José Marcial Nájares Romero

Geometrický význam Eulerova čísla e

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 4, 15–20

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148562`

Uvažme obdélník o stranách délky $a + b$ a $a + c$ (viz obr. 2). Jeho obsah S bude

$$S = ab + bc + ac + a^2 = 16 + a^2.$$

Podle podmínky $a \geq 3$ dostáváme $S \geq 25$.

Nyní se podívejme na jeho obvod o:

$$o = 4a + 2b + 2c = 2(2a + b + c).$$

Zjišťujeme, že zkoumaný výraz $2a + b + c$ je roven polovině obvodu útvaru, stačí tedy minimalizovat obvod tohoto obdélníku. Zredukovali jsme tedy úlohu na problém nalezení minimálního obvodu obdélníku o daném obsahu.

Jak je známo, řešením této úlohy je čtverec. Toto tvrzení lze dokázat s využitím AG nerovnosti

$$\frac{1}{2}(a + b + a + c) \geq \sqrt{(a + b)(a + c)},$$

přičemž rovnost nastává právě pro $a + b = a + c$, tj. pro $b = c$.

Platí $o \geq 4\sqrt{S} \geq 20$, a tedy $2a + b + c \geq 10$.

Výše popsaná úvaha nám také opět prezentuje existenci takovéto trojice a, b, c. Nejmenší možná hodnota výrazu $2a + b + c$ nastane pro $2a + b + c = 10$, $a = 3$ a $b = c$. Proto $a = 3$ a $b = c = 2$.

Geometrický význam Eulerova čísla e

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha

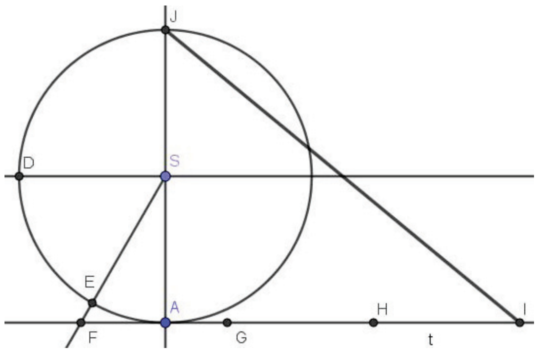
Abstrakt. V článku se budeme věnovat geometrickému významu čísla e. Hlavním cílem bude ukázat konstrukci úseček, jejichž délka se blíží hodnotě e.

Eulerovo číslo e patří mezi nejvýznamnější matematické konstanty. Je pojmenováno po švýcarském matematikovi Leonhardu Eulerovi. O historii tohoto čísla či výpočtu jeho číslic si můžete přečíst například v [1]. Je známo, že číslo e je iracionální a je dokonce transcendentní, což znamená, že není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty. Další neméně důležitou konstantou v matematice je Ludolfovo číslo π, které je rovněž transcendentní. Jak víme, toto číslo se objevuje ve vzorci pro výpočet obvodu kružnice. Slavný problém, který byl nakonec zodpovězen negativně algebraickými metodami, je tzv. rektifikace kružnice. Tento problém spočívá v tom, že chceme sestrojit úsečku, jejíž délka je rovna obvodu dané kružnice, pomocí kružítka a pravítka. Není těžké se přesvědčit, že tento problém je ekvivalentní problému sestrojit úsečku o délce π.

Konstrukce úsečky, jejíž délka je přibližně rovna π

Jak jsme již výše připomněli, pomocí pravítka a kružítka nelze sestrojit úsečku délky π. Přesto vznikla spousta prací věnujících se konstrukci úsečky, jejíž délka je přibližně rovna obvodu kružnice či délce kruhového oblouku. Jednu z těchto konstrukcí objevil polský matematik Adam Adamandy Kochański. Pomocí této konstrukce sestrojíme úsečku o délce přibližně rovné polovině obvodu uvažované kružnice. Další konstrukce tohoto typu je možné najít např. v práci [2], která se věnuje přibližným rektifikacím kruhového oblouku, jež zkoumal český matematik Jan Sobotka (1862–1931), který se věnoval studiu geometrie, zejména deskriptivní geometrie. Mezi těmito konstrukcemi je i Kochańského rektifikace kružnice.

V následující části popíšeme právě Kochańského rektifikaci. Nechť je dána kružnice se středem S a poloměrem $|AS|$, kde A, S jsou dva různé body. Sestrojme tečnu t k této kružnici v bodě A. Dále sestrojme kolmici k přímce AS procházející bodem S a jeden z průsečíků s danou kružnicí označme D. Přímka AS protíná naši kružnici v bodě A, druhý průsečík této přímky s danou kružnicí označme J, viz obr. 1.



Obr. 1

Nyní sestrojme bod E na kružnici tak, aby platilo $|DE| = |DS|$, tedy trojúhelník ESD je rovnostranný. Důsledkem toho je, že úhel $\sphericalangle ESA$ má velikost 30°. Průsečík polopřímky SE s tečnou t označme F. Na polopřímce FA naneseme od bodu F třikrát vzdálenost rovnou velikosti poloměru kružnice. Tím vznikají postupně body G, H a I. Tvrdíme, že vzdálenost bodů I, J je přibližně rovna polovině obvodu dané kružnice, tedy platí $|IJ| \doteq \pi|AS|$. Pro jednoduchost počítání označme $|AS| = r$. K výpočtu délky úsečky $|IJ|$ využijeme Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník AIJ. Úsečka AJ má délku $2r$, délka úsečky AI je $3r - \operatorname{tg} 30^\circ r$. Jelikož $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$|IJ| = r\sqrt{(40/3 - 2\sqrt{3})} \doteq 3{,}1415333387\,r.$$

Jak víme, polovina obvodu kružnice je πr. Pokud bychom zvolili $r = 1$, získáme úsečku, jejíž délka se shoduje na čtyři desetinná místa s hodnotou čísla π.

Geometrický význam Eulerova čísla e

Existuje více způsobů jak definovat Eulerovo číslo e. My budeme k našemu účelu používat definici pomocí limity posloupnosti:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1}$$

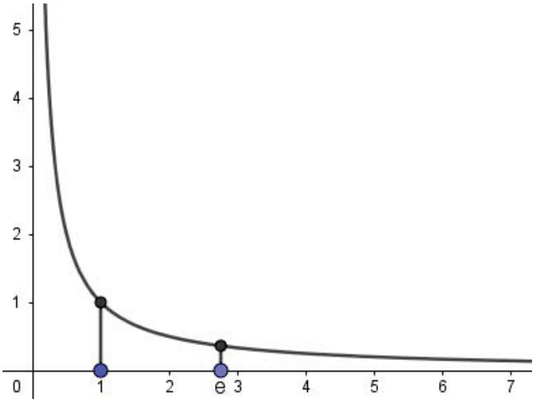
Ještě než se pustíme do konstrukce úseček, jejichž délky se blíží e, podíváme se na jinou geometrickou interpretaci čísla e. Tato geometrická interpretace je popsána v [3]. Definujme přirozený logaritmus pro $t > 0$:

$$\ln t = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Je-li $t \in (0, 1)$, pak použijeme zavedenou konvenci

$$\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní si stačí uvědomit geometrickou interpretaci integrálu nezáporné funkce. Například pro $t > 1$ je hodnota $\ln t$ rovna obsahu geometrického útvaru vymezeného přímkami $x = 1$, $x = t$, grafem funkce $y = 1/x$ a osou x, viz obr. 2.



Obr. 2

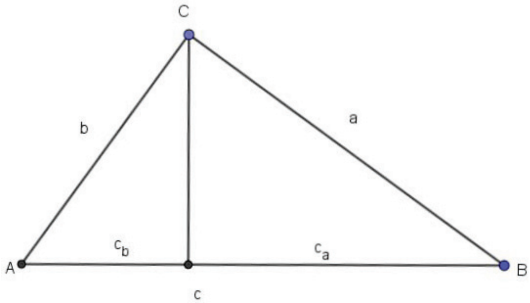
Eulerovo číslo e je takové reálné číslo, pro které platí, že obsah geometrického útvaru vymezeného přímkami $x = 1$, $x = \mathrm{e}$, grafem funkce $y = 1/x$ a osou x je roven jedné. Tato geometrická interpretace nám sice říká, jakou podmínku má splňovat číslo e, nedovedeme si ovšem představit, že bychom podle tohoto návodu sestrojili úsečku, jejíž délka by byla přibližně rovna e.

Konstrukce úsečky, jejíž délka je přibližně rovna e

Pro náš účel, jak jsme dříve poznamenali, použijeme definici Eulerova čísla e jako limitu posloupnosti (1). V základním kurzu matematické analýzy se dokazuje, že tato posloupnost konverguje. V [3] je uveden geometrický důkaz, že tato posloupnost je rostoucí. Z vlastností konvergentních posloupností víme, že každá podposloupnost této posloupnosti je rovněž konvergentní a má stejnou limitu. K našemu účelu vybereme podposloupnost ve tvaru $(1 + 1/2^n)^{2^n}$. Dále budeme pro naši konstrukci využívat Eukleidovu větu o odvěsně (viz obr. 3), proto připomeňme její znění.

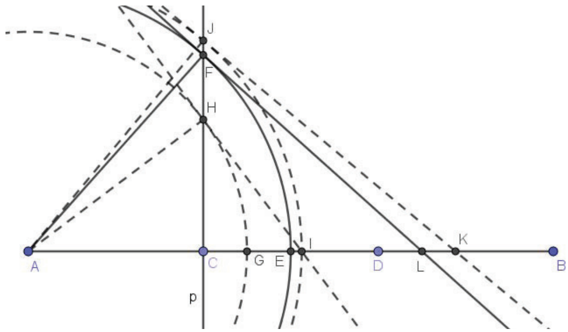
Věta 1. (Eukleidova o odvěsně) *Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou c je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlé. Jinými slovy platí následující rovnosti:*

$$a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b.$$



Obr. 3

Naším cílem je sestrojit pro každé přirozené číslo n úsečku délky $(1+1/2^n)^{2^n}$. Pro $n=1$ chceme sestrojit úsečku o délce $(3/2)^2$. Podívejme se na obr. 4, kde délka úseček $|AC|$, $|CD|$ a $|DB|$ je rovna jedné. Bod E je střed úsečky CD. Sestrojme přímku p, která je kolmá k přímce AB a prochází bodem C. Nyní ke konstrukci hledané úsečky použijeme Eukleidovu větu o odvěsně takto. Sestrojme kružnici se středem v bodě A a poloměrem rovným $|AE|$. Průsečík této kružnice se sestrojenou kolmicí p označme F. Sestrojme úsečku AF a k ní kolmici procházející bodem F. Průsečík této přímky s úsečkou AB označme L. Podle Eukleidovy věty o odvěsně aplikované na pravoúhlý trojúhelník AFL, kde známe délky úseček $|AC|=1$ a $|AF|=3/2$, je úsečka AL hledaná úsečka, jejíž délka je $(3/2)^2$.



Obr. 4

Pro $n=2$ hledáme úsečku o délce $(5/4)^4$. Nyní náš postup budeme opakovat dvakrát. Sledujme čárkovanou část obr. 4. Vycházíme z úsečky AG, kde G je střed úsečky CE. Po první konstrukci dostaneme bod I a po druhé následně bod K. Úsečka AK má délku rovnou $(5/4)^4$. Obecně, pokud bychom chtěli sestrojit úsečku o délce $(1+1/2^n)^{2^n}$, budeme náš postup opakovat n-krát. Přitom vycházíme z úsečky AM, jejíž délka je $1+1/2^n$. Úsečku AM sestrojíme tak, že nejdříve úsečku CD půlíme, tím získáme bod M_1, který je střed úsečky CD. Dále půlíme úsečku CM_1 a získáme bod M_2 atd. Až získáme bod $M = M_n$. Snadným algebraickým výpočtem dostaneme, že při naší konstrukci pro $n = 5$ získáme úsečku o délce rovné $(1+1/2^5)^{2^5} \doteq 2{,}676\,990\,129\,38\ldots$, zatímco hodnota $\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,4\ldots$ Jak vidíme, rozdíl je poměrně malý. Nicméně pomocí naší konstrukce můžeme sestrojit úsečku, jejíž délka se bude lišit od Eulerova čísla o libovolně malou hodnotu. Pokud bychom chtěli dosáhnout stejnou přesnost jakou dosáhl Kochański, je třeba zvolit alespoň $n = 15$. Při této volbě je délka výsledné úsečky rovna $(1+1/2^{15})^{2^{15}} \doteq 2,71824035\ldots$ Tedy přesnosti na čtyři desetinná místa jsme dosáhli až při volbě $n = 15$, přesnost o jedno místo vyšší získáme až při volbě alespoň $n = 20$.

Závěr

Jak jsme mohli vidět, naše konstrukce nám umožňuje teoreticky sestrojit úsečku, jejíž délka se bude s libovolnou přesností blížit hodnotě Eulerova čísla e. Proto si myslíme, že naše konstrukce může být přínosná. Navíc nám není známá žádná konstrukce úsečky délky přibližně rovné e.

Poděkování

Velké poděkování patří doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., za jeho ochotu přečíst původní poznámky a za následné cenné rady, které vedly ke vzniku tohoto článku. Děkuji také doc. Ing. Ľubomíře Dvořákové, Ph.D., za pomoc s českým jazykem a přepis článku do LaTeXu.

Literatura

[1] Ježková, A.: *Historie čísla e*. Bakalářská práce, PřF UP, Olomouc, 2014, [online]. Dostupné z: theses.cz/id/9qlvst/Jezkova.pdf.

[2] Kašparová, M., Nádeník, Z.: Jan Sobotka (1862–1931). Přibližné rektifikace kruhového oblouku. Matfyzpress, Praha, 2010, s. 53–79.

[3] Slavík, A.: Geometrické důkazy v matematické analýze. *PMFA*, roč. 64 (2019), č. 4, s. 229–237.