou přesnou hodnotu lze snadno ověřit řešením poslední kvadratické rovnice s neznámou e a následným vyjádřením poměru d/e.

Odůvodnění: Trojúhelník FGJ je pravoúhlý, proto

$$d^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2} + e\right)^2,$$

neboli

$$d^2 - de = e^2,$$

což je ekvivalentní rovnosti[2)]

$$\frac{d}{e} = \frac{e}{d-e}.$$

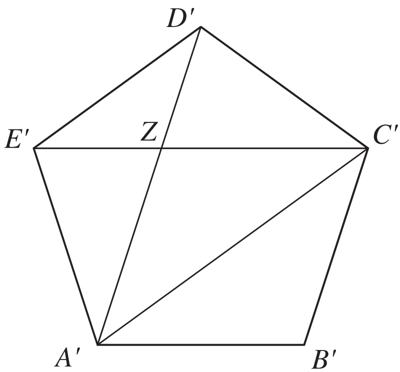
Tím je správnost konstrukce ověřena.

I mezi širší matematickou komunitou je známo následující tvrzení o souvislosti zlatého řezu a pravidelného pětiúhelníku:

Dvě úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, které nemají společný krajní bod, se protínají v bodě, který každou z nich dělí ve zlatém řezu.

Důkaz (obr. 8): Nechť $A'B'C'D'E'$ je libovolný pravidelný pětiúhelník a Z je průsečík jeho úhlopříček $A'D'$ a $E'C'$. Potom jsou trojúhelníky $C'A'B'$ a $D'E'Z$ podobné, a proto

$$\frac{|A'C'|}{|A'B'|} = \frac{|E'D'|}{|E'Z|}.$$



Obr. 8

[2)]Porovnáním se vztahem (∗) je zřejmé, že podíl poloměru kružnice a délky strany pravidelného desetiúhelníku jí vepsaného je rovněž zlaté číslo.

Protože je rovnoběžník $A'B'C'Z$ kosočtverec, je $|A'B'| = |ZC'|$ a následně

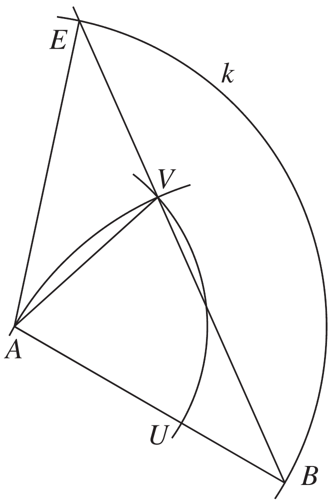
$$\frac{|E'C'|}{|ZC'|} = \frac{|ZC'|}{|E'Z|}.$$

Bod Z tedy skutečně dělí úsečku $E'C'$ ve zlatém řezu.

Rovnoramenný trojúhelník, pro který je poměr délek jeho ramena a základny zlaté číslo, se nazývá *zlatý*. Z uvedeného je zřejmé, že trojúhelníky $A'B'D'$ (resp. $B'C'E'$, resp. další tři shodné trojúhelníky) a $D'ZC'$ (resp. $ZE'A'$, resp. dalších osm shodných trojúhelníků) jsou zlaté.[3)]

Odtud plynou další konstrukce pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ o dané straně AB.

a) Danou úsečku AB rozdělíme bodem U (např. $|AU| > |UB|$) ve zlatém řezu a sestrojíme zlatý trojúhelník BVA se základnou AV (tedy $|AV| = |AU|$, obr. 9). Bod V je průsečík úhlopříček AD a BE hledaného pětiúhelníku. Jeho vrchol E je průsečík polopřímky BV a kružnice k se středem A a poloměrem $|AB|$. Konstrukce zbývajících vrcholů pětiúhelníku je triviální.

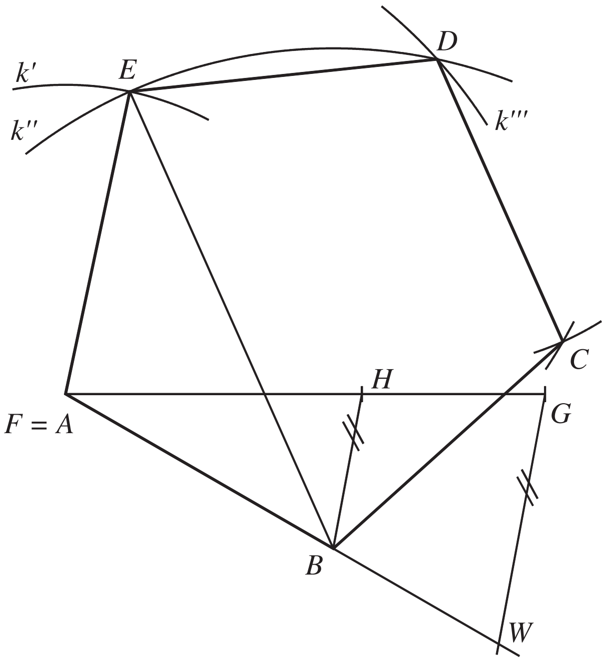


Obr. 9

[3)] Vzhledem k předchozí poznámce pod čarou je libovolný pravidelný desetiúhelník složen z deseti zlatých trojúhelníků.

b) Zvolíme libovolnou úsečku FG tak, aby $F = A$ a bod B neležel na přímce FG (obr. 10). Úsečku FG rozdělíme bodem H ve zlatém řezu a pomocí něj sestrojíme na polopřímce AB bod W takový, že bod B dělí úsečku AW ve zlatém řezu.

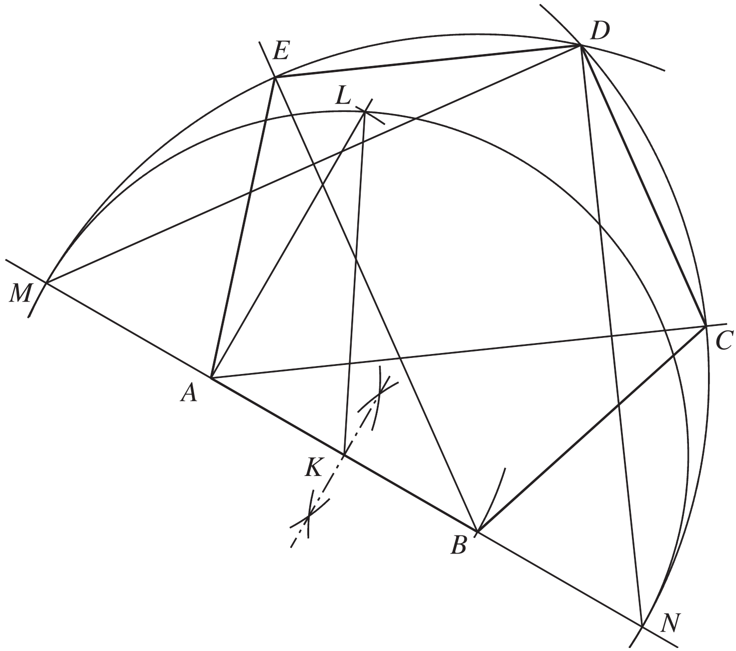
Délka úsečky AW je délkou úhlopříčky hledaného pravidelného pětiúhelníku. Ze znalosti vrcholů A a B tedy lze sestrojit vrchol E jako průsečík kružnice k' se středem A a poloměrem $|AB|$ a kružnice k'' se středem B a poloměrem $|AW|$, resp. lze sestrojit vrchol D jakožto průsečík kružnice k'' a kružnice k''' se středem A a poloměrem $|AW|$. Konstrukce zbývajícího vrcholu C je opět zřejmá.



Obr. 10

Na závěr uveďme konstrukci (obr. 11), která byla bez důkazu předložena ve všeobecné encyklopedii [2, s. 149]. Při tomto postupu sice přímo nerozdělujeme některou úsečku zlatým řezem, ale zlatého řezu lze použít k jeho odůvodnění.

Nechť je dána úsečka AB. Bodem A veďme kolmici na přímku AB a jeden z bodů na této kolmici, který má od bodu A vzdálenost $|AB|$, označme L. Nechť K je střed úsečky AB. Sestrojme kružnici se středem K a poloměrem $|KL|$ a její průsečíky s přímkou AB označme M a N. Nyní sestrojme kružnice se středy v bodech A a B s týmž poloměrem $|AN| = |BM|$. Jejich průsečík je vrchol D hledaného pětiúhelníku. Vrchol E (a analogicky vrchol C) získáme jako průsečík osy ostrého úhlu MBD, což je kolmice na úsečku MD procházející bodem B, a kruhového oblouku MD (ze dvou možností uvažujme oblouk se středovým úhlem menším než π).



Obr. 11

Odůvodnění: Jestliže $a_5 = |AB|$, potom

$$|AK| = \frac{a_5}{2}, \qquad |AL| = a_5$$

a

$$|LK| = \sqrt{\left(\frac{a_5}{2}\right)^2 + a_5^2} = \frac{a_5}{2}\sqrt{5}.$$

Tedy

$$|DB| = |MB| = |LK| + |KB| = \frac{a_5}{2}\sqrt{5} + \frac{a_5}{2} = \frac{a_5}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Protože

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|DB|}{|BA|} = \frac{\frac{a_5}{2}(\sqrt{5}+1)}{a_5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

je poměr délky úsečky AD, resp. BD ku délce strany AB roven zlatému číslu. Správnost konstrukce vrcholu D je tím ověřena.

Jelikož v každém pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ je $|BD| = |BE|$ a odchylka přímek BA a BE je shodná s odchylkou přímek BE a BD,[4)] je správná i konstrukce vrcholu E.

Závěr

V článku jsme ukázali, že eukleidovsky sestrojit pravidelný pětiúhelník daný svou stranou lze několika metodami. Až na posledně jmenovanou se navíc jedná o konstrukce, které lze po krátké úvaze vymyslet, a proto není nutné se je učit nazpaměť.

Literatura

[1] Ptolemaios: Almagest, 2. stol.; anglický překlad: G. J. Toomer, *Ptolemy's Almagest.* Springer-Verlag, New York, 1984, 2. vyd., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.

[2] *Problem XLVIII.* The Popular Educator, a Complete Encyklopædia of Elementary, Advanced and Technical Education, Lessons in Geometry, roč. 2, Cassell & Company, London, 1888, nové přepracované vydání, `https://archive.org/details/populareducatorc02londuoft`

[3] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie.* Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha, 2009.

[4] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – Planimetrie.* Prometheus, Praha, 2008.

4) Jedná se o velikosti obvodových úhlů, které přísluší shodným obloukům kružnice pětiúhelníku opsané.