Václav Vopravil

Nestranné hry

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 2, 98–114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148579

NESTRANNÉ HRY

Václav Vopravil

Prolog

Zde diskutovaná látka leží na pomezí logiky, teorie grafů, kombinatoriky, teorie čísel a počítačové vědy. Prvního velkého výsledku dosáhl na tomto poli Charles L. Bouton, který v roce 1902 provedl úplnou analýzu pro nestrannou[1] hru Nim. Hra Nim je velice jednoduchou hrou a má hezké matematické pozadí, strukturu. Během studia je pravděpodobné, že čtenář nalezne souvislosti a mnoho otevřených problémů. Budeme vyšetřovat klasické matematické hry, které lze najít v mnoha knihách věnovaných tzv. rekreační matematice. Teorie kombinatorických her je bohatým zdrojem úloh algoritmických problémů, je zdrojem lehce uchopitelných problémů, jejichž řešení je často velmi složité.

Wythoffova hra[2] pochází z roku 1907.[3] Tato hra je zajímavým příkladem teorie her. Pravidla hry jsou jednoduchá: Hraje se se dvěma hromádkami kamenů (nebo jiných předmětů). Dva hráči se v tazích střídají, v každém tahu mohou odebrat libovolný (nenulový) počet kamenů z jedné hromádky, nebo odebrat stejný počet kamenů současně z obou hromádek. Poslední hráč vyhrává. Poměrně nečekaně o padesát let později (okolo roku 1960) Rufus P. Isaac[4] zavedl izomorfní hru, která se hraje s královnou na šachovnici. Hráči střídavě posunují královnu po šachovnici, královna ovšem může táhnout pouze doleva, dolů, nebo vlevo šikmo dolů. Hráč, který dosáhne políčka $a1$, vyhrál.

[1] V nestranné hře mají oba hráči stejnou množinu tahů (impartial).

[2] Willem Abraham Wythoff, holandský matematik, (1865–1939)

[3] W. A. Wythoff, *A modification of the game of Nim*, Nieuw Arch. Wisk. **7** (1907) 199–202

[4] Rufus Philip Isaacs, teoretik v oblasti her, (1914–1981)

V naší verzi WYTH KRÁLOVNA může být na políčkách více královen (žádná, jedna nebo více), tj. hrajeme disjunktní součet několika kopií WYTHOFFOVY HRY. Tah jedné královny neovlivní pozici ostatních královen.

Ve WYTHOFFOVĚ HŘE[5] se hráči střídají v tazích, dokud nedosáhnou koncové pozice. Hru nazýváme nestrannou hrou, protože oba hráči mají vždy na výběr stejnou množinu tahů. Tah závisí pouze na pozici hry a ne na tom, který z hráčů je na tahu.

S těmito předpoklady můžeme zavést více formálně tuto definici: Na rozdíl od klasické teorie her, která se zabývá ekonomickými a sociálními vztahy, teorie kombinatorických her se zabývá specifickými hrami dvou hráčů bez náhody. Informativně takové hry můžeme charakterizovat takto:

Definice 1. Konečná *nestranná kombinatorická hra* dvou hráčů (stručně hra) splňuje tyto podmínky:

1. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají.
2. Hra má konečný počet pozic a pravidla hry určují všechny možné tahy z pozic.
3. Z každé pozice mají oba hráči stejnou množinu možných tahů.
4. Hra skončí dosažením koncové pozice, tj. pozice, ze které nevede žádný tah pro hráče, který je právě na tahu. Hráč, který dosáhne koncové pozice, vyhrál.
5. Hra skončí po konečně mnoha tazích a nezáleží na tom, jak se hrálo.

Tomuto rámci vyhovují následující hry:

Příklad 2. (Hry s odebíráním předmětů.) Na počátku hry je dána jedna hromádka s n kameny a množina $S \subset \mathbb{N}$. Dva hráči se střídají v tazích, v každém tahu mohou odebrat tolik kamenů, kolik je v množině S (substrakční množina). Hráč, který odebral poslední kámen, vyhrál (normální varianta hry). Například, může se z hromádky odebírat $1, 2$ nebo tři kameny. Může si nějaký hráč vynutit vítězství a pokud ano, jak bude hrát?

[5] Hra se také někdy nazývá Wythoffův NIM, nebo hra na dvou hromádkách.

Příklad 3. (NIM.) Hra se hraje s kameny na několika hromádkách. V každém tahu hráč odebere všechny, nebo několik kamenů z jedné hromádky. Odebírá alespoň jeden kámen a pouze z jedné hromádky. Hráči se v tazích střídají, hráč, který odebere poslední kámen (na hromádkách již žádné nejsou), vyhrál a jeho soupeř prohrál. Určete vítěznou strategii.

Příklad 4. Hru hrají dva hráči, kteří se v tazích střídají. Na počátku oba hráči mají dostatek kamenů. V každém tahu hráč, který je na tahu, přidá na stůl jeden, dva, nebo pět kamenů. Pokud na stole leží buďto 1) více než 40 kamenů nebo 2) druhá mocnina počtu kamenů, hra končí. Nalezněte vyhrávající strategii.

Příklad 5. (VIM.) Máme několik řad černých a bílých koleček. Například $\begin{array}{|l}\bullet\bullet\circ\circ\bullet\\ \bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet\\ \circ\circ\circ\bullet\circ\end{array}$. Hráči se střídají v tazích, v každém tahu hráč 1) vybere řádek 2) změní jedno nebo více koleček (vymění bílou za černou, nebo naopak). Jako první vymění černou za bílou a může měnit všechna kolečka libovolně vpravo. Hráč, který udělá poslední pravidly povolený tah, vyhrál. Hru hrajte s mincemi (panna a orel).

Kdo vyhraje, pokud oba hráči hrají optimálně? Odpověď se nazývá výsledek hry. Hlavním cílem kombinatorické teorie her (CGT) je vyřešit různé hry a určit jejich výsledek. Obvykle také budeme chtít znát i strategii vyhrávajícího hráče, kterou použije pro své vítězství ve hře. Cíle CGT tedy jsou:

1. Nalézt vítěze.
2. O kolik hráč vyhraje.
3. Jaký je první optimální tah (vyhrávající strategie).

Ne vždy se nám podaří na tyto otázky odpovědět. Vždy budeme předpokládat, že oba hráči hrají racionálně, tj. mohou-li táhnout do vyhrávající pozice, tak to udělají. A naopak soupeři nabídnou prohrávající pozici. Poznamenejme, že cílem teorie není hraní, ale rozbor pozic a popis jejich vztahů. Hráč vyhraje,[6] znamená, že

[6]Slovem vyhraje rozumíme, že hráč má možnost táhnout tak, aby vyhrál, bez ohledu na možné tahy soupeře. Tato možnost a popis, jak hráč bude hrát (odpovídat na jednotlivé tahy) se nazývá vyhrávající strategie. Jinými

má vyhrávající strategii. Klasický problém je přiřazení hodnoty hře (její pozici) a podle této hodnoty korigovat své tahy.

Nejlepší cestou, jak popsat řešení nestranné hry, je podívat se na příklad. Uvažujme hru s odebíráním kamenů. Na stole leží 7 kamenů, hráči se v tazích střídají, v každém tahu odeberou jeden nebo dva kameny. Hra končí, není-li na stole kámen. Hráč, který odebral poslední kámen (normální varianta), vyhrál. Není-li na stole kámen, vyhraje druhý hráč (ten, který nezačíná), protože hráč na tahu, první hráč, nemůže táhnout. Je-li na hromádce jeden nebo dva kameny, vyhraje začínající hráč, protože ve svém tahu může odebrat všechny kameny. Jsou-li na hromádce 3 kameny, hráč na tahu může odebrat pouze 1 nebo 2 kameny a na hromádce zůstanou 2 nebo 1 kámen. První hráč nemůže vyhrát, a tak vyhraje druhý hráč. Z pozice 4 nebo 5 kamenů začínající hráč může odebrat tolik kamenů, aby soupeřovi nabídl pozici se třemi kameny a vyhraje. Z pozice o 6 kamenech opět nelze vyhrát, protože druhý hráč může odebrat tolik, aby zanechal na hromádce tři kameny a použije opět předcházející rozbor. Z pozice 7 kamenů vyhraje tedy první hráč (stačí odebrat 1 kámen). Obecně pozice vyhrávající pro druhého hráče jsou pozice $x \equiv 0 \mod 3$. Použitím stejných argumentů ve hře, kde se v jednom tahu může odebírat $1, 2$ nebo tři kameny, jsou vyhrávající pozice pro druhého hráče $x \equiv 0 \mod 4$. Zobecněním dostaneme: Může-li se v každém tahu odebírat $1, 2, \ldots, k$ kamenů, jsou vyhrávající pozice pro druhého hráče $x \equiv 0 \mod k+1$. Někdy se hrají tzv. betlové varianty (misère). V betlových variantách se hraje stejně, až koncová podmínka je změněna: Hráč, který je donucen odebrat poslední kámen, prohrál. Pro první hru získáme pozice (stejným postupem) $x \equiv 1 \mod 3$, druhou hru $x \equiv 1 \mod 4$ jsou pozicemi, kde vyhraje druhý hráč (ve zbývajících první hráč). Zobecněním v betlové variantě získáme: Může-li se odebírat $1, 2, \ldots k$ kamenů, jsou pozice $x \equiv 1 \mod k+1$ vyhrávající pro druhého hráče.

V prvním příkladu 2: Bude-li na hromádce $n = 1, 2$ nebo 3 kameny, první hráč může odebrat všechny kameny a vyhraje. Je-li

slovy, je-li hráč inteligentní a je ve vyhrávající pozici, potom vyhraje (nedělá záměrně chyby).

$n = 4$, první hráč prohraje, protože druhý hráč odpoví po odebrání k doplňkem $|4 - k|$ kamenů. Podobně, bude-li na hromádce $n = 5, 6$ nebo 7 kamenů, hráč na tahu vyhraje a pozice $n = 8$ je opět prohrávající pro začínajícího hráče. Strategie je jednoduše popsatelná: První (začínající) hráč prohraje, je-li n násobek 4, jinak vyhraje první hráč.

Pro hru NIM na jedné hromádce je situace přehledná. Je-li hromádka nenulová, první hráč může odebrat všechny kameny a vyhraje. Jsou-li k dispozici dvě hromádky o stejném počtu kamenů, vyhraje druhý hráč (může kopírovat tahy). Pro dvě nestejné hromádky vyhraje první hráč dorovnáním hromádek. První hráč může odebrat $|m - n|$ kamenů z větší hromádky. Vzniknou dvě stejné hromádky, kde je možné použít kopírování tahů. Pro tři a více hromádek je strategie komplikovanější. Vyhrávající strategie musí fungovat pro libovolný počet hromádek a libovolný počet kamenů.

Rozklad $\mathcal{P}/\mathcal{N}$

K určení vyhrávající strategie nám pomůže označovat jednotlivé pozice $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$. Pozice je $\mathcal{P}$ pozice, pokud hráč v této pozici nemůže vyhrát. Také říkáme, že předcházející hráč vyhraje. Hra je v $\mathcal{N}$ pozici, pokud vyhraje následující hráč (hráč na tahu). Pozice $\mathcal{N}$ a $\mathcal{P}$ můžeme získat značkovacím algoritmem:

Definice 6. $\mathcal{P}$ pozice a $\mathcal{N}$ pozice jsou definovány rekurzivně[7] takto (charakteristické vlastnosti $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$):

1. Všechny koncové pozice jsou $\mathcal{P}$ pozice.
2. Z každé $\mathcal{N}$ pozice je nejméně jeden tah do $\mathcal{P}$ pozice.
3. Z každé $\mathcal{P}$ pozice všechny tahy vedou do $\mathcal{N}$ pozice.

Určit (označit) pozice $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ je jednoduché pomocí tzv. *zpětné indukce.* Vraťme se k příkladu 2. Pro každou pozici x definujeme $\mathrm{Move}(x)$ jako množinu všech pozic y, které je možné dosáhnout z pozice x jedním tahem. Například $\mathrm{Move}(0) = \emptyset$, $\mathrm{Move}(1) = \{0\}$,

[7] Platí v normální variantě. V betlové variantě se zamění koncová pozice a následující body se vymění.

Move(2) $= \{0, 1\}$ a Move(x) $= \{x-1, x-2, x-3\}$ pro $x \geq 3$. Množiny $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$ označujeme stejně $\mathcal{P}$ a $\mathcal{N}$.

Algoritmus může vypadat třeba takto:

1. Výchozí pozice: Všechny koncové pozice označme $\mathcal{P}$.
2. Všechny pozice, ze kterých existuje tah do $\mathcal{P}$ pozice, označme $\mathcal{N}$.
3. Označme jako pozice $\mathcal{P}$ ty pozice, ze kterých všechny tahy vedou do pozice $\mathcal{N}$.
4. Pokud se nenajde žádná nová pozice $\mathcal{P}$ v kroku 3, konec. Jinak následujeme do bodu 2.

Každá pozice je buď $\mathcal{P}$ nebo $\mathcal{N}$. $\mathcal{P}$ je množina vyhrávajících pozic pro předcházejícího hráče a $\mathcal{N}$ je množina vyhrávajících pozic pro následujícího hráče. Pro $x \in \mathcal{P}$, potom tah je buď (a) do $\mathcal{N}$ nebo (b) x je koncová pozice. Pozice $x \in \mathcal{N}$, když existuje tah do $\mathcal{P}$. Takto značkujeme všechny pozice hry, dokud nedosáhneme do počáteční pozice; patří-li do $\mathcal{N}$, první hráč vyhraje (má vyhrávající strategii), jinak druhý hráč má vyhrávající strategii.

Je potřeba odpovědět na jednoduchou otázku: Kdo vyhraje? Jak hra dopadne? Začneme popořádku. První idea je idea symetrie.

Příklad 7. Dokažte, že pozice NIM$[1, 3, 3, 1]$ je $\mathcal{P}$ (druhý vyhraje).

Hru NIM můžeme rozložit na NIM$[3, 1]$ a NIM$[3, 1]$ nebo na NIM$[3, 3]$ a NIM$[1, 1]$. V obou hrách vyhraje druhý, resp. co je dovoleno jednomu hráči v první hře, to je dovoleno (analogicky) také druhému hráči ve zbývající hře. Symetrický tah vždy bude existovat a vždy budeme umět odpovědět na libovolný tah soupeře. Tedy první hráč prohraje a druhý vyhraje.

Věta 8. *Ve všech symetrických hrách vyhraje druhý hráč.*

Větu nelze obrátit, protože NIM$[1, 2, 3]$ je nesymetrická, ale vyhraje druhý hráč.

$\mathcal{P}$ pozice budeme také nazývat nulovými pozicemi, ostatní pozice zůstanou nenulové. Příkladem budiž třeba hry NIM$[1, 2, 3]$, NIM$[7, 7]$, NIM$[2, 2, 1, 1]$ apod. Z dalšího textu bude zřejmé, proč $\mathcal{P}$ pozice označujeme také jako nulové.

Věta 9. *Jestliže ke hře G přidáme (odebereme) nulovou hru, hra dopadne stejně.*

Náznak důkazu: Druhý hráč zahraje v nulové hře pouze jako odpověď prvnímu hráči.

NIM, nim čísla a Sprague–Grundyova teorie

Operace, která nám pomůže řešit hru NIM s několika hromádkami kamenů, je binární součet bez přenosu do vyšších řádů, kterou nazýváme také *nim součet*. Počet kamenů na jednotlivých hromádkách nazýváme *nim čísla* (nimbers). Nim čísla zapíšeme ve dvojkové soustavě a sečteme jako bitový XOR (spojka vylučovací nebo). Nim součet budeme označovat $\oplus$.

Například $22 \oplus 27 \oplus 18 = 010110 \oplus 100101 \oplus 010010 = 100001$, tedy nim součet $22, 17$ a 18 je číslo 100001 ve dvojkové soustavě, což je 33 v desítkové soustavě. Nim číslo pozice se také nazývá nim hodnota.

Nim čísla hrají klíčovou roli k určení $\mathcal{P}$ pozic ve hře NIM.

Věta 10 (Boutonova věta[8])**.** *Pozice v n hromádkové hře* NIM *(x_i označuje počet kamenů na i-té hromádce) je $\mathcal{P}$ pozice tehdy a jen tehdy, když*

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0.$$

Jinak je $\mathcal{N}$ pozicí ($\neq 0$).

Důkaz naznačíme. Nejdříve předpokládejme, $a_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus \oplus x_n = 0$, a soustředíme se na typický tah $x_1 \to x_1'$. Nutně tedy $x_1 \neq x_1'$ a $x_1' \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \neq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$. Tah tedy vede do nenulové pozice.

Naopak: Předpokládejme, že $x = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \neq 0$. Vezměme cifru nejvyššího řádu čísla x (ve dvojkové soustavě). Nejméně jedno x_i musí mít tuto cifru rovnu jedné. Bez ohledu na obecnost to může být x_1. Položíme $x \oplus x_1 = x_1'$. Nutně $x_1' < x_1$. Potom ale $x_1' \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = x \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = x \oplus x = 0$. □

[8] C. L. Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Ann. of Math., 2-nd Ser., **3** (1901–1902), 35-39

Poznamenejme, že Boutonova věta platí i pro $n = 1, 2$.

Každý tah z $\mathcal{P}$ pozice vede do $\mathcal{N}$ pozice s nenulovým nim číslem. Z každé nenulové pozice existuje dovolený tah, který převede pozici na nulovou.

Příklad 11. Uvažujme hru NIM na 4 hromádkách v pozici Nim$[3, 5, 7, 9]$. Musíme spočítat $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9$. Protože $3 = (11)_2$, $5 = (101)_2$, $7 = (111)_2$ a $9 = (1001)_2$, dostaneme

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \oplus & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

je $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9 = 8 \neq 0$ a tedy pozice je $\mathcal{N}$.

Jediný vyhrávající tah je odebrat 8 kamenů z poslední hromádky. Dostaneme:

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \oplus & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Příklad 12. $3 \oplus 5 \oplus 7 = 001 \oplus 101 \oplus 111 = 001 = 1$, $6 \oplus 11 \oplus \oplus 13 = 0110 \oplus 1011 \oplus 1101 = 0000 = 0$. Tedy pozice $[6, 11, 13]$ je $\mathcal{P}$ pozice, pozice $[3, 5, 7]$ je $\mathcal{N}$ pozice.

Pro libovolnou konečnou nestrannou kombinatorickou hru P. M. Grundy[9] popsal, jak ve hře přiřadit každé pozici x nezáporné celé číslo $\mathcal{G}(x)$, které nazýváme *Grundyovým číslem pozice.* Je to nejmenší nezáporné celé číslo $y \notin \mathrm{Move}(x)$. Číslo $\mathcal{G}(x)$ se také nazývá mex (nejmenší vyloučené číslo). Je-li $M \subset \mathbb{N}$, potom $\operatorname{mex} M = \min(\mathbb{N} \setminus M)$.

Můžeme udělat několik pozorování: Je-li k koncová pozice, potom $\mathrm{Move}(k) = \varnothing$, tedy $\mathcal{G}(k) = 0$.

Je-li $\mathcal{G}(y) = 0$ a $y \in \mathrm{Move}(x)$, potom $\mathcal{G}(x)$ je nenulové. Je-li $\mathcal{G}(y) > 0$ pro každé $y \in \mathrm{Move}(x)$, potom $\mathcal{G}(x) = 0$.

[9] P. M. Grundy, *Mathematics of games*, Eureka, **2** (1939), 6-8; R. Sprague, *Über mathematische Kampfspiele*, Tôhoku Math. J., **41** (1936), 438-444

Věta 13 (Grundyova věta)**.** *Pozice x v nestranné hře dvou hráčů je $\mathcal{P}$ pozice právě tehdy a jen tehdy, je-li $\mathcal{G}(x) = 0$.*

Důkaz vynecháme.[10]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\mathcal{G}(x)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	...

Tab. 1: Grundyova čísla z příkladu 2

Úloha 14. V příkladu 4 označte koncové pozice > 40, a 36, 25, 16, 9, 4 Grundyovým číslem 0. Zpětnou indukcí rekurzivně přiřaďte hodnoty zbývajícím pozicím.

Posloupnost Grundyových čísel nestranných her může být periodická s případnou předperiodou. I poměrně malé množiny S mohou mít velkou periodu. Např. substrakční množina $S = \{7, 64, 89, 96\}$ vytvoří periodu o délce 5756171 a má předperiodu délky 1061. Nebo $S = \{22, 34, 53, 87\}$ má periodu délky 114109 a předperiodu délky 314. Nalezněte periodu hry s $S = \{2, 5, 6\}$ a své tvrzení dokažte.

Základním nástrojem je *Sprague–Grundyova věta*. Každá konečná nestranná kombinatorická hra dvou hráčů je ekvivalentní nějaké hře NIM na jedné hromádce.

Boutonova věta je speciálním případem Sprague–Grundyovy věty.

Pro Issacovu variantu WYTHOFFOVY HRY můžeme hodnoty tabelovat.[11]

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32
0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49	52

Tab. 2: Prvních 21 nulových pozic WYTHOFFOVY HRY

[10] Čtenář důkaz, jakož i důkazy dalších vět, nalezne v citovaných originálech, nebo v [6], [8], resp. v [2].

[11] `https://oeis.org/A001950`

24	25	26	27	23	22	21	29	13	20	19	28	30	32	5	6	34	33	35	36	14	37	17	38	31
23	21	22	19	24	26	27	28	11	18	20	25	4	3	**0**	2	29	31	9	33	16	12	14	30	38
22	23	21	20	25	24	26	18	28	29	27	30	2	31	4	32	33	34	10	35	13	36	19	14	17
21	22	23	24	20	19	25	11	27	28	26	16	1	29	3	30	31	32	14	15	33	18	36	12	37
20	18	19	22	21	23	24	25	26	27	28	3	**0**	1	29	11	30	9	31	12	17	33	13	16	14
19	20	18	17	14	21	11	16	24	22	23	1	5	4	26	27	28	10	13	25	12	15	35	33	36
18	19	20	21	17	16	15	22	23	4	5	**0**	3	24	25	7	11	26	12	13	31	14	10	9	35
17	15	16	13	18	11	14	12	19	3	4	5	23	22	8	24	25	21	26	10	9	32	34	31	33
16	17	15	14	19	18	20	21	12	2	1	4	6	10	22	9	13	25	11	28	30	31	33	29	34
15	16	17	18	10	13	12	19	14	**0**	3	21	22	8	23	20	9	24	7	27	11	30	32	2	6
14	12	13	16	15	17	18	10	9	1	2	20	21	7	11	23	22	8	25	26	29	3	4	**0**	5
13	14	12	11	16	15	17	2	**0**	5	6	19	20	9	7	8	10	22	24	4	1	29	31	3	32
12	13	14	15	11	9	16	17	18	19	7	8	10	20	21	22	6	23	3	5	**0**	1	2	4	30
11	9	10	7	12	14	2	13	17	6	18	15	8	19	20	21	4	5	**0**	1	3	16	30	25	28
10	11	9	8	13	12	**0**	15	16	17	14	18	7	6	2	3	1	4	5	23	28	26	27	20	19
9	10	11	12	8	7	13	14	15	16	17	6	19	5	1	**0**	2	3	4	22	27	28	29	18	20
8	6	7	10	1	2	5	3	4	15	16	17	18	**0**	9	14	12	19	23	24	26	27	28	11	13
7	8	6	9	**0**	1	4	5	3	14	15	13	17	2	10	19	21	12	22	16	25	11	18	28	29
6	7	8	1	9	10	3	4	5	13	**0**	2	16	17	18	12	20	14	15	11	24	25	26	27	21
5	3	4	**0**	6	8	10	1	2	7	12	14	9	15	17	13	18	11	16	21	23	19	24	26	22
4	5	3	2	7	6	9	**0**	1	8	13	12	11	16	15	10	19	18	17	14	21	20	25	24	23
3	4	5	6	2	**0**	1	9	10	12	8	7	15	11	16	18	14	13	21	17	22	24	20	19	27
2	**0**	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	17	15	16	20	18	19	23	21	22	26
1	2	**0**	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13	14	12	16	17	15	19	20	18	22	23	21	25
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Tab. 3: Hodnoty nimů pozic 25×25 WYTHOFFOVY HRY

Nulové pozice jsou dvojice $(\lfloor n\varphi \rfloor; \lfloor n\varphi^2 \rfloor)$, kde φ je řešení rovnice $\varphi^2 = \varphi + 1$. Číslo φ se nazývá *zlatý řez* a má mnoho zajímavých aritmetických a geometrických vlastností. Čísla $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a φ^2 mají za desetinnou čárkou stejné cifry. Nalezněte všechna taková čísla τ, která mají tuto vlastnost.

Z tabulky pozice s nulovou hodnotou jsou pozice

$$(m, n),\ \text{resp. } (n, m) = (1, 2), (3, 5)(4, 7)(6, 10), (8, 13), \ldots$$

Příklad 15. (Hra odebírání čtverců.) Jedná se o hru s odebíráním, kde $S = \{1, 4, 9, 16, \ldots, i^2, \ldots\}$. Graf této hry není těžké sestrojit, tak jako u všech her s odčítáním, grafy jsou analogické. Vrcholy (uzly, pozice) grafu jsou nezáporná celá čísla, šipka (orientované hrany) znázorňuje možné tahy. Místo grafu je možné sestrojit jednorozměrnou tabulku:

$$\begin{array}{c|cccccccccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \ldots \end{array}$$

a jednotlivá čísla označíme $\mathcal{P}$, resp. $\mathcal{N}$ podle toho, zda je pozice nulová či nenulová. To je možné udělat analogicky jako u Eratosthenova síta. Například, kam až hráč při svém tahu dotáhne.

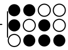
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathcal{P}$ /$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	...
$\mathcal{G}(x)$	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	0	...

Úloha 16. Vraťte se ke hře VIM na straně 100. Hru analyzujte. Který hráč v následujících hrách vyhraje? První (začínající), nebo druhý?

1. Jednořádkové VIM $|\circ\circ\circ$, $|\circ\bullet\circ$, $|\bullet\bullet\bullet$.
2. Nalezněte maximální počet tahů ve hře VIM $|\circ\bullet\bullet$.
3. Dvouřádkové VIM $\begin{array}{|ccc}\bullet&\circ&\bullet\\\circ&\bullet&\circ\end{array}$, $\begin{array}{|ccc}\bullet&\bullet&\circ\\\circ&\bullet&\circ\end{array}$, $\begin{array}{|cccc}\bullet&\bullet&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\bullet&\circ\end{array}$.
4. Můžete udělat závěr pozorování her VIM s nejvíce dvěma hromádkami?
5. Hrajte VIM $\begin{array}{|cccc}\bullet&\bullet&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\bullet&\circ\\\circ&\bullet&\bullet&\bullet\end{array}$!

Úloha 17. (hry NIM a VIM)

1. Jaký je maximální počet tahů ve hře NIM[17] (jedna hromádka ve hře NIM se 17 kameny)?
2. Nalezněte jednořádkový VIM se stejným počtem maximálních tahů, jako ve hře NIM[17].
3. Objevíte souvislost hry NIM a VIM?

4. Zahrajte si také NIM$[3, 5, 8]+$.

Aritmetika a algebra NIM

Uvažujme množinu nezáporných celých čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Nim součet a násobení definuje nad $\mathbb{N}$ pole charakteristiky 2. Symboly $\oplus$ a $\otimes$ použijeme pro tento (nim) součet a (nim) součin.

Tabulku sčítání dostaneme pomocí tohoto algoritmu: Abychom zaplnili políčko $x \oplus y$, musíme mít zaplněny všechny $x' \oplus y$ a $x \oplus y'$, kde $x' < x$ a $y' < y$. Potom $x \oplus y$ je nejmenší možné nezáporné celé číslo, které se nevyskytuje v tomto sloupci a řádku (mex).

Pravidla pro nim součet:

1. Nim součet čísel mocnin dvou je jejich obvyklý součet. Např. $16 \oplus 8 \oplus 4 \oplus 1 = 29$, $32 \oplus 4 \oplus 2 = 38$.
2. Nim součet dvou stejných čísel je roven 0.

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tab. 4: Sčítání hodnot hry NIM. Prvních 16×16 Sprague–Grundyových hodnot

Příklad 18. 1. $21 \oplus 7 = (16+4+1) \oplus (4+2+1) = 16 \oplus 2 = 18$
2. $189 \oplus 165 = (128 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1) \oplus (128 + 32 + 4 + + 1) = 16 \oplus 8 = 24.$

Příklad 19. 1. $21 \oplus 7 = 10101 \oplus 111 = 10010 = 18$
2. $189 \oplus 165 = 10111101 \oplus 10100101 = 00011000 = 24.$

Nim součet se používá při definování nim součinu, stejně jako v obvyklém tělese. Podobnou roli jako měla u součtu 2^n u nim součinu mají Fermatovy[12] mocniny 2^{2^n}.

Pro nezáporné celé číslo n nazýváme Fermatovou mocninou mocninu 2^{2^n}. Fermatovy mocniny[13] jsou $2 = 2^{2^0}$, $4 = 2^{2^1}$, $16 = 2^{2^2}$, $256 = 2^{2^3}$ nebo $65\,536 = 2^{2^4}$, $4\,294\,967\,296$, $1\,844\,674\,4073\,709\,551\,616$ atp.

Připomeňme tento fakt o nim součtu:
Nim součet je jediná komutativní a asociativní operace s nulovým prvkem 0, definovaná na množině přirozených čísel splňující následující dvě podmínky:

1. Nim součet různých mocnin dvou je jejich obvyklý součet,
2. nim součet stejných mocnin dvou je nula.

Nim součet dvou nezáporných celých čísel x, y získáme tak, že čísla převedeme do dvojkové soustavy a jejich cifry sečteme modulo 2, tj. $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1$ a $1 + 1 = 0$.

Pro nim součet používáme značku $\oplus$.

Např. uvažujme $5 \oplus 7$. Dostaneme:

$$5 = 2^2 + 1 \qquad 7 = 2^2 + 2^1 + 1.$$

Proto ve dvojkové soustavě dostaneme

$$5 = (101)_2 \qquad 7 = (111)_2$$

Součtem cifer modulo 2 dostaneme: $\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ \oplus & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array}$

Protože $(010)_2 = 2$, je $5 \oplus 7 = 2$.

[12]P. Fermat (1601–1665) vyslovil hypotézu, že čísla tvaru $2^{2^n} + 1$ jsou prvočísla. Tato hypotéza platí pro $n \leq 4$. Pro $n = 5, \ldots, 21$ se jedná o čísla složená.

[13]viz `http://oeis.org/A001146`

Nim součin (podle Conwaye, [6], kap. 6) je jediná operace součinu spolu s nim součtem na množině přirozených čísel, která vytváří strukturu pole s 0 a 1 a mající následující dvě podmínky.

Budeme označovat $\otimes$ nim součin a $\cdot$ obvyklé násobení celých čísel. Je-li k nezáporné a $k < 2^{2^n}$, definujeme $k \otimes 2^{2^n} = k \cdot 2^{2^n}$. Tedy např. $4 \otimes 3 = 4 \cdot 3 = 12$ a $16 \otimes 13 = 16 \cdot 13 = 208$.

Dále definujeme $2^{2^n} \otimes 2^{2^n} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2^n} = 3 \cdot 2^{2^n - 1}$. Např. $256 \otimes \otimes 256 = 2^{2^3} \otimes 2^{2^3} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2^3} = 384$. Podotkněme, že $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

$$2^{2^m} \otimes 2^{2^n} = \begin{cases} 2^{2^m} 2^{2^n} & \text{je-li } m \neq n; \\ 3(2^{2^m - 1}) & \text{je-li } m = n. \end{cases}$$

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0	2	3	1	8	10	11	9	12	14	15	13	4	6	7	5
3	0	3	1	2	12	15	13	14	4	7	5	6	8	11	9	10
4	0	4	8	12	6	2	14	10	11	15	3	7	13	9	5	1
5	0	5	10	15	2	7	8	13	3	6	9	12	1	4	11	14
6	0	6	11	13	14	8	5	3	7	1	12	10	9	15	2	4
7	0	7	9	14	10	13	3	4	15	8	6	1	5	2	12	11
8	0	8	12	4	11	3	7	15	13	5	1	9	6	14	10	2
9	0	9	14	7	15	6	1	8	5	12	11	2	10	3	4	13
10	0	10	15	5	3	9	12	6	1	11	14	4	2	8	13	7
11	0	11	13	6	7	12	10	1	9	2	4	15	14	5	3	8
12	0	12	4	8	13	1	9	5	6	10	2	14	11	7	15	3
13	0	13	6	11	9	4	15	2	14	3	8	5	7	10	1	12
14	0	14	7	9	5	11	2	12	10	4	13	3	15	1	8	6
15	0	15	5	10	1	14	4	11	2	13	7	8	3	12	6	9

Tab. 5: Násobení hodnot hry NIM. Prvních 16×16 Sprague–Grundyových hodnot

Množina $\{0, 1, 2, \ldots, 2^{2^n} - 1\}$ vzhledem k $\oplus, \otimes$ tvoří pole (komutativní těleso). Vlastnosti součtu a součinu:

1. $x \oplus y = y \oplus x$
2. $x \oplus y = x \oplus z$, je-li $y = z$

3. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
4. $x \oplus 0 = x$, $x \oplus x = 0$, $-x = x$
5. $x \oplus y = z \oplus y \Rightarrow x = z$
6. $x \otimes 0 = 0$, $x \otimes 1 = x$, $x \otimes y = y \otimes x$
7. $(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$
8. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.

Formálně je dáno sčítání $\oplus$ a násobení $\otimes$ rekurzivně,

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \operatorname{mex}(\{x' \oplus y;\ x' < x\} \cup \{x \oplus y';\ y' < y\}), \\ x \otimes y &= \operatorname{mex}(\{x' \otimes y \oplus x \otimes y' \oplus x' \otimes y';\ x' < x, y' < y\}). \end{aligned}$$

Pole $(\mathbb{N}, \oplus, \otimes)$ je nekonečné pole charakteristiky 2. Toto pole obsahuje konečná podpole charakteristiky 2, kde počet prvků je roven Fermatově mocnině. Platí:

$$F_2 \subset F_4 \subset F_{16} \subset F_{256} \subset \cdots \subset \mathbb{N},$$

kde F_{q_n}, $q_n = 2^{2^n}$.

Příklad 20.

$$\begin{aligned} 25 \otimes 40 &= (16 \oplus 9) \otimes (2 \otimes 16 \oplus 8) = \\ &= 2 \otimes 16^{\otimes 2} \oplus (9 \otimes 2 \oplus 8) \otimes 16 \oplus 9 \otimes 8 = \\ &= 2 \otimes (16 \oplus 8) \oplus (14 \oplus 8) \otimes 16 \oplus 5 = \\ &= (2 \oplus 14 \oplus 8) \otimes 16 \oplus (2 \otimes 8 \oplus 5) = \\ &= 4 \otimes 16 \oplus (12 \oplus 5) = 64 \oplus 9 = 73 \end{aligned}$$

Druhé mocniny leží samozřejmě na diagonále:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
$x \otimes x$	1	3	2	6	7	5	4	13	12	14	15	11	10	8	9	24	25	27	...

a tabulka převrácených hodnot:[14]

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
$1 \oslash x$	1	3	2	15	12	9	11	10	6	8	7	5	14	13	4	170	160	109	...

[14] viz `http://oeis.org/A051917`

Teorie kombinatorických her je relativně novým studijním oborem a má interdisciplinární charakter. Přitahuje matematiky, vědce z oblasti počítačové vědy, profesionální hráče i amatéry. Zatímco zde jsme se věnovali nestranným hrám, ve kterých oba hráči mají vždy identické možnosti tahů, celá teorie se stane velmi zajímavou při studiu *partyzánských (také barevných) her*, kde množiny tahů obou hráčů mohou být různé. Mnoho známých her (šachy, go, ...) patří této třídě. Bohužel v české literatuře se tomuto tématu nevěnuje náležitá pozornost. Pro zájemce je možné doporučit publikace [10], které jsou bohatou studnicí řešených i neřešených problémů. Slouží jako vynikající zdroj pro výzkumné projekty.

Literatura

[1] Vopravil, V. & Porkert, J. (1992). Hry a strategie. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, ročník 70, 52–57.

[2] Ferguson, T. S. *Game Theory, Impartial Combinatorial Games*, (UCLA lecture). Dostupné z `https://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf`

[3] Kirilov, A., Klumova, I. & Sosinskij, A. (1979). Сюрреалные числа (rus. Syurrealnye chisla). In *Kvant*, 11.

[4] Albert, M., Nowakowski, R. & Wolfe, D. (2007). *Lessons in play: An introduction to combinatorial game theory.* A K Peters, Ltd. / CRC Press, Natick, MA.

[5] Cihlář, J. & Vopravil, V. (1983, 1995). *Hry a čísla* (On Games and Numbers). PF UJEP Ústí nad Labem, 125 str., ISBN 8070441046.

[6] Conway, J. H. (2001). *On Numbers and Games.* Academic Press, 2ed., ISBN 1-56881-127-6.

[7] Knuth, D. E. (1974). Surreal Numbers. *How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, vi+119 pp, ISBN 0-201-03812-9. Illustrated by Jill C. Knuth. Czech translation by Helena Nešetřilová. (1978). Nadreálná čísla. In *Pokroky*

Matematiky, Fyziky a Astronomie, 23, 66–76, 130–139, 187–196, 246–261.

[8] von Stengel, B. (2011). *Game Theory Basics.* London School of Economics. Dostupné z `http://www.maths.lse.ac.uk/personal/stengel/lectnotes1-7.pdf`

[9] *Úvod do teorie kombinatorických her.* (červenec 2014). Dostupné z `http://www.wopravil.cz/hs`

[10] Berlekamp, E. R., Conway, J. H. & Guy, R. K. (2001–2004) *Winning Ways for your Mathematical Plays.* 2ed., vol. 1–4, A. K. Peters Ltd., ISBN 1-56881-130-6, ISBN 1-56881-142-X, ISBN 1-56881-143-8, ISBN 1-56881-144-6.

[11] Haff, L. R. & Garner, W. J. (2017). *An Introduction to Combinatorial Game Theory.* 2ed., ISBN 978-1365973826. Dostupné z `Lulu.com`

Abstract

This article is dedicated to combinatorial games and mathematical techniques that can be used in their analysis. We will introduce impartial games, we learn to work with $\mathcal{P}$ and $\mathcal{N}$ positions and Grundy numbers. The Sprague–Grundy theorem states that every position P_0 in the ultimate impartial combinatorial game is equivalent to a NIM game on one heap. Finally, let us mention the product of the nim numbers that can be used to analyze some combinatorial games.

Václav Vopravil
Praha
e-mail: mail@wopravil.cz