

Učitel matematiky

František Kuřina

Je matematika věda nebo řemeslo?

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 1, 9–19

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149087>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2017

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

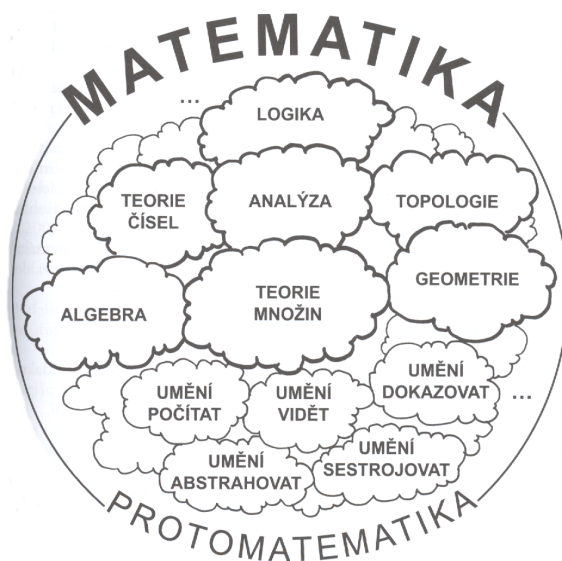
JE MATEMATIKA VĚDA NEBO ŘEMESLO?

FRANTIŠEK KUŘINA

*Vědět znamená dovést něco vytvářeti
buď duchem, rukou, nebo jazykem.*

J. A. Komenský ([3]; s. 10)

Provokativní název příspěvku se přirozeně týká školské matematiky a byl inspirován pozoruhodnou publikací *Marie Kupčákové Tvořivá geometrie* [4]. Přesto, že na otázku položenou v nadpisu nebudu moci dát zcela uspokojivou odpověď, neboť nám chybí jak vymezení pojmu *řemeslo*, tak i pojmu *věda*, má smysl o problematice uvažovat. Co je to *matematika* je ovšem jasné: předmět vyučovaný na našich školách od první třídy základní školy až po maturitu.



Obr. 1

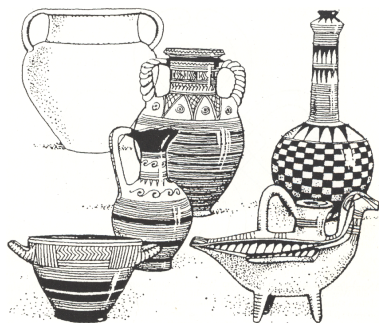
Matematika a školská matematika

Školská matematika má zpravidla charakter jakéhosi okraje matematické vědy. Učíme definice, vzorce, pravidla, postupy, věty, důkazy, . . . Měli bychom si však spíše všimnout cest, které k matematickým poznatkům vedly, tedy otázek, problémů, experimentů, hypotéz a chyb. Základní roli by tedy měly hrát ony dovednosti, ona umění, která matematiku utvářela v historii. Jejich pěstováním bychom matematiku přiblížili žákům účinněji než uváděním ne zcela pochopených výsledků, např. aritmetiky, algebry či geometrie.

To, co vedlo k utváření matematiky v historii, nazývá *Petr Vopěnka protomatematikou*. Matematické vzdělávání by mělo mít charakter činností znázorněných v dolní části obr. 1, tedy např. rozvíjet umění počítat, umění vidět (nejen geometrické útvary v prostoru, ale i vidět souvislosti), umění tvořit (kreslit, rýsovat, modelovat), umění argumentovat, . . . Tato umění mají spíše charakter řemesel než vědy a jejich vývoj lze i na historii vědy dokumentovat. Např. predeukleidovské chápání „praktické“ geometrie charakterizuje Vopěnka takto: „Praktická geometrie (měřictví) byla provozována dávno před Eukleidem. Takzvaní napínači provazů vyměřovali a vytyčovali nejrůznější pozemky a stavby. Zachycovaly je značkami (body), které umísťovali do vrcholů (rohů), popřípadě některých dalších významných míst vytyčovaných útvarů. Měřili čtyři druhy velikosti: délky, plošné obsahy, objemy a velikosti úhlů“ ([12]; s. 23). Tito napínači provazů „ovládali svoje řemeslo s obdivuhodným mistrovstvím. Považujeme-li měřictví za řemeslo, neznamená to, že bychom mu chtěli upřít tvůrčí povahu. Právě naopak v řemesle je často více tvůrčí činnosti než ve vědě, neboť tvoření je jeho hlavním úkolem“ ([14]; s. 39).

Této protomatematické činnosti předcházelo pro přežití člověka nevyhnutelné úsilí porozumět světu přírody. „Smyslem, jenž co nejnvýrazněji upozorňuje pračlověka Janečka, že proti němu něco stojí, je hmat. Jím se setkává s tím, co je hmatatelné, a to tak, že se s tím střetává. Jím také zjišťuje, zda je to soudržné, tekuté, tvrdé, měkké a podobně (. . .). Hmatem si zjednává základní porozumění“ ([11]; s. 89). Pravěká řemeslná tvorba je ovšem od samého

začátku spjata i s prožitky krásna. Tak vznikají např. dvojdimen-
zionální vzory při tkaní a pletení a při výrobě keramiky, které mají
geometrický charakter ([9]; s. 6, obr. 2). Manuální tvorba, krása
a užitečnost byly faktory, které sice hrály ve vývoji člověka výraz-
nou roli, bohužel hrají však dosti malou roli v našem vzdělávání.
Jsou ovšem základním rysem publikace M. Kupčákové, která dala
podnět k této stati.



Obr. 2

Vraťme se však k úvodní otázce.

Umění počítat, které je i dnes podstatnou složkou matema-
tického vzdělávání, by měli žáci poznat především jeho nástroj
předpovídání pomocí formálních kalkulů [13]. Nástroj musí ovšem
dobře fungovat. Znamená to především dobré porozumění desít-
kové soustavě a spolehlivé provádění výpočtů pomocí běžné vý-
početní techniky. Již na základní škole by měli žáci zvládnout ja-
zyk algebry, včetně úprav algebraických výrazů a řešení lineárních
rovníc.

K problematice vyučování geometrii připomenu nejdříve sto
let stará slova *Bertranda Russella*: „Místo, aby se v geometrii
začínalo únavným aparátem falešných důkazů pro zjevné a sa-
mozřejmé pravdy, by se studentovi mělo dovolit, aby předpoklá-
dal pravdivost všeho zřejmého, a pak by se mu měly vysvětlovat
důkazy vět, které jsou jak překvapující, tak snadno ověřitelné ob-
rážkem... Pokud jsou věty těžké, měly by se nejprve vyučovat
jako cvičení v geometrické kresbě, dokud se obrázek dostatečně

nevryje do paměti... Abstraktní důkazy by tak měly tvořit jen malou část výuky a mělo by se k nim přistupovat, teprve když se studenti již seznámili s konkrétními ilustracemi, a mohou tedy abstraktní důkazy považovat za přirozené vyjádření toho, co vidí.“ ([8]; s. 52)

Dostí odlišné stanovisko se traduje v části naší didaktiky: „Solidní studium základů planimetrie, byť se zdálo málo zábavným, protože zdánlivě nepřináší nové poznatky, je pro učitele nezbytně nutné, má-li se této disciplíně vyučovati na vědeckém základě“ ([15]; s. 3). „Při prvním čtení je především nutno studujícím podávat pojmy a věty skutečně exaktní formou, systémem ‚definice – věta – důkaz‘ a to už proto, aby se naučil správnému matematickému myšlení a vyjadřování.“ ([16]; s. 9)

O axiomatických východiscích k vyučování geometrie jsem psal dosti podrobně v článku [7] *Hilbert nebo Hadamard*. K této problematice dnes dodávám, že za dobrou ilustraci této otázky považuji studium různých modelů metrických prostorů. To ovšem souvisí s pojmem vzdálenost, který je důkladně studován v připomenuté knize Vyšínové [15]. V našich učebnicích, snad s výjimkou Hejného textů pro první stupeň základní školy z nakladatelství Fraus, je této tematice věnována takřka nulová pozornost. Před léty jsem navrhl tzv. didaktickou strukturu geometrie jako možný přístup k pojetí geometrie na základní škole [5], spočívající v těchto principech:

1. Dělení prostoru,
2. Vyplňování prostoru,
3. Pohyb v prostoru,
4. Dimenze prostoru.

Geometrie vycházející z těchto principů se nejen opírá o zkušenosti dětí s prostorem, v němž žijí, ale je i východiskem pro konstrukci řady pojmů, např. úsečka, osa úsečky, kružnice, mnohoúhelník, délka úsečky, obsah útvaru, objem tělesa, geometrická zobrazení, ...

Všimněme si dále tří ukázek přístupů ke geometrii na základní škole, které jsou ukázkami možností, jak přiblížit vyučování geometrii žákům.

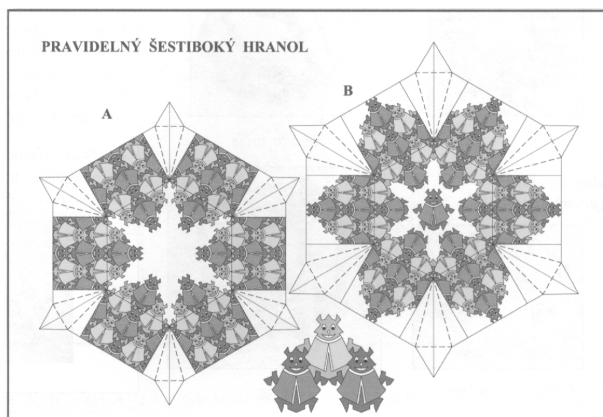
Tvořivá geometrie Marie Kupčákové

Jsem rád, že Marie Kupčáková, ačkoliv vycházela spíše z poznání psychologie dítěte, než ze strukturálního pohledu na geometrii, dala výše zmíněným principům konkrétní obsah. Vystříhováním předloh žáci „prožívají“ dělení roviny na části, konstrukcí těles a tvorbou různých modelů pracují s úvary dimenze 1, 2 nebo 3 a vyplňují tak části prostoru. Vše se ovšem realizuje manuálně, tedy pohyby v prostoru.

Podtitul této publikace zní *Modely základních prostorových útvarů*. Autorka poskytuje učitelům základních škol materiál, který umožní vnést „do školní stereometrie život“. „Tvořivá geometrie je obrázková publikace, která nejenom nabízí náměty a didaktické poznámky, jak lze jednoduše modelovat geometrické prostorové útvary, ale také přináší hotové stříhy papírových modelů základních těles“ ([4]; s. 1). Tím chce autorka povzbudit modeláře k vlastní geometrické tvorbě těchto těles: krychle, kvádr, pravidelný šestiboký hranol, pravidelný trojboký jehlan, pravidelný pětiboký jehlan, kuboooktaedr, rotační válec a komolý rotační kužel. V úvodní části vysvětluje následující typy 3D modelů: modely plné, povrchové a hranové a tři typy 2D modelů: sítě, počítačové modely a náčrtky. Přitom, vzhledem k tomu, že má vše důkladně vyzkoušené v praxi (v letech 1997–2010 publikovala návrhy na tvorbu 80 geometrických modelů pro časopis *ABC*), nezanedbává pokyny pro praktickou tvorbu (postupy, sestavování, záložky, chlopně, ...) a seznamuje uživatele publikace s různými materiály (modelína JOVI, polystyren, ...) a několika stavebnicemi (Magformers, Seva, Geomag, ...).

Publikace je jazykově úsporná, pouze uvádí v rámečku Zařazení příslušné termíny (např. těleso, mnohostěn, rovnoběžnostěn, hranol, kolmý hranol). Vysvětlení se jeví jako zbytečné, neboť příslušné objekty žák vyrábí. Místo jakéhokoliv pokusu o definici nastupuje přirozené poznávání kvádrů, ... Tvorbou plných modelů žák „prožívá“ vyplňování prostoru, „oblékáním tělesa“ vystříženou sítí realizuje pohybem v prostoru vztah mezi dimenzemi. Důležité je, že se zde na úrovni práce žáka v malém replikuje historicky doložitelný proces: vytvářet něco nejen užitečného,

ale i hezkého (např. krabičku, stojánek na pohlednice, vánoční ozdobu, ozdobnou schránku, ...). Na obr. 3 reprodukuje se ukázkou „stříh na výrobu krabičky bez lepení“. Autorka se neomezuje na tělesa, s nimiž se žáci setkávají ve škole, dává např. i návod na konstrukci *kubooktaedru*. Na příkladu zobrazení drátěných modelů si mohou žáci dobře uvědomit rozdíl mezi perspektivním a rovnoběžným zobrazováním.



Obr. 3

V publikaci [1] připravila Kupčáková v kapitole *Tematický okruh Geometrie v rovině a prostoru* mnohé z myšlenek práce [4] k realizaci na základní škole. Výklad je zde zcela konkrétní, je ilustrován žákovskými řešeními, která autorka hodnotí a komentuje. Ukazuje i práci žáků například s programy *Cabri II – Plus* a *SketUpMake*. Publikace [4], kterou si můžete objednat na adrese: papirovemodely@centrum.cz, je první částí připravované tematické řady.

Valouchova historická učebnice měřictví

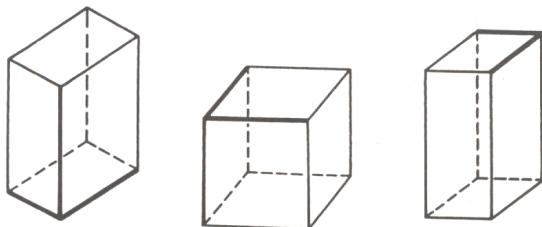
Na tomto příkladu se pokusím ukázat, jak v učebnici *Měřictví* z r. 1926 autor spojoval geometrii se světem žáků. Po historickém úvodu dostávají žáci pokyn: „Vyberte si ze svých kamínků

krychle (následuje obrázek). Také hrací kostka je krychle. Kdo nemá krychle, nechť pokusí se vyřezati ji ze syrového bramboru nebo jablka, křídý“ ([10]; s. 4). Dále žáci modelují krychli ze „samonosné sítě“, kterou uvádí i *Eva Pomykalová* na obálce gymnaziální učebnice *Planimetrie*. Podobně se pracuje s kvádrem a řeší se mnoho úloh na měření, konstruování a „přeměny obrazců“ např. pravidelného šestiúhelníku v trojúhelník. Po experimentování s pravouhlými trojúhelníky s odvěsnami 1 a 2, 1 a 3, 2 a 3 se formuluje Pythagorova věta, která se dokazuje čtyřmi způsoby, včetně důkazu *Eukleidova*. Důkaz, který se dnes obvykle připisuje americkému prezidentovi *Garfieldovi*, je zde uveden jako důkaz arabského matematika *Nassir-ed-Dina*.

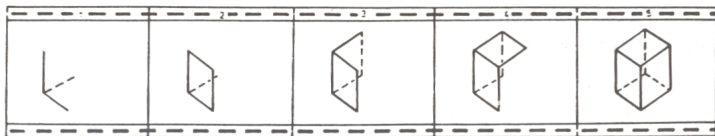
Geometrická praktika jako úvod do studia geometrie

V publikacích [6] jsem zpracoval část geometrie základní školy způsobem, který vychází z řešení úloh, a je realizací didaktické struktury geometrie. Uveďme z druhého dílu několik ukázek.

Úloha 1. ([6]; s. 63) Libovolné 3 úsečky vycházející z jednoho bodu můžeme považovat za obrazy tří hran kvádrů (krychle). Pro názornost budeme volit jednu z hran ve svislé poloze. Tímto způsobem můžeme nakreslit krychli nebo kvádr postupným doplňováním rovnoběžníků (obr. 4). Nakreslete nebo narýsujte několik krychlí (obr. 5).

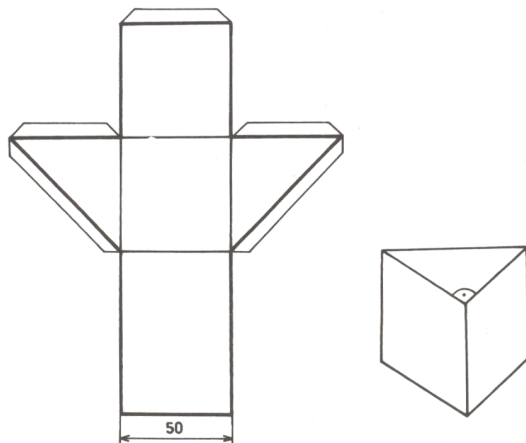


Obr. 4



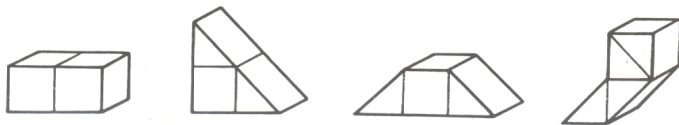
Obr. 5

Úloha 2. ([6]; s. 59) Narýsujte co nejpřesněji síť a vymodelujte dva trojboké hranoly podle obr. 6.



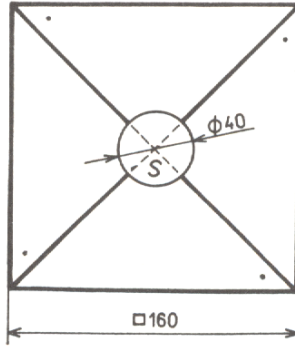
Obr. 6

Úloha 3. ([6]; s. 60) Vymodelujte několik těles s objemem čtvrt litru. (Krychle s hranou délky 5 cm je připravena z předcházejícího cvičení.) Několik výsledků je na obr. 7.



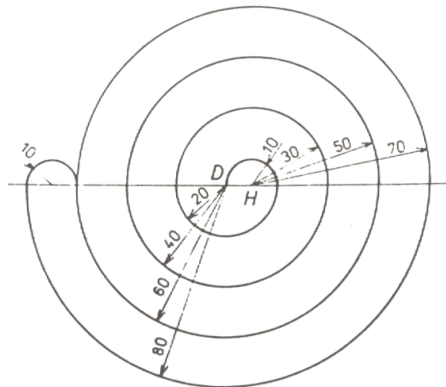
Obr. 7

Úloha 4. ([6]; s. 87) Narýsujte, vystříhnete a vymodelujete z tužšího papíru větrník. Podél tlustých čar vystříhnete, ve vyznačených bodech propíchněte a po ohnutí spojíte v bodě S (obr. 8).



Obr. 8

Úloha 5. ([6]; s. 87) Narýsujte, vystříhnete a vymodelujete prostoro-rovou spirálu z tužšího papíru. Po upevnění v bodě H se spirála nad ústředním topením otáčí (obr. 9).



Obr. 9

Závěr

Orientaci matematického vzdělávání na činnosti žáků, na dobré zvládnutí základních dovedností, na řešení pro žáka zajímavých úloh a na poznávání významu matematiky pro život ve společnosti považuji za základní a důležitý úkol naší školy. Může se tak zvýšit zájem žáků o matematiku jako nejdůležitější faktor ovlivňující zlepšení výsledků vzdělávání. Matematika by přitom nabývala spíše charakter řemesla než vědy, tedy spíše charakter počtů a měřictví. Náš vzdělávací systém dlouhodobě trpí nerealistickým hodnocením. Výrok klasika naší pedagogiky *Gustava Adolfa Lindnera* z roku 1885: „Vzdělanost nezáleží v tom, jak mnoho někdo ví, nýbrž jak všestranně vládne tím, co ví. My chceme vypěstovat obry a vychováváme trpaslíky,“ zdá se být i dnes aktuální.

Školská matematika není vědou v pravém slova smyslu (neprodukuje nové výsledky), není ani řemeslem (nezabývá se výrobou). Měla by však být naplněna tvořivou činností, která je blízká řemeslu i vědě, a v níž by mělo najít uspokojení co nejvíce žáků.

Literatura

- [1] Fuchs, E. & Zelendová, E. (2015). *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání*. Praha: NÚV.
- [2] Hejný, M. & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál.
- [3] Komenský, J. A. (1947). *Analytická didaktika*. Praha: Státní nakladatelství.
- [4] Kupčáková, M. (2015). *Tvořivá geometrie I*. Hradec Králové: Gaudeamus.
- [5] Kuřina, F. (1995). Didactical Structure of Geometry. In *ICMI Study Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. University of Catania.
- [6] Kuřina, F. (1994). *Geometrické praktikum I., II*. Praha: MÚ AVČR.
- [7] Kuřina, F. (2012). Hilbert nebo Hadamard. *Pokroky matematiky, fyziky, astronomie*, 57, 239–253.

- [8] Russell, B. (2015). *Mystika a logika a jiné eseje*. Praha: Academia.
- [9] Scriba, C. J. & Schreiber, P. (2001). *5000 Jahre Geometrie*. Berlín: Springer.
- [10] Valouch, M. (1926). *Měřictví pro nižší třídy škol středních*. Vídeň: Hölde-Pichler-Tempský.
- [11] Vopěnka, P. (1991). *Druhé rozpravy s geometrií*. Práh: Praha.
- [12] Vopěnka, P. (2007). Napínači provazů. In Eukleidés, *Základy*. Nymburk: OPS.
- [13] Vopěnka, P. (1971). Poznámky o současné matematice. *Filozofický časopis*, 19, 731–753.
- [14] Vopěnka, P. (1989). *Rozpravy s geometrií*. Praha: Panorama.
- [15] Vyšín, J. (1952). *Elementární geometrie I*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství.
- [16] Zelinka, B. (1976). Předmluva překladatele. In S. Marcus, *Matematická analýza čtená podruhé*. Praha: Academia.

Abstract

The article deals with some possibilities of how to teach mathematics through practical activities. The mathematics in this conception is not a theoretical field. It is the area of the creation of mathematics by students themselves. Some examples are given.

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta, Katedra matematiky
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz