Alena Šarounová

O geometrickém koření 1

Učitel matematiky, Vol. 28 (2020), No. 1, 38–50

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148628`

O GEOMETRICKÉM KOŘENÍ 1

Alena Šarounová, Jana Hromadová

Mnoho žáků považuje geometrii za celkem zbytečnou teorii. Nabízíme několik námětů úloh, které mají své kořeny v minulosti a mohly by ukázat prospěšnost geometrie v praxi a povzbudit zájem o její využití v našem světě.

Malé děti jsou velmi zvídavé a rády nás obtěžují nekonečným vyptáváním: Co to je? Jak se tomu říká? Nač to je? Co se s tím dělá? Proč se to s tím dělá? Nám dospělým se to může zdát velmi úmorné, protože zpravidla máme hlavu plnou jiných starostí a dětská touha po poznávání nás často ruší. Ve skutečnosti bychom měli mít radost, že máme tak čiperná dítka, protože zvídavost je jednou z podmínek úspěšného vzdělávání. Vždyť i my dospělí se lépe učíme poznatkům spadajícím do okruhu našich zájmů než věcem, které nás moc nezajímají. Když děti zaujme nějaký předmět, hned se po něm natahují. Chtějí si ho prohlédnout ze všech stran. Zkoušejí, co vše by se s ním dalo dělat. (Nejlépe v dětském věku poznáváme hračku tím, že ji ocucáme, okoušeme, vyzkoušíme její pevnost a hlučnost, užijeme při hře a rozebereme…) Je škoda, že nás později tak úporná zvídavost přejde a spokojíme se často jen s povrchním poznáním věcí a vztahů, které nás obklopují.

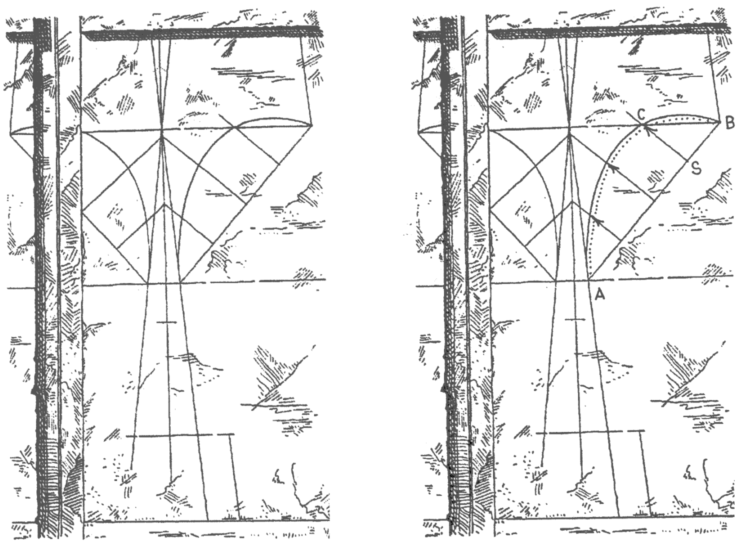
Takovýto ideální „dětský“ přístup se ovšem nedá využívat při výuce v každé hodině. Mnohé z uvedených dětských výzkumných činností nahrazujeme například v geometrii postupně ukázkami hmotných modelů (to v lepším případě), obrázky, slovním popisem atd. Je to rychlejší, jednodušší, ale také mnohem povrchnější poznání. O hloubce znalostí našich žáků vypovídají nejvíce situace vybočující z úloh běžných učebnic. Kdyby si děti pod vedením moudrého učitele na prvním stupni hrály třeba s vystřiženými trojúhelníky (tedy nikoli zobrazenými na obrazovce či na papíru), nepovažovaly by mnohé z nich na druhém stupni za body trojúhelníku pouze onu lomenou čáru, která je jejich hranicí, ale i jeho vnitřní body. (S touto nám těžce představitelnou chybou se setkali naši kolegové z MFF při právě probíhajícím výzkumu. Jen o málo víc než 50 % žáků 6. tříd ZŠ a jejich vrstevníků na gymnáziích v úlohách projevilo správné chápání pojmu „trojúhelník“. Pro mnohé je jím jen ta hranice (Robová et al., 2019).) A pokud by tyto herní trojúhelníky byly z papíru, jehož líc a rub mají různé barvy, je snadné později poukázat na shodnosti přímé a nepřímé, na souměrnosti, skládání (či dělení) trojúhelníků atd., mnohem dříve, než tyto představy zformalizujeme a vtiskneme na papír. Na prvním stupni lze mnohé z podobných činností využít v rámci výtvarné výchovy (dlaždičky, ornamenty atp.). Konec konců i potíže s goniometrickými funkcemi jsou dokladem toho, že žáci nemají z praktické činnosti zažité shodnosti, natož tak užitečnou stejnolehlost.

Jednou z možností zvýšení zájmu o matematiku je zadávání úloh, které vedou k vyhledávání různých aplikací geometrie v okolním světě. Přidá-li se k „holé geometrické úloze“ zajímavá legenda, může pak takový úkol žáky zaujmout zejména tam, kde musí rozvinout i trochu fantazie a vlastní „nematematické“ práce. Bohatým zdrojem takových námětů je architektura a zeměměřictví. Okořeníme-li úlohu ještě pohledem do vzdálené minulosti, její atraktivita se zvýší. Pokusíme se vám několik takových úloh nabídnout. Protože víme, že se pouštíme do vod, které jsou poněkud vzdálené učebnicím, chceme psát tak, aby tomu mohli případně rozumět i žáci, kdyby se k textu dostali. Obtížnost úloh je závislá na tom, kdy a jak je studentům nabídnete a co od nich budete vyžadovat. Samy bychom se přimlouvaly pro veřejnou prezentaci. Už delší dobu pozorujeme, že schopnost slušně a srozumitelně se vyjádřit k určitému tématu se stává nedostatkovým zbožím. Měli bychom na vyjadřování (nejen našich žáčků) více dbát. Vždyť myšlenky se nejlépe „uklidí a uloží do paměti“ až tehdy, kdy je ozvučíme. Každý z uvedených námětů se dá rozdělit na několik úloh různé obtížnosti a pro různé situace. Tvořivost je už na vás! Přejeme vám hodně zdaru!

Od kružnice k elipse

Kružnice a kruh byly jistě mezi prvními geometrickými tvary, jichž si naši prapředkové všimli a začali je vědomě využívat. Kolo jako sluneční symbol v Indii či „vůz – technický vynález" starého světa, kruhové rondely, kružnice na rytinách a obrazech v egyptských hrobkách... Právě stará egyptská architektura nám nabídla „kamenné důkazy" o velkých znalostech geometrie tisíce let před počátkem našeho letopočtu. Podívejme se na některé z nich a zamysleme se nad tím, jak jich lze využít ve výuce.

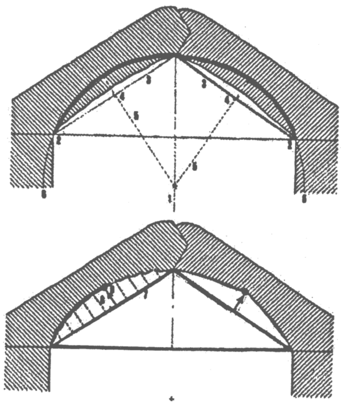
Na prvním, relativně „mladém" obrázku (je mu něco přes 2 200 let) je technický nákres části tzv. pylonu z Edfu. F. Kadeřávek o něm ve své krásné (a pro inspiraci velmi užitečné) knize Geometrie a umění v dobách minulých napsal (Kadeřávek, 1935: s. 9): „Na kamenných střechách chrámu je zachována řada rysů, bohužel velmi poškozených. Nejméně porušen jest nákres skoro dva a půl metru dlouhý, v němž je stanoven řez římsy pylonu, tj. vstupní věže chrámové." (obr. 1 – vlevo)



Obr. 1: Pylon z Edfu – konstrukce oblouku AB

Jde o plánek konstrukce oblouku vytesaného do kamene. Z hlediska geometrie je oblouk AB (na obrázku 1 vpravo, zvýrazněn tečkovanou čarou) složený z oblouků kružnic s různými poloměry. Úsečka SC je kolmá k úsečce AB. Realizace vlastního stavebního kamene je však značně náročná. Postup práce kameníků je zde lehce naznačen úsečkou SC a dalšími kolmicemi k úsečce AB. Pomohou odměřovat, kolik kamene je ještě nutno z bloku odtesat k plánovanému povrchu římsy. Není to však metoda objevená až v helénistické době. Jeho využití je doloženo již ve stavbách starých 4 000 let. (Zkuste zjistit pravděpodobné středy kružnic použitých ke konstrukci oblouku. Vzhledem k tomu, že jde o konstrukci skutečně „tesanou“, velkou náročnost na přesnost klást nemůžeme.)

V pyramidě Amenhemhata III. v Dašhúru je pohřební komora zastropena dvěma vzájemně vzepřenými deskami, jejichž podhled byl upraven odsekáváním kamene do tvaru části valené klenby, tj. části pláště rotačního válce (obr. 2).



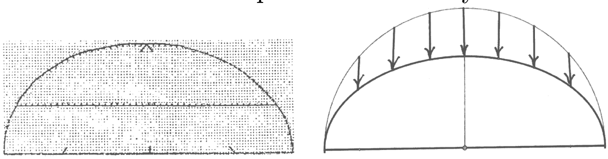
Obr. 2: Zaklenutí komory – odměřování hloubky tesání

Strop komory je tvořen dvěma velkými kameny zaklesnutými do sebe. Obrázek znázorňuje řez situace. Stavitel chce vytvořit část kruhového oblouku. Na horním obrázku je vyznačena plánovaná křivka, nerovný povrch kamenů a rovnoramenný trojúhelník, jehož základna vyznačuje šířku komory a výška vzestup oblouku.

Tyto rozměry stanoví stavitel odměřením „hrubé stavby“ v komoře a nechá vytesat požadovaný tvar (profil klenby) ve skutečné velikosti do rovné plochy poblíž staveniště. K trojúhelníku v obrazu doplní zbývající čáry: polokružnici, kolmice z jejího středu k ramenům trojúhelníku a rovnoběžky s nimi. Dole na obrázku 2 je výsledný obraz určený kameníkům. Odměřují zde, jak hluboko mají kámen odtesat ve směru krátkých úseček. Posouváním trojúhelníkového ramenátu (laťové posuvné „bednění“) kameníci mohli kontrolovat odměřené hodnoty přímo v hrobce při práci. (Možná je náš popis zbytečně podrobný, ale ne všichni čtenáři jsou „geometři“ – a ostatní nám snad prominou.)

Popsaná metoda – práce podle plánů narýsovaných či vytesaných ve skutečné velikosti – byla doložena ve stavebnictví od doby pyramid po stavbu katedrál. V některých z nich jsou dodnes zachovány zbytky plánů vyrytých do kamene nebo stěn potažených omítkou (většinou v místech, kam běžní návštěvníci nepřijdou) či detaily složitějších kamenných prvků pro jejich případné opravy nebo náhrady v budoucích staletích.

Během stavebních prací byly realizovány i různé geometrické tvary bez jejich předchozího plánování. Dalo by se říci, že se objevily samy sebou. (I „reálný“ zborcený čtyřúhelník[1] byl na světě dávno před teorií kuželoseček – stačí trochu prohnilý díl plotu z latí či rákosí na břehu Nilu.) V hrobce Ramesse VI. (kolem 1100 let př. n. l.) našli archeologové na vybílené stěně před jejím vstupem přesně vytesanou polovinu elipsy s vyznačením části oblouku užitého zde v téže velikosti pro klenbu komory.



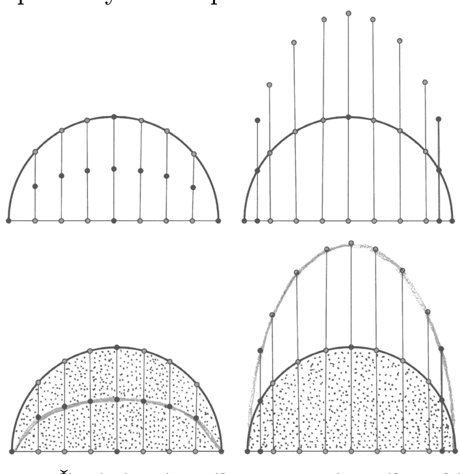
Obr. 3: Tesaná elipsa, hrobka Ramesse VI.

Obraz zřejmě sloužil k odměřování podobně jako v předchozích případech. Jak však byla tak přesně sestrojena ona elipsa? Pokud víme, že výchozí křivkou bývala kružnice, můžeme elipsu sestrojit

[1]Čtyřúhelník, jehož vrcholy neleží v téže rovině.

její pomocí. Potřebnou kružnici nebylo třeba tesat, stačilo její vyznačení barvou, nebude jí později zapotřebí. Pro kameníky se musí zachovat pouze to, co nám nabízí rytina. Vše, co pravděpodobně smyl čas, vidíme přikreslené na pravé straně obrázku 3.

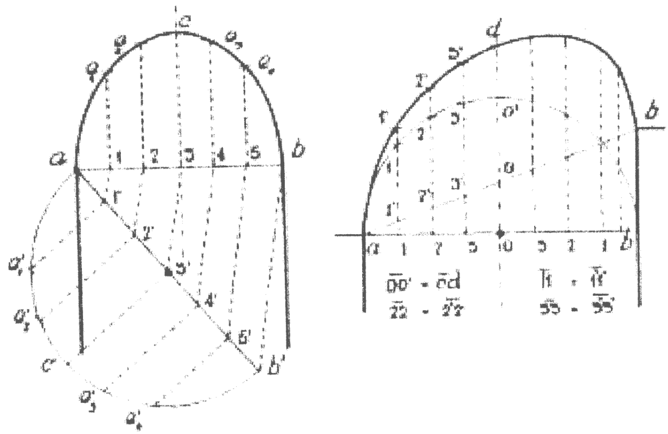
Tato starověká metoda konstrukce elipsy je velmi užitečná a nabízí různá použití. Protože je čistě „grafická“, nemusí autor takového obrázku o dalších vlastnostech elipsy, které nejsou na první pohled „vidět“, mít ani tušení. Na obrázku 4 jsou zakresleny dvě polokružnice a jejich pomocí načrtnuty dvě „poloelipsy“ (stavitel by řekl „dva eliptické oblouky“). Body levého oblouku získáme půlením svislých úseček, body pravého oblouku zdvojnásobováním jejich délky. Na obrázku 4 nahoře byly body hledané elipsy zakresleny v GeoGebře (pokyny: střed úsečky, středově souměrný bod k danému bodu), ale jejich konstrukce je rychlá i klasickým postupem. Získanými body můžeme načrtnout (zde na obrázku 4 dole) tužkou přibližný tvar eliptického oblouku.



Obr. 4: Črtání sníženého a převýšeného oblouku pomocí polokružnic

Z obrázku 4 (dole) je patrné, že čára sníženého oblouku dělí vytečkovanou polovinu kruhu na dvě části stejného obsahu – tedy na dvě čtvrtiny obsahu celého kruhu. Obsah obrazce vpravo je roven obsahu tohoto kruhu. (Víte proč?)

Na obrázku 5 jsou přetištěny dva obměněné postupy tvorby eliptických oblouků. Jde o ukázku z ilustrací starých knih pro stavitele. (Tomu bohužel odpovídá i kvalita zobrazení, ale nechtěly jsme do originálu nijak zasahovat. Povšimněte si také, že obrazy bodů jsou zde popsány malými písmeny.) Na obrázku 5 vlevo vidíme polovinu elipsy nad úsečkou AB, která je spojnicí jejích vedlejších vrcholů. Výška tohoto oblouku – úsečka $3C$ – je rovna poloměru pomocné kružnice. Jde o eliptický oblouk v obvyklé poloze. Sousední obrázek naznačuje postup konstrukce tzv. kobylí hlavy, kterou můžeme vídat jako podporu pod schodištěm. I zde je zobrazena polovina elipsy nad úsečkou AB. Tentokrát je však elipsa pootočena podle svého středu O tak, aby její hlavní osa lehce sledovala směr stoupání schodiště (zde tedy vpravo).



Obr. 5: Návody konstrukcí eliptických oblouků

Není divu, že ve starých knihách i ručně psaných sešitech, do kterých ukládali své geometrické poznatky řemeslníci (např. mlynáři) pro své syny a vnuky, aby uměli opravit či vyrobit vše, co k jejich řemeslu patří, najdeme řadu velmi zajímavých „technických náčrtků i výkresů“, množství obrazů a schémat. Už tradičně se stavitelské umění předávalo (a ještě předává – samozřejmě nyní spolu s řadou technických studií a propočtů) dalším generacím, zejména vhodnými zobrazeními stavebních prvků i celků.

Literatura

[1] Kadeřávek, F. (1935). *Geometrie a umění v dobách minulých.* Praha: Jan Štenc.

[2] Robová, J., Moravcová, V., Halas, Z. & Hromadová, J. (2019). Žákovské koncepty trojúhelníku na začátku druhého stupně vzdělávání. *Scientia in educatione*, 10(1), 1–22.

Abstract

Many students regard geometry as a relatively unnecessary theory. We offer several themes that have their roots in the past and could show the utility of geometry in practice and encourage interest in its use in our world. Some of the first geometric shapes that our ancestors noticed and started consciously using them, are the circles. From them you can easily get to other interesting curves, such as the ellipse.

Alena Šarounová *Jana Hromadová*
sarounov@karlin.mff.cuni.cz *Jana.Hromadova@mff.cuni.cz*
KDM MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

Příloha

V článku jsme představily několik námětů, které mohou být motivací ke studiu geometrie, či mohou poukázat na praktické využití našeho školního snažení. Náměty z článku je možné rozvinout minimálně dvěma směry, pro žáky základních škol je možné se vydat cestou objevování vlastností kružnice, kruhu a křivek složených z částí kružnic a dospět až k řešení úlohy z obrázku 1 (Pylon z Edfu), pro starší žáky by jistě bylo zajímavé zkoumat vztah mezi kružnicí a elipsou znázorněný na obrázcích 3 až 5.

Přikládáme ukázku úloh o kružnicích, z nichž si učitel může podle věku a úrovně vědomostí žáků vybrat. Slovní zadání úloh v této formě slouží spíše učiteli, který může v průběhu řešení doplňovat další otázky. Ke každé úloze přikládáme grafické zadání včetně předpokládaného řešení.

Několik úloh o kružnicích a kruzích

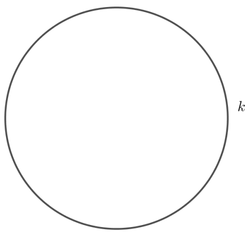
Nejlépe si pamatujeme to, co sami vytváříme. Nechme tedy „vytvářet“ (črtat, modelovat, rýsovat) i své žáčky. Přikládáme jako připomínku, co by si žáci ve vhodných chvílích měli vyzkoušet, několik takových úloh různé obtížnosti.

Je dobré začínat s hmotnými modely

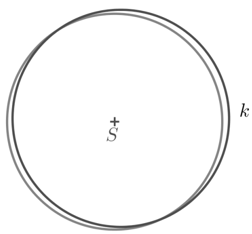
Papírové modely – vystřižené kruhy (průměr 10 cm): Pojmenuj geometrické tvary! Přesvědč se o tom, že jsou shodné! V jednom kruhu odhadni polohu středu a vyznač ji! Jak lze bez pomůcek nalézt přesnou polohu středu kruhu? Změř průměr kruhu! Vymodeluj dvojici navzájem kolmých průměrů kruhu! Vymodeluj čtverec, pravidelný osmiúhelník atp. Vymodeluj kornoutek na zmrzlinu! Popiš, čemu se podobá? Kde se můžeme setkat s předměty tvaru kruhu a kružnice v praxi? Vystřihni z kruhu „spirálu“, čtverec, mezikruží aj. (Toto není text pro žáky, jen nápověda pro nás, zde záleží na nápaditosti všech zúčastněných.)

Úlohy určené k črtání a rýsování

1. Odhadni polohu středu S narýsované kružnice k! Narýsuj pak takovou kružnici se středem S, která by se co nejvíce přibližovala kružnici k.

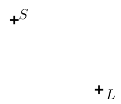


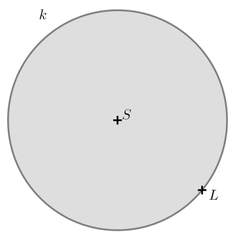
Grafické zadání



Předpokládaný výsledek

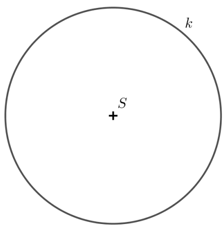
2. Načrtni kružnici l se středem S a bodem L, který na ní má ležet! Narýsuj kružnici k se středem S, která prochází bodem L, a obarvi ji červeně. Zeleně obarvi kruh K se středem S ohraničený kružnicí k. (Kdybychom měli kruhovou travnatou zahradu s červeným plotem, viděli bychom ji tak z letadla.)

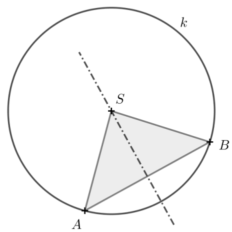




Grafické zadání Předpokládaný výsledek

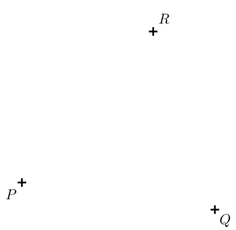
3. Zvol si na kružnici k se středem S body A a B a změř jejich vzdálenost od bodu S! Jaký je trojúhelník ABS? Narýsuj osu úsečky AB. Co o ní můžeme říci?

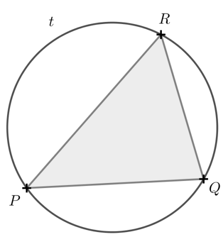




Grafické zadání Předpokládaný výsledek

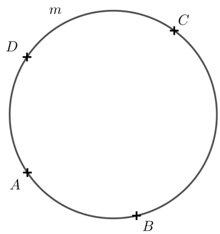
4. Narýsuj kružnici t, která prochází zadanými body P, Q, R. Narýsuj trojúhelník PQR. Tvá kružnice je opsaná trojúhelníku PQR. (Ale neměli bychom říkat, že trojúhelník PQR je vepsaný DO kružnice t, protože kružnice je čára a do ní se trojúhelník nevejde. Platí ale, že trojúhelník PQR je vepsaný DO KRUHU T. To je rozdíl!)



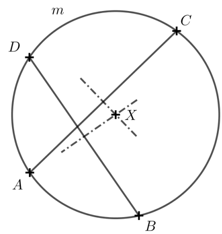


Grafické zadání Předpokládaný výsledek

5. Na nakreslené kružnici m leží body A, B, C a D. Narýsuj úsečky AC a BD. Sestroj osy obou úseček a jejich průsečík označ X. Je bod X něčím význačný? (Lze „ověřit“ pomocí osy další úsečky AD nebo dokázat . . .)

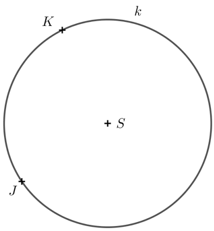


Grafické zadání

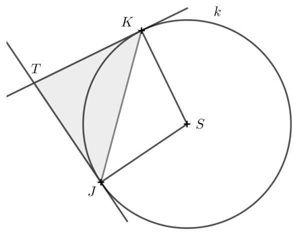


Předpokládaný výsledek

6. K nakreslené kružnici k se středem S sestroj tečny v bodech J, K a jejich průsečík označ T. Jaké vlastnosti má trojúhelník JKT?

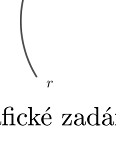


Grafické zadání

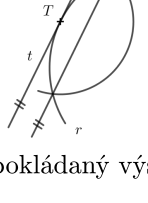


Předpokládaný výsledek

7. Narýsovaná křivka je částí kružnice r. Sestroj k této kružnici tečnu v bodě T tak, aby se tvá konstrukce celá vešla na tento papír!

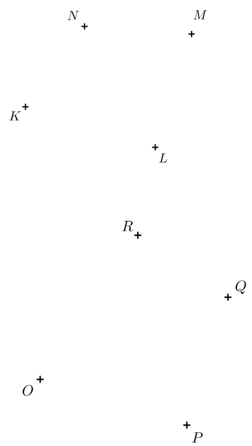


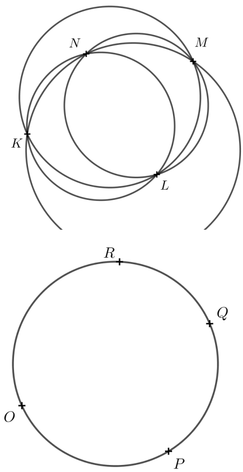
Grafické zadání



Předpokládaný výsledek

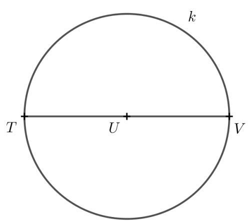
8. Kružnici lze určit třemi různými body, které neleží na jedné přímce. Sestroj všechny kružnice, které lze narýsovat pomocí vybraných trojic ze čtveřice bodů K, L, M, N! S další čtveřicí bodů O, P, Q, R proveď totéž!

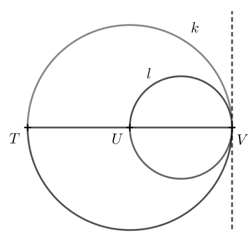




Grafické zadání Předpokládaný výsledek

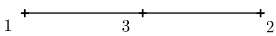
9. V kružnici k se středem U je vyznačen její průměr TV. Narýsuj kružnici l s průměrem UV a společnou tečnu obou kružnic vedenou bodem V. Červeně vyznač oblouk TV kružnice k ležící nad průměrem TV a modře oblouk kružnice l pod jejím průměrem VU. Výsledkem je částečně zavinutá křivka. Všimni si přechodu křivky z jedné kružnice na druhou! (Abychom ho okem nezpozorovali, musí mít obě kružnice právě zde společnou tečnu.)



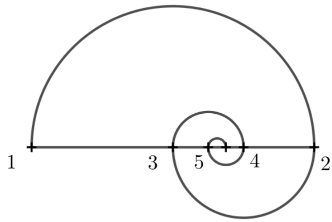


Grafické zadání Předpokládaný výsledek

10. Narýsuj úsečku 8 cm dlouhou. Její koncové body označ 1, 2 a střed úsečky 12 číslicí 3. Jako v předchozí úloze sestroj polovinu kružnice nad průměrem 12 a polovinu menší kružnice pod průměrem 23. Přidej půlkružnici nad průměrem 34 (bod 4 je středem úsečky 23), pod průměrem 45 atd. Získáš část spirály „slepované“ z řady zmenšujících se půlkružnic, jejichž středy leží na přímce 12.



Grafické zadání



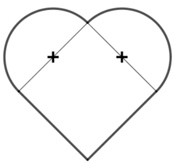
Předpokládaný výsledek

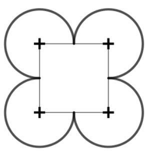
11. Je zadán začátek ornamentu složeného z půlkružnic. Načrtni nebo narýsuj pokračování ornamentu.

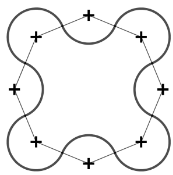
Grafické zadání

Předpokládaný výsledek

12. Ještě připojujeme několik obrázků, na kterých děti mohou procvičit své znalosti o kružnicích a doplnit je vlastními nápady.







Vyvrcholením těchto úloh by mohla být rekonstrukce křivky na obrázku 1 z tohoto článku.