Učitel matematiky

Martina Kašparová

Maturita z matematiky v Bavorsku – zadání úloh a stručný postup řešení. Část 1

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 4, 236–255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148592

MATURITA Z MATEMATIKY V BAVORSKU – ZADÁNÍ ÚLOH A STRUČNÝ POSTUP ŘEŠENÍ ČÁST 1

Martina Kašparová, Lukáš Honzík,
Jaroslav Hora, Šárka Pěchoučková[1]

V následujícím textu uvádíme zadání maturitní písemné práce z matematiky, která se konala dne 3. 5. 2017 v bavorských gymnáziích. Jak bylo uvedeno v příspěvku (Kašparová, M. & Honzík, L. & Hora, J. & Pěchoučková, Š., 2018), je maturita z matematiky povinná a sestává z části A a části B (nebo B-CAS). Obě části obsahují úlohy z analýzy, stochastiky a geometrie.

Za volným překladem každé z částí A, B, resp. B-CAS (viz [1], [2], [3]) je tabulka s bodovým hodnocením a pod čarou stručné řešení.

Chcete-li se vyzkoušet, zda byste zvládli odmaturovat z matematiky v Bavorsku, pak přidáváme informaci, že v části A nejsou dovoleny žádné pomůcky (pouze psací potřeby) a odevzdává se po 90 minutách.

V části B lze použít ministerstvem schválené stochastické tabulky [4], které bohužel autoři neměli k dispozici, seznam vzorců (např. [5]), pomůcku [6] a kalkulátor vyhovující předpisům ministerstva. (Nesmí umožnit vykreslování grafů funkcí, úpravu výrazů s proměnnými, derivování a integrování, řešení rovnic a jejich soustav, přibližné určování nulových bodů funkcí, určit nebo ověřit rozhodovací pravidlo statistického testu, počítání s vektory, grafickou nebo symbolickou reprezentaci geometrického útvaru, určení polohových vlastností útvarů. Podrobně viz [7], [8] a [9]). Na vypracování části B je 180 minut.

[1]Práce byla podpořena vnitřním grantovým systémem FPE ZČU, GRAK 2017.

Ve verzi B-CAS lze použít kalkulátor Casio ClassPad 330, Casio ClassPad II fx-CP400, TI-Nspire CAS, TI-Nspire cx CAS, HP Prime Graphing Calculator, viz [10] a [12, str. 6]. U těchto kalkulátorů se naopak předpokládá (viz [11]), že nad rámec běžného kalkulátoru zvládnou derivovat a integrovat funkce, vykreslit graf funkce, umí dynamickou geometrii a to, co běžný tabulkový procesor.

Ve volném překladu úloh jsme ponechali zápisy v Bavorsku běžné, např. $S(0|1)$ nebo $[1;+\infty[$, v řešení užíváme u nás obvyklejší $S[0,1]$ nebo $\langle 1;+\infty)$. Obrázky 1–4 a 7 byly převzaty z [1], [2] a [3].

Státní ústav pro kvalitu a výzkum ve vzdělávání (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung) maturitní úlohy na svých www-stránkách zpřístupňuje, ale neposkytuje řešení. Níže uvedená řešení představují sice drobnou, ale pro čtenáře snad přidanou hodnotu tohoto příspěvku.

Zkušební část A, 90 minut

A Analýza

1. Je dána funkce $g\colon x \mapsto 2\cdot\sqrt{4+x}-1$ s maximálním definičním oborem D_g. Graf funkce g je označen G_g.

a) Určete D_g a souřadnice průsečíku G_g s osou y.

b) Popište, jak se postupně získá graf G_g z grafu funkce $w\colon x \mapsto \sqrt{x}$ definované v $\mathbb{R}_0^+$, a určete obor hodnot funkce g.

2. Je dána funkce f předpisem $f(x) = 2\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-1$, kde $x\in\mathbb{R}$.

a) Určete nulový bod funkce f.

b) Tečna ke grafu funkce f v bodě $S(0|1)$ ohraničuje s oběma souřadnicovými osami trojúhelník. Dokažte, že tento trojúhelník je rovnoramenný.

3. Určete předpis funkce, která má ve svém maximálním definičním oboru dané vlastnosti.

a) Graf funkce f je osově souměrný podle osy y a přímka s rovnicí $x=2$ je asymptota.

b) Funkce g není konstantní a platí $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

4. Na měřicí stanici bylo během 10 hodin sledováno množství pylu v krychlovém metru vzduchu. Rovnicí $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ lze popsat množství pylu v krychlovém metru vzduchu v čase t (v hodinách od začátku měření).

a) Určete průměrnou rychlost změny množství pylu v krychlovém metru vzduchu během prvních dvou hodin měření.

b) Určete čas od začátku měření, v němž činí okamžitá rychlost změny množství pylu v krychlovém metru vzduchu $-30\,\frac{1}{\mathrm{h}}$.

	úloha 1		úloha 2		úloha 3		úloha 4		$\sum$
	a	b	a	b	a	b	a	b	
BE	2	4	2	3	2	2	3	2	**20**

A Stochastika

1. Kolo štěstí má tři výseče, modrou, žlutou a červenou. Výseče mají různou velikost. Pravděpodobnost, že se po roztočení zasáhne modrá výseč, je p.

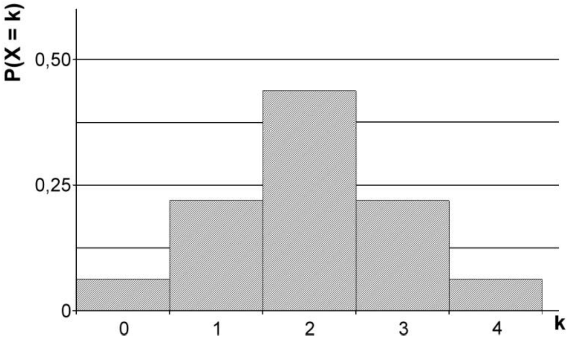
a) Interpretujte v této souvislosti výraz $(1-p)^7$.

b) Kolo štěstí je roztočeno desetkrát. Určete výraz, pomocí něhož lze vypočítat pravděpodobnost toho, že se modrá výseč zasáhne právě dvakrát.

c) Pravděpodobnost toho, že se po jednom roztočení zasáhne žlutá výseč, je 50 %. Felix pozoroval roztočení kola stokrát a zjistil, že podíl počtu roztočení, kdy byla zasažena žlutá výseč, byl podstatně nižší než 50 %. Dospěl k závěru: „Podíl počtu roztočení, kdy je zasažena žlutá výseč, bude muset být v následujících 100 roztočeních výrazně větší než 50 %.“ Vyhodnoťte Felixův závěr.

d) Kolo štěstí je roztočeno čtyřikrát a zaznamenává se pořadí barev jako výsledky. Určete počet možných pokusů, v nichž se modrá barva vůbec neobjeví.

2. Na obrázku 1 je znázorněno rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X s oborem hodnot $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ a střední hodnotou 2. Dokažte, že se nejedná o binomické rozdělení.



Obr. 1

	úloha 1				úloha 2	$\sum$
	a	b	c	d		
BE	2	1	2	2	3	**10**

A Geometrie

1. Jsou dány body $A(2|1|-4)$, $B(6|1|-12)$ a $C(0|1|0)$.

a) Dokažte, že bod C leží na přímce AB, ale neleží na úsečce AB.

b) Na úsečce AB je bod D, jehož vzdálenost od B je třikrát větší než od A. Určete souřadnice bodu D.

2. Je dána rovina $E\colon 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

a) Průsečík roviny E s osou x_1, s osou x_2 a počátek soustavy jsou vrcholy trojúhelníka. Určete obsah tohoto trojúhelníka.

b) Určete souřadnice vektoru, který je normálovým vektorem roviny E a zároveň polohovým vektorem bodu roviny E.

	úloha 1		úloha 2		$\sum$
	a	b	a	b	
BE	3	2	2	3	**10**

. . . .

Řešení úloh části A

A Analýza – řešení

1. a) Do předpisu funkce g lze dosazovat všechna $x \geq -4$. Je tedy $D_g = \langle -4, +\infty)$. Předpisem funkce g je 0 přiřazeno číslo 3, $[0, 3]$ je průsečík grafu G_g s osou y.

b) Graf G_g lze sestrojit ve čtyřech krocích, které postupně odpovídají konstrukcím grafů funkcí $w(x) = \sqrt{x}$, $w'(x) = \sqrt{4 + x}$, $w''(x) = 2 \cdot \sqrt{4 + x}$, $g(x) = 2 \cdot \sqrt{4 + x} - 1$. Graf funkce w' se z grafu funkce w získá posunutím ve směru osy x. Změnou měřítka osy y obdržíme graf funkce w''. Posunutím grafu funkce w'' ve směru osy y dostaneme graf funkce g. Obor hodnot $\langle -1, +\infty)$ funkce g lze snadno vyčíst z grafu G_g.

2. a) Nulový bod je řešením rovnice $2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$, tj. i rovnice $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$. Logaritmováním obou stran této rovnice se získá lineární rovnice $\frac{x}{2} = \ln \frac{1}{2}$. S využitím základních vlastností logaritmu lze nulový bod funkce f zapsat jako $-\ln 4$.

b) Tečna v $S[0, 1]$ má směrnici $g'(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 1$, s kladnou částí osy x proto svírá úhel $45°$. Obě souřadnicové osy jsou na sebe kolmé, třetí úhel trojúhelníku je také roven $45°$. Trojúhelník popsaný v zadání je pravoúhlý a rovnoramenný.

3. a) Existence asymptoty $x = 2$ grafu funkce f znamená, že funkce f není v tomto bodě definovaná. Je-li graf funkce f souměrný podle osy y, pak je f sudá a má aspoň dvě asymptoty, $x = 2$ a $x = -2$. Hledaná funkce je tedy sudá a není definovaná pro $x \in \{-2, 2\}$. Omezení na definiční obor vyplývá obvykle z možného dělení nulou, odmocňování záporného čísla, logaritmování nekladného čísla apod. Zadaným podmínkám vyhovuje např. funkce $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.

Ze všech obvykle vyučovaných elementárních funkcí má vedle funkcí typu $y = \frac{1}{x^n}$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, aspoň jednu asymptotu bez směrnice funkce tangens, kotangens a logaritmus. Podmínkám úlohy vyhovují i další funkce, např. $f_1(x) = \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{4} \cdot x \right|$, $f_2(x) =$

$= \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)\right|$, $f_3(x) = \frac{1}{|x|-2}$, $f_4(x) = \frac{1}{2-|x|}$, $f_5(x) = \ln\left(|x|-2\right)$, $f_6(x) = \ln\left(2-|x|\right)$, $f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-2}}$, $f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{2-|x|}}$.

b) Předpokládejme funkci $g(x)$ co možná nejjednodušší, např. lineární (nekonstantní). Přímka, která je grafem funkce $g(x)$, přímky $x = 0$, $x = 2$ a osa x vymezují rovinný útvar (pravoúhlý lichoběžník, pravoúhlý trojúhelník, sjednocení dvou pravoúhlých trojúhelníků). Leží-li celý útvar nad nebo pod osou x, nemůže být splněna podmínka uvedená v zadání. Útvar musí ležet nad i pod osou x a to tak, aby obsah části útvaru nad osou x byl stejný jako obsah části útvaru pod osou x. Tomu vyhovují všechny lineární nekonstantní funkce procházející bodem $x = 1$, např. funkce $g(x) = x - 1$.

4. a) Využijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Průměrná rychlost změny pak odpovídá podílu $\frac{n(2)-n(0)}{2-0} = \frac{392-500}{2} = -54\,\frac{1}{\mathrm{h}}$.

b) Okamžitou rychlost změny udává směrnice tečny. Hledáme t_x tak, aby platilo $n'(t_x) = -30$, tj. $3\cdot 2\cdot t_x - 60 = -30$. Zřejmě $t_x = 5$. Po pěti hodinách od začátku měření bude okamžitá rychlost změny množství pylu $-30\,\frac{1}{\mathrm{h}}$.

A Stochastika – řešení

1. a) Výraz $1-p$ je pravděpodobnost jevu, že modrá výseč není zasažena. Výraz $(1-p)^7$ představuje pravděpodobnost jevu, že modrá výseč není zasažena v sedmi za sebou jdoucích pokusech.

b) Pravděpodobnost, že v prvních dvou pokusech bude zasažena modrá výseč a v následujících osmi nikoli, je $p^2\cdot(1-p)^8$. K zasažení modré výseče dvakrát v 10 pokusech může dojít různými způsoby, je jich celkem $\binom{10}{2} = 45$, proto $45\cdot p^2\cdot(1-p)^8$ je hledaný výraz.

c) Felixův závěr není správný. Modrá nebo červená výseč může být i v následujících 100 pokusech zasažena častěji než žlutá výseč. Výsledky předchozích pokusů neovlivňují výsledky následujících pokusů.

d) Výsledkem pokusu může být zasažení výseče žluté nebo červené barvy. Ve čtyřech takových pokusech může žlutá barva padnout i-krát, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, v ostatních případech červená. Celkem je takových pokusů $\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} = 16$.

2. Předpokládejme, že je rozdělení veličiny X binomické. Pak pro pravděpodobnost, že k jevu dojde v n pokusech právě k-krát, platí $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ a pro střední hodnotu $E(X) = n \cdot p$. Ze zadání je $n = 4$, $E(X) = 2$, proto $p = \frac{1}{2}$. Z obrázku 1 lze vyčíst $P(X = 2) = \frac{7}{16}$, tj. $\binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 = \frac{7}{16}$. Pro $p = \frac{1}{2}$ je však $\binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 = \frac{3}{8}$. Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X proto není binomické.

A Geometrie – řešení

1. a) Jsou-li A, B, C kolineární, pak $C - A = k \cdot (B - A)$. Protože $B - A = (4, 0, -8)$ a $C - A = (-2, 0, 4)$, platí $k = -\frac{1}{2}$. Násobek k je záporný, vektory $B - A$, $C - A$ jsou nesouhlasně orientované, C tedy leží na polopřímce opačné k polopřímce AB, není proto bodem úsečky AB.

b) Ze zadání vyplývá $D - A = (B - A)$, a tedy $D = A + (B - A) = [3, 1, -6]$. Úkol a) i b) bylo možné vyřešit užitím parametrického vyjádření úsečky AB.

2. a) Uvažujme E v úsekovém tvaru $\frac{1}{-9}x_1 + \frac{1}{-18}x_2 + \frac{1}{9}x_3 = 1$, z něhož lze snadno získat průsečík $[-9, 0, 0]$ s osou x_1 a průsečík $[0, -18, 0]$ s osou x_2. Trojúhelník určený těmito průsečíky a počátkem má obsah $S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$.

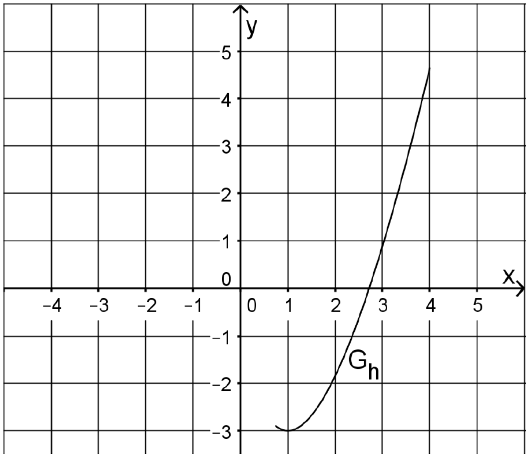
b) Jedním z normálových vektorů roviny je vektor $(2, 1, -2)$ koeficientů obecné rovnice roviny E. Odpovídající bod $[2, 1, -1]$ však není bodem roviny E. Uvažujme proto k-násobek vektoru $(2, 1, -2)$ tak, aby jeho souřadnice zároveň vyhovovaly předpisu pro rovinu E; $2 \cdot 2k + k - 2 \cdot (-2k) = -18$. Zřejmě je $k = -2$ a $(-4, -2, 4)$ je hledaný vektor.

. . . .

Zkušební část B, 180 minut

B Analýza

1. Je dána funkce $h\colon x \mapsto 3x \cdot (-1 + \ln x)$ definovaná v $\mathbb{R}^+$. Na obrázku 2 je graf G_h funkce h pro $0{,}75 \le x \le 4$.



Obr. 2

a) Určete rovnici tečny ke grafu G_h v bodě $(e \mid 0)$ a vypočtěte velikost úhlu, pod nímž tečna protíná osu x.

(Ke kontrole: $h'(x) = 3 \cdot \ln x$)

b) Vyšetřete monotonii grafu G_h. Určete limitu funkce h pro $x \to +\infty$ a zdůvodněte, že $[-3; +\infty[$ je obor hodnot funkce h.

c) Vyšetřete chování funkce h a její derivace h' pro $x \to 0$ a dokreslete do obrázku 2 graf G_h v oboru $0 < x < 0{,}75$.

Funkce $h^*\colon x \mapsto h(x)$ s definičním oborem $[1; +\infty[$ se od funkce h odlišuje pouze definičním oborem. Na rozdíl od funkce h existuje k funkci h^* funkce inverzní.

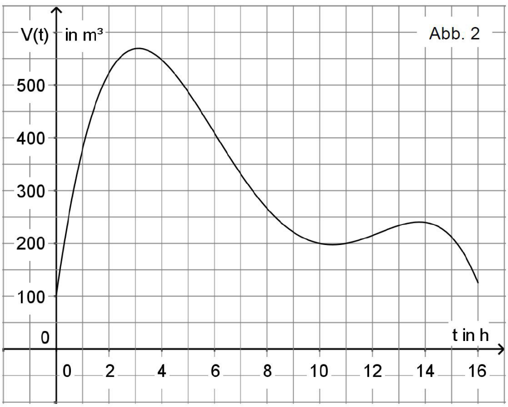
d) Určete definiční obor a obor hodnot funkce inverzní k funkci h^*. Vypočtěte souřadnice průsečíku S grafu funkce h^* s přímkou o rovnici $y = x$.

(Dílčí výsledek: x-ová souřadnice průsečíku: $e^{\frac{3}{4}}$)

e) Načrtněte do obrázku 2 graf funkce inverzní k funkci h^* s využitím dosavadních výsledků, především polohu bodu S.

f) V obrázku 2 vyšrafujte plochu, jejíž obsah A_0 odpovídá hodnotě integrálu $\int_{\mathrm{e}}^{x_S} [x - h^*(x)]\,\mathrm{d}x$, kde x_S je x-ová souřadnice bodu S. Graf funkce h^* a k ní inverzní funkce spolu s oběma souřadnicovými osami omezují v prvním kvadrantu plochu s obsahem A. Určete předpis pro výpočet A s využitím A_0.

2. Obrázek 3 ukazuje graf funkce $V : t \mapsto V(t)$ definované v $[0; 16]$. Funkce představuje model objemu vody v pánvi, který se v závislosti na čase mění přílivem a odlivem. Písmenem t je označen čas v hodinách, který uplynul od začátku pozorování, a $V(t)$ je objem v krychlových metrech.



Obr. 3

a) S pomocí obrázku 3 určete přibližně objem vody pět hodin od začátku pozorování a dobu, po kterou je objem vody aspoň $450\,\mathrm{m}^3$.

b) Z grafu funkce V určete přibližně okamžitou rychlost změny objemu vody dvě hodiny od začátku pozorování.

c) Vysvětlete, co znamená, když pro $t \in [0; 10]$ platí vztah $V(t + 6) = V(t) - 350$. S pomocí obrázku 3 rozhodněte, zda tento vztah platí pro $t = 5$ a zdůvodněte své rozhodnutí.

V jiné pánvi se objem vody v ní obsažené také mění přílivem a odlivem. Okamžitá rychlost změny objemu je pro $0 \leq t \leq 12$ modelovaná v $\mathbb{R}$ definovanou funkcí $g\colon t \mapsto 0{,}4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$. Opět je t čas v hodinách, který uplynul od začátku pozorování, a $g(t)$ je okamžitá rychlost změny objemu v $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$.

d) Zdůvodněte, proč jsou hodnoty funkce g pro $0 < t < 7{,}5$ kladné a pro $7{,}5 < t < 12$ záporné.

e) Vysvětlete význam hodnoty integrálu $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ pro $0 \leq a < b \leq 12$. Vypočtěte objem vody, která je v pánvi 7,5 hodiny po začátku pozorování, když na začátku pozorování bylo v pánvi $150\,\mathrm{m}^3$ vody. Zdůvodněte, že je to maximální množství vody v pánvi.

	úloha 1						úloha 2					$\sum$
	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	
BE	4	4	3	4	3	4	2	3	3	4	6	**40**

B Stochastika

Elektronický stabilizační program auta (ESP) může bránit smyku, a tím i nehodám.

1. V následujících úkolech předpokládejme, že 40 % všech aut je vybaveno ESP.
Náhodně je vybráno 200 aut; náhodná veličina X popisuje počet vybraných aut s ESP.

a) Určete pravděpodobnost, že mezi vybranými auty je aspoň 70 vybaveno ESP.

b) Určete pravděpodobnosti následujících jevů.
A: „Páté vybrané auto je první s ESP.“
B: „Hodnota náhodné veličiny X se od střední hodnoty liší nejvýše o směrodatnou odchylku.“

2. V parkovacím domě je celkem 100 parkovacích míst.

a) V parkovacím domě je 20 volných parkovacích míst; každý ze čtyř motoristů hledá parkovací místo. Zformulujte úlohy tak, aby jejich řešením byly následující výrazy.
$\boldsymbol{\alpha}$) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ $\qquad$ $\boldsymbol{\beta}$) $\binom{20}{4}$

Parkovací dům je nyní obsazen 100 auty, z nichž 40 je vybaveno ESP.

b) Sedm z těchto 100 aut jsou auta nižší třídy, která nejsou vybavena ESP, 90 aut není z kategorie „nižší třída“. Uvažují se následující jevy:

E: „Auto náhodně vybrané v parkovacím domě je vybaveno ESP.“

K: „Auto náhodně vybrané v parkovacím domě je auto nižší třídy.“

Určete význam $P_K(E)$ a určete tuto pravděpodobnost.

c) Z aut stojících v parkovacím domě se náhodně vybere 30 aut. Určete pravděpodobnost toho, že je mezi nimi právě 40 % vybaveno ESP.

	úloha 1		úloha 2			$\sum$
	a	b	a	b	c	
BE	3	7	3	3	4	**20**

B Geometrie

V pravoúhlé soustavě souřadnic jsou dány body $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ a $D(-6|2|5)$. Leží v jedné rovině E a tvoří čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v bodě M.

a) Ukažte, že přímka AB je rovnoběžná s rovinou x_1x_2.

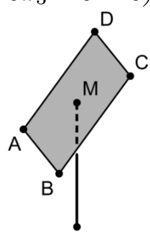
b) Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je pravoúhelník. Určete souřadnice bodu M.

(Dílčí výsledek: $M(-2|4|3)$)

c) Určete obecnou rovnici roviny E.

(možný výsledek: $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)

Solární panel je připevněn ke kovové trubce, která je kolmá na horizontální rovinu. Modelem solárního panelu je obdélník $ABCD$. Kovovou trubku lze popsat úsečkou, jejíž krajní bod M představuje místo, kde je upevněn solární panel (viz obrázek 4). Horizontální rovinu představuje v modelu rovina x_1x_2; jedna délková jednotka v modelu odpovídá 0,8 m ve skutečnosti.



Obr. 4

d) Aby se dosáhlo co největšího využití energie, musí být úhel sklonu φ solárního panelu od horizontální roviny mezi $30°$ a $36°$. Ověřte, zda je tato podmínka splněna.

e) Na solární panel dopadají sluneční paprsky, které jsou v modelu znázorněny rovnoběžnými přímkami, které jsou kolmé na rovinu E. Solární panel vytváří na horizontální rovině stín ve tvaru obdélníku.
Pomocí vhodně popsaného obrázku ukažte, že lze obsah stínu vypočítat pomocí výrazu $|\overrightarrow{AB}| \cdot \frac{|\overrightarrow{AD}|}{\cos\varphi} \cdot (0{,}8\,\mathrm{m})^2$.

f) Pro co možná nejefektivnější využití energie ze slunečního světla v průběhu dne se může kovová trubka se solárním panelem otáčet kolem podélné osy trubky. Velikost sklonu φ k horizontální rovině přitom zůstává stejná. Uvažuje se rohový bod panelu, který je v modelu označen bodem A. S přesností na centimetry vypočtěte poloměr kružnice, po které se tento rohový bod otáčením kovové trubky pohybuje.

	úloha						$\sum$
	a	b	c	d	e	f	
BE	1	4	3	3	5	4	**20**

. . . .

Řešení úloh části B

B Analýza – řešení

1. a) Pro splnění obou částí úkolu hledejme $h'(\mathrm{e})$, tj. směrnici tečny. Platí $h'(x) = 3(\ln x - 1) + 3x \cdot \frac{1}{x} = 3 \cdot \ln x$, a tedy $h'(\mathrm{e}) = 3$. Tečna má v bodě $[\mathrm{e}, 0]$ rovnici $y = 3 \cdot (x - \mathrm{e})$ a svírá s kladnou částí úhel $\varphi = \operatorname{arctg} 3 \approx 71°34'$.

b) První derivace funkce h je kladná pro $x > 1$ a záporná pro $0 <$ $< x < 1$, proto je funkce h rostoucí v intervalu $(1, +\infty)$ a klesající v $(0, 1)$. Pro $x = 1$ má funkce h ostré lokální minimum $h(1) = -3$, neboť $h'(1) = 0$ a h je v bodě $x = 1$ spojitá.

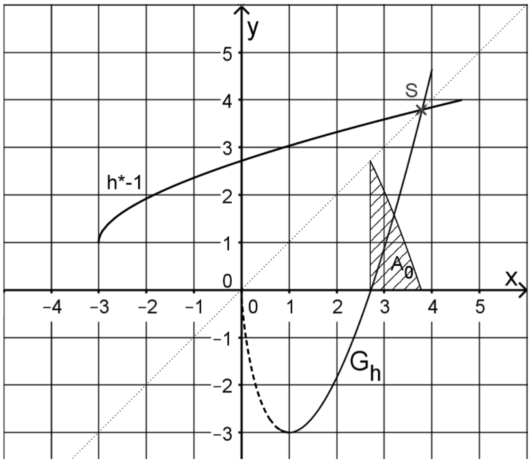
Pro neomezeně rostoucí hodnoty x rovněž hodnoty funkce h rostou neomezeně, tj. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x(\ln x - 1) = +\infty$.

Funkce h je v definičním oboru spojitá, nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -3, +\infty)$, který je oborem hodnot funkce h.

c) S využitím znalosti průběhu funkce $y = \ln x$ je $\lim_{x\to 0^+} h'(x) = -\infty$. Chování funkce h blízko 0 zjistíme pomocí limity, k jejímuž výpočtu užijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{\frac{1}{3x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-3x) = 0$$

Náčrtek G_h viz přerušovaná čára v obrázku 5.



Obr. 5

d) Označme h^{*-1} funkci inverzní k h^*, pak je $D_{h^{*-1}} = H_{h^*} = H_h = \langle -3, +\infty)$, $H_{h^{*-1}} = D_{h^*} = \langle 1, +\infty)$. Souřadnice průsečíku S se získají řešením soustavy rovnic $y = x$, $y = 3x\cdot(-1+\ln x)$. V souladu s dílčím výsledkem je $S = \left[\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}; \mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\right]$.

e) Viz obrázek 5.

f) Plocha odpovídající danému integrálu je omezena přímkami $x = \mathrm{e}$, $y = x$ a křivkou, která je grafem funkce $h^*(x)$. Plocha s obsahem A_0 je vyznačena na obrázku 5.

Útvar U s hledaným obsahem A je souměrný podle osy prvního a třetího kvadrantu, protože stejnou vlastnost mají grafy navzájem inverzních funkcí h^* a h^{*-1}, které útvar omezují. Polovinu útvaru U lze sestavit z útvaru s obsahem A_0 a pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s odvěsnou délky e a obsahem $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^2$. Celý útvar U má dvojnásobný obsah, tj. $A = 2 \cdot A_0 + \mathrm{e}^2$.

2. a) Objem vody v pánvi je po 5 hodinách od začátku pozorování přibližně roven $480\,\mathrm{m}^3$. Na ose t lze vyčíst, že objemu $450\,\mathrm{m}^3$ bylo dosaženo asi 1,5 hodiny po začátku pozorování. Asi po 5,5 hodinách objem vody klesl pod sledovanou hodnotu. Aspoň $450\,\mathrm{m}^3$ vody bylo v pánvi po dobu přibližně čtyř hodin.

b) Okamžitou rychlost změny objemu vody dvě hodiny od začátku pozorování lze z grafu zjistit pomocí směrnice tečny v bodě s první souřadnicí $t = 2$. Pokud by se do obrázku 3 načrtla tečna, byla by její směrnice přibližně 2 v délkových jednotkách určených rozměrem čtvercové sítě. To však odpovídá nárůstu zhruba $100\,\mathrm{m}^3$ za 1 hodinu.

c) Vztah $V(t + 6) = V(t) - 350$ znamená, že šest hodin od pozorování v čase t, je v pánvi o $350\,\mathrm{m}^3$ vody méně než v čase t.

Pro $t = 5$ vztah neplatí, neboť $V(5) - V(11) \approx 480 - 200 \neq 350$.

d) Funkce g je spojitá. Body 0, 7,5, 12, jimiž jsou určeny zadané intervaly, jsou nulovými body funkce g. Platí proto $g\colon t \mapsto 0{,}4 \cdot t \cdot \cdot (t - 12) \cdot (2t - 15)$. Součin činitelů je kladný pro $t \in (0, 7{,}5)$ nebo $t > 12$, záporný pro $t \in (7{,}5, 12)$ nebo $t < 0$. Záporná t a $t > 12$ však nejsou v definičním oboru funkce g.

e) Integrál udává, jak se během časového úseku od a hodin do b hodin změnil objem vody v pánvi oproti objemu zjištěnému v čase a.

Pro výpočet objemu vody v pánvi po 7,5 hodinách od začátku pozorování využijeme předchozího poznatku.

$$V(7,5) = 150 + \int_0^{7,5} g(t)\ \mathrm{d}t = 150 + \left[0{,}2t^4 - 5{,}2t^3 + 36t^2\right]_0^{7,5} \approx$$
$$\approx 614\,\mathrm{m}^3.$$

Pro $t \in (0, 7, 5)$ jsou hodnoty funkce g kladné, voda v pánvi přibývá, v okamžiku $t = 7{,}5$ voda přestane přibývat a následně začne ubývat, proto je pro $t = 7{,}5$ v pánvi nejvíce vody. Přesněji, objem vody v pánvi v čase t lze určit pomocí primitivní funkce $G(t)$ k funkci $g(t)$,

$$V(t) = 150 + \int_0^t g(t)\ \mathrm{d}t = 150 + G(t) - G(0).$$

Funkce $G(t)$ je spojitá, v intervalu $(0, 7{,}5)$ je rostoucí a v $(7{,}5, 12)$ klesající, pro $t = 7{,}5$ tedy nabývá svého maxima. Maximální hodnoty nabývá i $V(t)$, neboť se od $G(t)$ liší pouze o konstantu $150 - G(0)$.

B Stochastika – řešení

1. a) Náhodně vybrané auto buď má ESP (s pravděpodobností $p = 0{,}4$), nebo není vybaveno ESP (s pravděpodobností $1 - 0{,}4 = 0{,}6$). Náhodná veličina X má binomické rozdělení. Pravděpodobnost popsaného jevu J je vhodnější určit pomocí pravděpodobnosti opačného jevu J': „Mezi 200 vybranými auty je nejvýše 69 aut s ESP.“. Pravděpodobnost, že mezi 200 auty je právě k aut vybaveno ESP, je rovna $\binom{200}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{200-k}$, $p = 0{,}4$. Součet $\sum_{k=0}^{69} \binom{200}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{200-k}$ představuje pravděpodobnost jevu J'. Pro jev J platí $P(J) = 1 - P(J') = 1 - \sum_{k=0}^{69} \binom{200}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{200-k} \approx 1 - 0{,}064 = 0{,}936$.

b) Pokud se poprvé objeví auto s ESP až při pátém výběru, musí být první čtyři vybraná auta bez ESP, a tedy $P(A) = (1 - 0{,}4)^4 \cdot 0{,}4 \approx 0{,}052$.

Náhodná veličina s binomickým rozdělením má střední hodnotu $E(X) = n \cdot p$ a směrodatnou odchylku $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Pro zadané hodnoty $n = 200$ a $p = 0{,}4$ je $E(X) = 80$, $\sigma = \sqrt{48}$. Náhodná veličina X se bude od střední hodnoty lišit nejvýše o směrodatnou odchylku, bude-li nabývat hodnot od 74 do 86 včetně. Odtud je $P(B) = \sum_{k=74}^{86} \binom{200}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{200-k} \approx 0{,}652$.

2. a) Na parkoviště postupně přijíždějí motoristé A, B, C, D. Kolika způsoby mohou obsadit 20 volných míst?

α) Uvažujte případ, kdy záleží na tom, kdo kde zaparkuje.

Řidič A si může vybrat místo k stání dvaceti způsoby, B má již jedno místo obsazeno a vybírá si z devatenácti volných míst, C vybírá z 18 a D ze 17 míst. Počet všech způsobů, jimiž si lze vybrat čtyři místa z dvaceti a záleží na tom, kdo si které vybere, je dán součinem $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$.

β) Nezáleží na tom, kdo na konkrétním místě zaparkuje, rozhodující je obsazenost parkovacího místa.

Řešením je počet všech čtyřprvkových podmnožin množiny s 20 prvky, tj. $\binom{20}{4}$.

b) Čtyřicet aut ze 100 je s ESP, proto $P(E) = 0{,}4$. V parkovacím domě je $100 - 90 = 10$ aut nižší třídy, tudíž $P(K) = 0{,}1$. $P_K(E)$ je pravděpodobnost jevu E za podmínky, že již nastal jev K, tj. pravděpodobnost, že vybrané auto je s ESP za podmínky, že je nižší třídy. Ze zadání vyplývá, že v parkovacím domě jsou $10 - 7 = 3$ auta nižší třídy vybavená ESP. Odtud je $P_K(E) = 3/10 = 0{,}3$.

c) Jev nastane, bude-li právě 12 z 30 vybraných aut vybaveno ESP. Situace připomíná klasickou úlohu o losování barevných koulí z urny bez vracení. Pravděpodobnost jevu vypočteme následovně:

$$\frac{\binom{40}{12}\binom{60}{18}}{\binom{100}{30}} \approx 0{,}176.$$

B Geometrie – řešení

a) Body A, B mají stejnou třetí souřadnici, leží tedy ve stejném poloprostoru určeném rovinou x_1x_2 a jsou od ní stejně vzdáleny, proto přímka jimi určená je s rovinou x_1x_2 rovnoběžná. Vzájemnou polohu lze ověřit výpočtem: $(2, 6, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$, kde $(2, 6, 0)$ je směrový vektor přímky AB a $(0; 0; 1)$ je normálový vektor roviny x_1x_2.

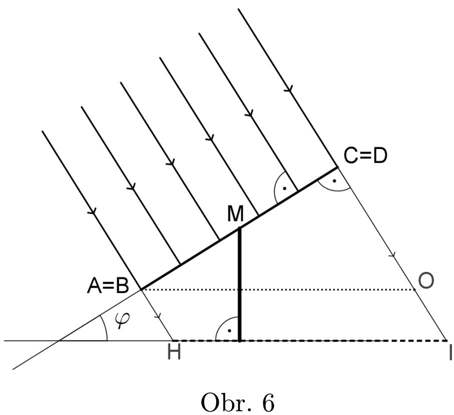
b) Čtyřúhelník se shodnými protějšími stranami a kolmými sousedními stranami je pravoúhelníkem. Způsob ověření shodnosti a kolmosti příslušných stran je zřejmý, proto postupujme jinak. Využijeme vlastnost úhlopříček; rovnoběžník se shodnými úhlopříčkami je pravoúhelník. Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, protože jeho úhlopříčky mají společný střed, $\frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(B+D) = [-2, 4, 3]$. Tím jsou zároveň určeny souřadnice bodu M. Vektory $C - A = (-4, 8, 4)$, $D - B = (-8, -4, 4)$ jsou směrové vektory úhlopříček. Mají stejnou velikost, úhlopříčky jsou proto shodné a $ABCD$ je pravoúhelník.

c) Normálový vektor roviny E určíme jako vektorový součin jejích dvou směrových vektorů $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 8 \cdot (3, -1, 5)$. Označme $X = [x_1, x_2, x_3]$ libovolný bod roviny E, $\overrightarrow{AX}$ je také směrový vektor roviny E, proto je kolmý na normálový vektor. Z podmínky $\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0$ získáme obecnou rovnici roviny $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$.

d) Úhel sklonu solárního panelu s horizontální rovinou určíme jako odchylku (vhodného násobku) normálového vektoru roviny E, $(3, -1, 5)$, a normálového vektoru $(0, 0, 1)$ roviny x_1x_2:

$$\cos\varphi = \frac{(3, -1, 5) \cdot (0, 0, 1)}{|(3, -1, 5)| \cdot |(0, 0, 1)|} = \frac{5}{\sqrt{35}}, \varphi \approx 32°19'$$

Sklon solárního panelu je větší než 30° a menší než 36°, vyhovuje proto předepsané podmínce.



Obr. 6

e) Z popisu situace vyplývá, že obdélník reprezentující stín má stejnou šířku $|\overrightarrow{AB}|$ jako solární panel a jeho délku $|HI| = |AO|$, viz obrázek 6, lze dopočítat z délky solárního panelu $|\overrightarrow{AD}|$ a sklonu φ panelu k horizontální rovině. Z pravoúhlého trojúhelníku AOD plyne $\cos\varphi = |\overrightarrow{AD}| : |AO|$, a tedy $|HI| = |AO| = |\overrightarrow{AD}| : \cos\varphi$. Obsah stínu je $|\overrightarrow{AB}| \cdot |HI| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| : \cos\varphi$ čtverečných jednotek v modelu, a tedy $|\overrightarrow{AB}| \cdot \frac{|\overrightarrow{AD}|}{\cos\varphi} \cdot 0{,}8^2\,\mathrm{m}^2$ ve skutečnosti.

f) Střed S kružnice, po níž se bod A pohybuje, leží ve stejné rovině jako body A, B, proto je jeho třetí souřadnice rovna 1. Bod S leží na kolmici bodem M k rovině x_1x_2, má proto stejnou první a druhou souřadnici jako bod M, tj. $S = [-2, 4, 1]$. Poloměr kružnice v modelu odpovídá velikosti vektoru $\overrightarrow{AS}$, $r = |\overrightarrow{AS}| = |(-2, 4, 0)| = 2\sqrt{5}$. Ve skutečnosti je poloměr roven $2\sqrt{5} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} \approx 358\,\mathrm{cm}$.

Pokračování v dalším čísle.

Literatura

[0] Kašparová, M. & Honzík, L. & Hora, J. & Pěchoučková, Š.: O vzdělávacím systému, maturitě a studiu učitelství matematiky v Bavorsku. *Učitel matematiky.* 2018.

[1] Mathematik. Abiturprüfung 2017. Prüfungsteil A [online]. [Cit. 4. 5. 2017]. Dostupné z: `https://www.isb.bayern.de/download/19427/abiturpruefung_mathematik_2017_pruefungsteil_a.pdf`

[2] Mathematik. Abiturprüfung 2017. Prüfungsteil B [online]. [Cit. 4. 5. 2017]. Dostupné z: `https://www.isb.bayern.de/download/19428/abiturpruefung_mathematik_2017_pruefungsteil_b.pdf`

[3] Mathematik. Abiturprüfung 2017. Prüfungsteil B (CAS) [online]. [Cit. 4. 5. 2017]. Dostupné z: `https://www.isb.bayern.de/download/19430/abiturpruefung_mathematik_cas_2017_pruefungsteil_b.pdf`

[4] Barth, F. & Bergold, H. & Haller, R. (2002). *Tabellen zur Stochastik.* München: Oldenbourg Schulbuchverlag. 4. vyd. 2002. ISBN 978-3-637-03431-0

[5] Naturwissenschaftliche Formelsammlung für bayerischen Gymnasien. 2. Fassung. Duden Schulbuchverlag, Berlin. 1. vyd. 2013. ISBN 978-3-8355-3209-0

[6] Merkhilfe. Mathematik am Gymnasium [online]. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, München. [Cit. 4. 5. 2017]. Dostupné z: https://www.isb.bayern.de/download/13107/merkhilfe_fuer_das_fach_mathematik_standard.pdf

[7] Hilfsmittel bei Leistungsnachweisen an bayerischen Gymnasien, Abendgymnasien und Kollegs Bekanntmachung des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus vom 7. Juni 2011 Az.: VI.9-5 S 5500-6b.41 619. Dostupné z: https://www.verkuendung-bayern.de/files/kwmbl/2011/13/kwmbl-2011-13.pdf#page=5

[8] Regelungen zur Verwendung von Taschenrechnern bei Leistungsnachweisen. Dostupné z: https://www.isb.bayern.de/download/11892/hilfsmittel_bei_leistungsnachweisen_regelungen_hinsichtlich_funktionalitaet_des_taschenrechners.pdf

[9] Regelungen zur Verwendung von Taschenrechnern als Hilfsmittel bei Leistungsnachweisen an bayerischen Gymnasien, Abendgymnasien und Kollegs. Anlage zum KMS Az.: VI.7 - 5 S 5500 - 6b.80372 vom 11. November 2011. Dostupné z: https://www.isb.bayern.de/download/11880/regelungen_zur_verwendung_von_taschenrechnern_als_hilfsmittel_bei_leistungsnachweisen.pdf

[10] Hilfsmittel bei Leistungsnachweisen. Regelungen zu Computeralgebrasystemen. Hinweise zum Ausgangszustand der CAS-Rechner [online]. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, München. [Cit. 30. 4. 2017]. Dostupné z: https://www.isb.bayern.de/download/16283/hinweise_zum_ausgangszustand_der_cas_rechner.pdf

[11] Computereinsatz im Mathematikunterricht. CAS-Rechner und GeoGebra [online]. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, München. [Cit. 5. 6. 2017].

Dostupné z: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/faecher/mathematik-informatik/mathematik/weitere-informationen/computereinsatz_im_mathematikunterricht/

[12] Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Jahrgangsstufen 11 und 12 [online]. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, München. 2017. [Cit. 5. 6. 2017]. Dostupné z: https://www.isb.bayern.de/download/19507/isb_handreichung_cas_m_gym_internet.pdf

Abstract

The article deals with the mathematical problems of Bavarian matura given in May 2017. The problems of analysis, stochastic and geometry are discussed for both of its parts A, B or B-CAS.

Lukáš Honzík
e-mail: honzikl@kmt.zcu.cz
Jaroslav Hora
e-mail: horajar@kmt.zcu.cz
KMT-M FPE ZČU
Klatovská tř. 51
306 14 Plzeň

Martina Kašparová
e-mail: mernesto@kmt.zcu.cz
Šárka Pěchoučková
e-mail: pechouck@kmt.zcu.cz