Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Zuzana Procházková; Petr Šácha

Nambova mechanika v dynamice atmosféry

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 64 (2019), No. 4, 220–228

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148022`

Nambova mechanika v dynamice atmosféry

Zuzana Procházková, Petr Šácha

Abstrakt. Nambova mechanika je zobecněním mechaniky hamiltonovské dovolující využít další zachovávající se veličiny stejným způsobem jako hamiltonián. V následujícím článku představíme její formalismus a ukážeme konkrétní tvar rovnic pro volný setrvačník, dvojrozměrné nestlačitelné proudění a pro model mělké vody. V závěru pak zmíníme, k čemu se formalismus používá.

Od osmnáctého století fyzikové studují nové způsoby formulace klasické mechaniky. Tyto alternativní metody jsou užitečné pro řešení problémů v mechanice, a navíc umožňují zobecnění do jiných odvětví fyziky. Nejčastěji používanou formulací je hamiltonovská mechanika, která k popisu mechanického systému používá jednu skalární veličinu odpovídající celkové energii: hamiltonián. Nicméně hamiltonovská mechanika může být použita pouze na systémy se sudým počtem stupňů volnosti, protože je založena na dvojicích souřadnic a hybností jednotlivých bodů. Další nevýhodou je, že bilineární zobrazení používané pro popis může být v některých případech singulární.

V článku [7] japonský fyzik Jóičiró Nambu zobecnil hamiltonovskou fyziku tak, aby byly další zákony zachování obsaženy ve formalismu stejným způsobem jako zákon zachování celkové energie. Pro ilustraci použil formalismus k vyjádření Eulerových rovnic pro otáčení tuhého tělesa. Tato diskrétní formulace mechaniky byla dále v článku [8] zobecněna na polní popis, čímž bylo umožněno její použití v mechanice kontinua.

Od té doby byl Nambův formalismus úspěšně aplikován na některé, různě složité, problémy dynamiky kontinua. Studium použití Nambova formalismu pro potřeby popisu dějů v atmosféře se začalo rozvíjet počátkem tohoto tisíciletí a jedná se o stále živý směr výzkumu. Nambův tvar byl již odvozen například pro tyto teoretické modely dějů v atmosféře: V práci [2] jsou do Nambova tvaru převedeny rovnice pro Rayleighovu–Bénardovu konvekci, které popisují konvektivní pohyb tekutiny způsobený rozdílem teplot, bez disipace i s disipací. Článek [9] obsahuje Nambův tvar pro kvazigeostrofické rovnice a pro rovnice mělké vody s více vrstvami neměnné hustoty. V článku [11] jsou do Nambova tvaru přeformulovány pohybové rovnice pro dvou- a třídimenzionální proudění v Boussinesqově aproximaci, předpokládající, že hustota je konstantní až na člen odpovídající vztlakové síle. Dále jsou zde odvozeny řídící rovnice pro elektricky vodivé tekutiny v Nambově tvaru. Popis atmosférických dějů Nambovým formalismem je užitečný ke konstrukci numerických schémat implicitně splňujících zákony zachování a poskytuje také nový náhled pro hlubší studium působících mechanismů a jejich interakce.

Bc. Zuzana Procházková, RNDr. Petr Šácha, Ph.D., Katedra fyziky atmosféry MFF UK, V Holešovičkách 747/2, 180 00 Praha 8, e-mail: zuza.proch@gmail.com, Petr.Sacha@mff.cuni.cz

V tomto článku demonstrujeme odvození Nambova tvaru rovnic pro volný setrvačník, nestlačitelné proudění ve dvou dimenzích a pro ilustraci uvedeme i Nambův tvar rovnic mělké vody. Vycházíme přitom z bakalářské práce [10].

1. Hamiltonovská mechanika

Běžně používanou formulací mechaniky je hamiltonovská mechanika, ze které Nambova mechanika vychází, a proto zde její hlavní myšlenky zopakujeme.

Systém je v Hamiltonově mechanice popisován pomocí jedné skalární funkce H, hamiltoniánu, představující celkovou energii systému. Hamiltonián je tradičně definován jako funkce zobecněných souřadnic q_i a veličin zobecňujících hybnosti p_i, tvořících tzv. fázový prostor. Časový vývoj se pak dá zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}. \tag{1b}$$

Tyto rovnice se nazývají Hamiltonovy kanonické rovnice. Časovou derivaci libovolné funkce f je pak možné zapsat v jednoduchém tvaru

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{2}$$

kde $\{\cdot, \cdot\}$ je Poissonova závorka definovaná vztahem

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j} \right).$$

Klíčové tvrzení v klasické statistické a hamiltonovské mechanice je Liouvillova věta. Říká, že pokud hamiltonián nezávisí na čase, je objem fázového prostoru podél všech trajektorií konstantní. Každý stav mechanického systému může být popsán jako bod ve fázovém prostoru tvořeném zobecněnými souřadnicemi a hybnostmi. Symbolem ρ označíme pravděpodobnost, že se systém nachází v určitém objemu fázového prostoru, definovanou jako $\rho = N/V_0$. N je s časem neměnný počet systémů, které zabírají ve fázovém prostoru objem V_0. Pro odvození Liouvillovy věty vyjdeme z rovnice kontinuity pro ρ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{3}$$

rychlost $\mathbf{v}$ bodu ve fázovém prostoru je pro třírozměrný prostor $6N$-složkový vektor obsahující časové derivace zobecněných souřadnic a hybností. Rozderivováním druhého členu a využitím Hamiltonových rovnic (1) je možné tuto rovnici upravit do tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{\rho, H\}.$$

Porovnáním s rovnicí (2) tedy dostaneme $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t = 0$. Z rovnice kontinuity (3) vyplývá

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

a Liouvillův teorém je tedy možné formulovat podmínkou

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{4}$$

2. Nambova mechanika

V průkopnické práci [7] je zobecněna hamiltonovská mechanika tak, aby nový formalismus implicitně obsahoval Liouvillův teorém. Tento takzvaný Nambův formalismus může, na rozdíl od hamiltonovského formalismu, popsat i systémy s fázovým prostorem s lichou dimenzí. Je založen na nahrazení bilineární Poissonovy závorky multilineární Nambovou závorkou. Zatímco v hamiltonovské formulaci je časový vývoj určen pomocí Poissonovy závorky s hamiltoniánem, formulace pomocí Nambovy závorky zahrnuje také další zachovávající se veličiny. V Nambově popisu je pak zachování těchto veličin zaručeno díky požadavku na antisymetrii Nambovy závorky.

Nejprve budeme uvažovat fázový prostor generovaný trojicí souřadnic $\mathbf{r} = (x, y, z)$ a dvěma funkcemi H a G, které představují hamiltoniány. Nambu [7] definuje Hamiltonovy rovnice analogicky k rovnicím (1) takto:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(y, z)}, \tag{5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(z, x)}, \tag{5b}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(x, y)}. \tag{5c}$$

Symbol $\partial(A, B)/\partial(a, b)$ označuje jakobián dvojice funkcí A a B vzhledem k proměnným a a b, tedy

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(a, b)} = \frac{\partial A}{\partial a}\frac{\partial B}{\partial b} - \frac{\partial A}{\partial b}\frac{\partial B}{\partial a}.$$

Rovnice (5) mohou být ekvivalentně vyjádřeny ve vektorovém tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \nabla H \times \nabla G.$$

Časový vývoj libovolné funkce $F(x, y, z)$ je pak dán pomocí rovnice

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(F, H, G)}{\partial(x, y, z)} = \nabla F \cdot (\nabla H \times \nabla G) = \{F, H, G\}\,, \tag{6}$$

což je použito jako definice Nambovy závorky tak, aby byla rovnice analogická k časovému vývoji v hamiltonovské fyzice (2) pro funkci explicitně nezávisející na čase: $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t = \{F, H\}$. Takto definovaná Nambova závorka je antisymetrická ve všech složkách. Z dosazení funkce H nebo G za F do rovnice (6) je zřejmé, že jsou tyto veličiny ve fázovém prostoru zachovávány, protože díky antisymetrii je Nambova závorka se dvěma stejnými argumenty rovna nule. Průnik ploch konstantního H a konstantního G ve fázovém prostoru určuje trajektorii časového vývoje systému. Díky konstrukci závorky platí

$$\nabla \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \nabla \cdot (\nabla H \times \nabla G) = 0$$

a Liouvillova věta (4) je tedy splněna přímo z definice.

Hamiltonovy rovnice (5) a rovnici (6) pro časový vývoj funkce je možné dále zobecnit do n-dimenzionálního fázového prostoru jako

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} &= \sum_{jk\ldots l} \mathcal{E}_{ijk\ldots l} \frac{\partial H_1}{\partial x_j} \frac{\partial H_2}{\partial x_k} \ldots \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x_l},\\ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial(F, H_1, H_2, \ldots, H_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_{ijk\ldots l}$ je n-dimenzionální Levi-Civitův symbol: $\mathcal{E}_{ijk\ldots l} = 0$, pokud jsou alespoň dva indexy z množiny $\{i, j, \ldots, l\}$ stejné, $\mathcal{E}_{ijk\ldots l} = 1$, pokud posloupnost indexů odpovídá sudé permutaci posloupnosti $1, 2, \ldots, n$. Pro liché permulace je $\mathcal{E}_{ijk\ldots l} = -1$.

Ve $3n$-dimenzionálním fázovém prostoru popsaném pomocí trojic souřadnic $\mathbf{r}_n$ je možné rovnici (6) vyjádřit pomocí vztahu

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_n \frac{\partial(F, H, G)}{\partial(x_n, y_n, z_n)} = \sum_n \{F, H, G\}_n. \tag{7}$$

Splnění Liouvillova teorému může být také dosaženo zobecněním rovnice (6) jako

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial(F, H_i, G_i)}{\partial(x, y, z)} = \sum_i \{F, H_i, G_i\}, \tag{8}$$

kde (H_i, G_i) je daná množina funkcí. V tomto případě ale nejsou funkce H_i a G_i obecně časově invariantní. Nambova závorka definovaná vztahem (6) a suma závorek (7) se nazývají Nambova závorka prvního druhu, zatímco tvar Nambových závorek (8) se nazývá Nambova závorka druhého druhu [11].

3. Otáčení tuhého tělesa

Použití formalismu nejprve ukážeme na příkladu volného setrvačníku [7]. Kinetickou energii setrvačníku je možné zapsat jako součet kinetických energií v hlavních směrech setrvačníku, ve kterých uvažujeme momenty setrvačnosti I_x, I_y a I_z a úhlové rychlosti ω_x, ω_y a ω_z. Protože chceme tuto veličinu použít v rovnici (5), označíme ji

$$G = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2).$$

Za funkci H v rovnici (5) budeme volit veličinu odpovídající velikosti momentu hybnosti

$$H = \frac{1}{2}(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2). \tag{9}$$

Pro bezsilový setrvačník je z druhé impulsové věty moment hybnosti konstantní a jeho složky je možné zvolit za nehybné souřadnice popisující fázový prostor. Funkci G s využitím vztahu $L_i = I_i\omega_i$ pro jednotlivé složky proto přepíšeme tak, aby závisela na složkách momentu hybnosti:

$$G = \frac{1}{2}\left(\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z}\right).$$

Díky tomu, že neuvažujeme vnější síly ani jiné zdroje disipace energie, se veličiny H i G zachovávají a je možné je pro Nambovu formulaci použít. Z pohybových rovnic (5) pak s využitím L_x, L_y a L_z místo x, y a z vyplývá

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial L_y}\frac{\partial G}{\partial L_z} - \frac{\partial H}{\partial L_z}\frac{\partial G}{\partial L_y} = L_y\frac{L_z}{I_z} - L_z\frac{L_y}{I_y},\\
\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial L_z}\frac{\partial G}{\partial L_x} - \frac{\partial H}{\partial L_x}\frac{\partial G}{\partial L_z} = L_z\frac{L_x}{I_x} - L_x\frac{L_z}{I_z},\\
\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial L_x}\frac{\partial G}{\partial L_y} - \frac{\partial H}{\partial L_y}\frac{\partial G}{\partial L_x} = L_x\frac{L_y}{I_y} - L_y\frac{L_x}{I_x}.
\end{aligned}$$

Po zpětném dosazení za složky momentu hybnosti ze vztahů $L_i = I_i\omega_i$ tedy dostaneme standardní Eulerovy rovnice pro volný setrvačník

$$\begin{aligned}
I_x\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} &= \omega_y\omega_z\,(I_y - I_z)\,,\\
I_y\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} &= \omega_z\omega_x\,(I_z - I_x)\,,\\
I_z\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} &= \omega_x\omega_y\,(I_x - I_y)\,.
\end{aligned}$$

4. Nestlačitelné proudění

Jako první ilustrativní případ z mechaniky kontinua odvodíme Nambův tvar pro rovnice nestlačitelného proudění ve dvou dimenzích. Proudění bez vnějších sil a bez zdroje tepla je řízeno rovnicí vorticity ve tvaru

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathcal{J}(\chi, \zeta) = 0, \tag{10}$$

kde ζ je vorticita a χ proudová funkce. $\mathcal{J}$ značí jakobián; $\mathcal{J}(f, g) = (\partial f/\partial x)\,(\partial g/\partial y) - (\partial g/\partial x)\,(\partial f/\partial y)$ pro každé dvě funkce f a g. Vorticita proudění se složkami rychlosti u a v je definována vztahem

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Protože je proudění nestlačitelné a rychlost má tedy na základě rovnice kontinuity nulovou divergenci, rychlost proudění je možné vyjádřit pomocí jedné skalární veličiny, proudové funkce, jako

$$u = -\frac{\partial\chi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\chi}{\partial x}.$$

Proudová funkce je tedy propojena s vorticitou pomocí vztahu

$$\zeta(x, y, t) = \nabla^2\chi.$$

Hamiltonián systému je dán rovnicí

$$\mathcal{H}[\zeta] = \frac{1}{2}\int |\nabla\chi|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \tag{11}$$

další zachovávající se veličinou pro dvojdimenzionální nestlačitelné proudění je enstrofie vyjadřující míru vířivosti rychlostního pole

$$\mathcal{Z}[\zeta] = \frac{1}{2}\int \zeta^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{12}$$

Protože se jedná o spojité prostředí, místo vektoru zobecněných souřadnic a hybností potřebujeme funkci, která je definovaná v každém bodě a popisuje uvažovaný systém, v tomto případě vorticitu ζ. Hamiltonián (11) a enstrofie (12) jsou tedy funkcionály vorticity.

Stejně tak místo parciálních derivací podle souřadnic nebo hybností musíme používat funkcionální derivace. Funkcionální derivaci funkcionálu $\mathcal{F}$ podle funkce u označujeme $\delta\mathcal{F}/\delta u$. Pro její zavedení definujeme variaci funkcionálu $\mathcal{F}[u]$ vztahem

$$\delta\mathcal{F}[u] := \mathcal{F}[u + \delta u] - \mathcal{F}[u]$$

pro libovolné posunutí δu uvnitř definičního oboru funkcionálu $\mathcal{F}$. Funkcionální derivace může být nyní definována pomocí Taylorova rozvoje jako

$$\delta\mathcal{F}[u] = \left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta u}, \delta u\right) + O(\delta u^2),$$

kde $(\cdot\ ,\ \cdot)$ je skalární součin náležející prostoru funkce u. Pro vektorovou funkci u uvažujeme skalární součin jako integrál z eukleidovského skalárního součinu.

K převodu řídící rovnice (10) do Nambova tvaru je nutné určit funkcionální derivace hamiltoniánu a enstrofie podle vorticity. Při vhodných okrajových podmínkách platí:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{H} &= \int \nabla\chi \cdot \delta\nabla\chi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\int \chi\delta\nabla^2\chi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\int \chi\delta\zeta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta} = -\chi, \\
\delta\mathcal{Z} &= \int \zeta\delta\zeta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad \Longrightarrow \frac{\delta\mathcal{Z}}{\delta\zeta} = \zeta.
\end{aligned}$$

Řídící rovnici (10) je tedy možné přepsat do tvaru

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\mathcal{J}(\chi, \zeta) = -\mathcal{J}\left(\frac{\delta\mathcal{Z}}{\delta\zeta}, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right),$$

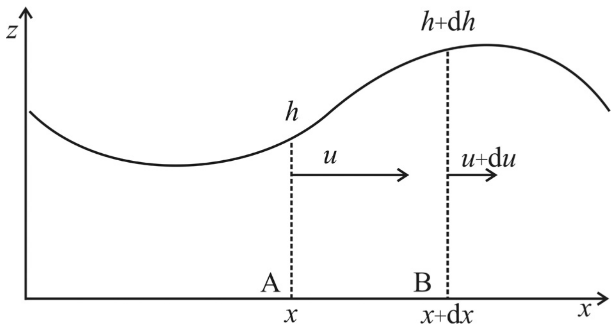
což je zobecnění Hamiltonovy rovnice v tzv. symplektickém tvaru. Časový vývoj libovolného funkcionálu $\mathcal{F}$ je potom dán pomocí rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t} = -\int \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\zeta}\mathcal{J}\left(\frac{\delta\mathcal{Z}}{\delta\zeta}, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \{\mathcal{F}, \mathcal{Z}, \mathcal{H}\}_{2D},$$

což je v souladu s definicí (6) použito jako definice Nambovy závorky pro dvojdimenzionální nestlačitelné proudění. Takto definovaná závorka je zjevně trilineární a antisymetrická v každých dvou složkách.

5. Model mělké vody

Model mělké vody popisuje dynamiku tekutin s volnou hladinou nebo se skokovou změnou hustoty mezi vrstvami vystavenými zemské rotaci. Předpokládá se, že tekutina je dostatečně mělká, aby bylo možné považovat rychlost ve svislém směru za konstantní. Na obrázku 1 je zobrazeno jednorozměrné proudění. Pro dvě rozhraní A a B na pozicích x a $x + \mathrm{d}x$ jsou zde vyznačeny výšky vodních sloupců h a $h + \mathrm{d}h$ a rychlosti pohybu částic na rozhraní u a $u + \mathrm{d}u$.



Obr. 1. Jednodimenzionální model mělké vody

V práci [10] je na základě článku [3] prezentována metoda odvození Nambova tvaru rovnic pro rovnice mělké vody, ovšem se zobecněním na zachovávání potenciálních enstrofií n-tého řádu $\mathcal{Z}_n$ definovaných vztahem

$$\mathcal{Z}_n = \frac{1}{2+n} \int h q^{2+n} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

které se v uvažovaném modelu mělké vody zachovávají [12]. Potenciální vorticita q je definována na základě Coriolisova parametru f, vorticity ζ a výšky hladiny h jako $q = (f + \zeta)/h$.

Metoda odvození Nambova tvaru vychází pouze ze zákonů zachování energie a potenciální enstrofie, které jsou rozepsány pomocí veličin vorticity rychlosti ζ, divergence rychlosti μ a výšky hladiny h. S využitím diferenciálních forem a samoadjungovaného operátoru je možné takto dojít k rovnicím

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \{\zeta, \mathcal{Z}_n, \mathcal{H}\}_{\zeta\mu} + \{\zeta, \mathcal{Z}_0, \mathcal{H}\}_{\mu\zeta\zeta}, \\
\frac{\partial \mu}{\partial t} &= \{\mu, \mathcal{Z}_n, \mathcal{H}\}_{\zeta\mu} + \{\mu, \mathcal{Z}_0, \mathcal{H}\}_{\mu\zeta\zeta} + \{\mu, \mathcal{H}\}_{\mu h}, \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= \{h, \mathcal{H}\}_{\mu h},
\end{aligned}$$

kde vystupují Nambovy závorky $\{\cdot, \cdot, \cdot\}_{\zeta\mu}$ a $\{\cdot, \cdot, \cdot\}_{\mu\zeta\zeta}$ a Poissonova závorka $\{\cdot, \cdot\}_{\mu h}$. Tyto závorky jsou určené až na multiplikativní konstantu a odpovídají postupně dynamice vírů, interakci mezi vířivými a divergentními složkami a gravitačním vlnám.

6. Využití formalismu

Od roku 1993, kdy Névir a Blender zobecnili Nambovu mechaniku pro aplikace v geofyzikální dynamice kontinua, je v této oblasti stále živý, i když nijak masový, základní teoretický výzkum. Nambova formulace se ukazuje být velmi užitečná pro konstrukci sofistikovaných numerických metod dynamiky tekutin. Například ve studiích [12] a [13] jsou diskretizovány rovnice mělké vody v Nambově tvaru. Snaha je zachovat antisymetrické vlastnosti Nambovy formulace. Výhodou takových schémat je, že nemusí být singulární, ani když schémata odvozená z hamiltonovské formulace nějaké singularity mají. Schémata získaná z Nambova tvaru ve studii [13] jsou stabilní na úkor výpočetní složitosti. Naopak možnost použití v nehydrostatických modelech se ukazuje jako omezená [4], protože nehydrostatické stlačitelné rovnice je obtížné převést do Nambova tvaru. Potřebují totiž ve formulaci helicitu jako zachovávající se veličinu, přestože helicita se zachovává pouze pro nestlačitelné proudění.

Další aktivní oblast výzkumu, ve které se používá Nambův formalismus, je dynamická a kinematická analýza modelů bodových vírů. Tento přístup byl nedávno použit v článku [6] ke studiu atmosférického blokování nebo v článku [1] v teoretickém výzkumu zhroucení systému tří bodových vírů.

V kapitole 5 jsme naznačili, že Nambův formalismus vyjasňuje hierarchii vztahů mezi jednotlivými procesy v systému. Není tedy příliš překvapivý rostoucí zájem o použití metod symetrie také v atmosférické dynamice nebo obecněji teoretické meteorologii. Specifický typ popisu nazývaný energy-vorticity theory vede k definici veličiny dynamic state index, která představuje nový parametr indikující přítomnost nestacionárních, diabatických nebo disipativních procesů v atmosféře. Stejný princip určování odchylek od obecného stacionárního řešení primitivních rovnic je použit také v metodice aktivních větrů [5]. Velkou výhodou těchto postupů je to, že je pomocí nich možné obejít prostorové a časové průměrování, které je jinak nutné pro linerizaci rovnic a separaci perturbací od pozadí.

Poděkování. Autoři děkují doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., za podnětné komentáře. Článek byl podpořen Českou fyzikální společností.

Literatura

[1] Badin, G., Barry, A. M.: *Collapse of generalized Euler and surface quasigeostrophic point vortices.* Phys. Rev. E 98 (2018), 023110.

[2] Bihlo, A.: *Rayleigh–Bénard convection as a Nambu-metriplectic problem.* J. Phys. A 41 (2008), 292001.

[3] Blender, R., Badin, G.: *Construction of Hamiltonian and Nambu forms for the shallow water equations.* Fluids 2 (2017), 24.

[4] Gassmann, A.: *A global hexagonal C-grid non-hydrostatic dynamical core (icon-iap) designed for energetic consistency.* Q. J. R. Meteorol. Soc. 139 (2013), 152–175.

[5] Gassmann, A.: *Deviations from a general nonlinear wind balance: Local and zonal-mean perspectives.* Meteorol. Z. 23 (2014), 467–481.

[6] Hirt, M., Schielicke, L., Müller, A., Névir, P.: *Statistics and dynamics of blockings with a point vortex model.* Tellus A 70 (2018), 1–20.

[7] Nambu, Y.: *Generalized Hamiltonian dynamics.* Phys. Rev. D 7 (1973), 2405–2412.

[8] Névir, P., Blender, R.: *A Nambu representation of incompressible hydrodynamics using helicity and enstrophy.* J. Phys. A 26 (1993), L1189.

[9] Névir, P., Sommer, M.: *Energy-vorticity theory of ideal fluid mechanics.* J. Atmos. Sci. 66 (2009), 2073–2084.

[10] Procházková, Z.: *Application of the Nambu mechanics formalism in atmospheric dynamics.* Bakalářská práce. MFF UK, 2019.

[11] Salazar, R., Kurgansky, M. V.: *Nambu brackets in fluid mechanics and magnetohydrodynamics.* J. Phys. A 43 (2010), 305501.

[12] Salmon, R.: *A general method for conserving quantities related to potential vorticity in numerical models.* Nonlinearity 18 (2005), R1.

[13] Sommer, M., Névir, P.: *A conservative scheme for the shallow-water system on a staggered geodesic grid based on a Nambu representation.* Q. J. R. Meteorol. Soc. 135 (2009), 485–494.