Učitel matematiky

Miroslav Staněk

Několik netypických praktických úloh

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 3, 182–192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149105

NĚKOLIK NETYPICKÝCH PRAKTICKÝCH ÚLOH

Miroslav Staněk

Nejčastějšími otázkami dnešních studentů, které slyší učitel ve třídě, jsou: „K čemu nám to bude? Proč se to máme učit? Budeme to někdy potřebovat?" Učitel mnohdy zůstává šokován s pocitem zoufalství a beznaděje, zvlášť v případě, když slyší otázku „K čemu mi to bude?" od studenta Informačních technologií při vysvětlování základů výrokové algebry a elementární logiky.

V současnosti se na odborné škole a odborném učilišti stále více setkávám se studenty, kteří nejen že nemají základní znalosti, ale navíc nechtějí a neumí „myslet".

Matematika v odborném školství není jen o výpočtech a důkazech, ale především o přemýšlení a řešení problémů. Klasik kdysi napsal, že latina a matematika nutí žáky myslet. Dnes už zbývá jen matematika a u mých žáků se zdá, že i v tomto matematika na základní škole selhává. Žáci nezvládají nižší úroveň kompetencí podle různých taxonomií, tedy znalosti, a mají zvládat vyšší úrovně kompetencí, tedy aplikace znalostí, analýzu, syntézu či hodnocení. V tom je jistý rozpor. Přitom existují úlohy, které jsou zdánlivě jednoduché, vyžadují jen minimální znalosti, a přesto působí běžným žákům mnohem větší potíže, než by se dalo očekávat.

Proto bych rád ukázal několik jednodušších úloh, z nichž některé v trochu odlišné verzi byly publikovány na internetu na stránkách Matematika pro všechny [1] a které umožňují netradiční pohled na využití středoškolské matematiky. Úlohy jsou netypické nejednoznačností a vyznačují se velkou variabilitou případných úprav zadání i složitosti řešení.

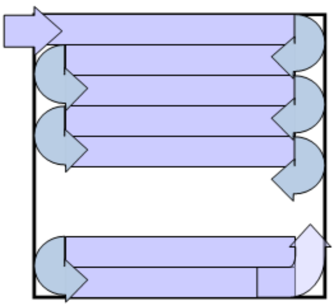
Úloha 1. Traktorista má osít secím strojem o záběru lišty 9 m čtvercové pole o výměře 16 ha. Odhadni vzdálenost, kterou musí ujet secí stroj. Při přesném výpočtu uvaž, že musí objet úvratí, aby bylo všude zaseto. Na pole najíždí a pole opouští v jednom z rohů čtverce. Dráhu při couvání pro zasetí v rozích pole zanedbej.

V učebnicích je nejčastějším způsobem řešení takových úloh hrubý odhad výsledku:
Pole má výměru 16 ha tedy $160\,000\,\mathrm{m}^2$.
Pokud je záběr lišty 9 m, je minimální délka osetého pruhu:

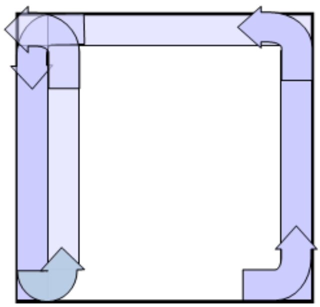
$160\,000 : 9 = 17\,777{,}\overline{7}$.

Tedy secí stroj musí ujet minimálně 17 777,78 m.

Blíže realitě, v době, kdy traktor a secí stroj na poli řídí počítač s GPS, by byl přesnější výpočet:
Pole má výměru 16 ha tedy $160\,000\,\mathrm{m}^2$. Je to čtverec o straně 400 m.
Protože $400 : 9 = 44{,}\overline{4}$, pojede secí stroj pětačtyřicetkrát tam i zpět (viz obr. 1a).
Pak musí objet úvratí a vyjet z pole (viz obr. 1b).



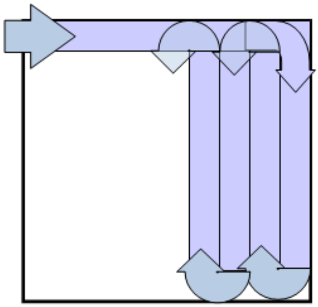
Obr. 1a



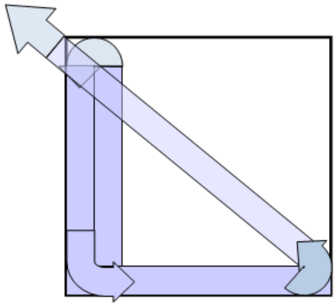
Obr. 1b

Secí stroj musí najet na pole, urazit rovně 391 m a poté po obrátkách urazit 44 rovných úseků 382 m a k tomu stejný počet půlkružnic délky $\pi \cdot 4{,}5$ m. Pro objetí úvratí bude potřebovat třikrát 391 m a jednou 382 m na vyjetí z pole a k tomu čtyři čtvrtkružnice délky $2\pi \cdot 4{,}5$ m a jednu půlkružnici délky $\pi \cdot 4{,}5$ m a 9 m na opuštění pole.
Délka cesty bude: $4 \cdot 391 + 45 \cdot 382 + 47\pi \cdot 4{,}5 + 9 \doteq 19\,427{,}45$.
Celková délka trasy je asi 19 427 m.

Žák by se měl zamyslet, zda neexistuje kratší trasa. Například varianta (viz obr. 2a a 2b).

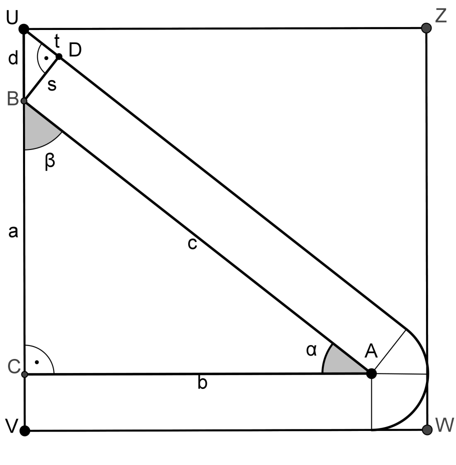


Obr. 2a



Obr. 2b

Secí stroj musí najet na pole, urazit rovně 400 m (včetně osetí rohu pole) a po čtvrtkružnici délky $0{,}5\pi \cdot 4{,}5$ m a projet 45 rovných úseků 382 m a k tomu 44 půlkružnic délky $\pi \cdot 4{,}5$ m. Pro objetí druhého úvratí bude potřebovat čtvrtkružnici délky $0{,}5\pi \cdot 4{,}5$ m a 400 m s otáčkou a úhlopříčkou.
Délku otáčky a úhlopříčky vypočítáme s využitím obr. 2c.



Obr. 2c

Trojúhelníky ABC a BDU jsou podobné. Tedy
$$\frac{9}{d} = \frac{391}{\sqrt{391^2 + (391-d)^2}}.$$
Po úpravách dostáváme
$$(391^2 - 9^2)d^2 + 2 \cdot 9^2 \cdot 391d - 2 \cdot 9^2 \cdot 391^2 = 0.$$
Řešením je
$$d_{1,2} = \frac{9 \cdot 391}{391^2 - 9^2}\left(-9 \pm \sqrt{2 \cdot 391^2 - 9^2}\right).$$
Smysl má jen kladný kořen $d \doteq 12{,}5257$.
Odtud:
$$t = \sqrt{12{,}5257^2 - 9^2} \doteq 8{,}7117$$
$$c = \sqrt{391^2 + (391 - 12{,}5257)^2} \doteq 544{,}1726$$
$$\sin\beta = \frac{9}{12{,}5257}, \text{ tedy } \beta \doteq 45{,}9326$$
Pak oblouk měří $\dfrac{90 + 45{,}9326}{180} \cdot \pi \cdot 4{,}5$ a úhlopříčná trasa $c + \frac{t}{2} \doteq 548{,}5285\,\mathrm{m}$.
Tedy celá trasa secího stroje je: $400 + 0{,}5\pi \cdot 4{,}5 + 45 \cdot 382 + 44 \cdot \pi \cdot 4{,}5 + 0{,}5\pi \cdot 4{,}5 + 400 + \dfrac{90 + 45{,}9326}{180} \cdot \pi \cdot 4{,}5 + 548{,}5285 \doteq 19\,185{,}38$.
Celková délka kratší trasy je asi $19\,185\,\mathrm{m}$.

Pokud bychom chtěli uvažovat i couvání secího stroje v rozích pole, museli bychom k výsledkům všech řešení přičíst minimálně $3 \cdot 9\,\mathrm{m}$.

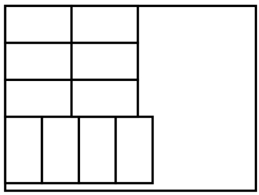
Úlohu je možno obměnit a ztížit jiným tvarem pole či změnou místa nájezdu.

Poznámka. Při řešení této úlohy vycházíme ze zjednodušení problému. Pokud bychom chtěli řešit pohyb dvounápravového traktoru, za který je zapojen jednonápravový secí stroj, jednalo by se o problém, jehož řešení zdaleka přesahuje středoškolskou matematiku.

Častým typem úloh je balení dárků.

Úloha 2. Z role balicího papíru šířky 1 m máme vystřihnout 10 obdélníků o rozměrech 35×21 cm na zabalení 10 dárků. Kolik metrů balicího papíru budeš potřebovat?

Obdélníky lze lehce uspořádat tak, že bude třeba jen 84 cm papíru (viz obr. 3).

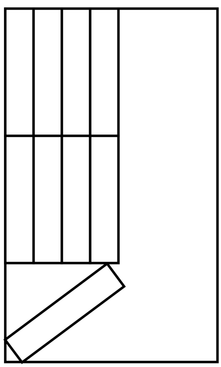


Obr. 3

Mnohem rozmanitější je následující varianta zadání.

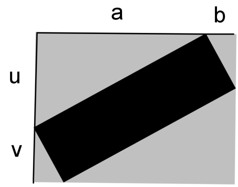
Úloha 3. Z role balicího papíru šířky 1 m máme vystřihnout 9 obdélníků o rozměrech 35×7 cm na zabalení 9 dárků. Kolik metrů balicího papíru budeš potřebovat?

Po chvilce přemýšlení se jeví jako optimální následující varianta uspořádání obdélníků (viz obr. 4).



Obr. 4

Musíme dopočítat, jak daleko zasahuje šikmý obdélník. Načrtneme si obrázek a zavedeme značení (viz obr. 5).



Obr. 5

Víme, že:

$$u + v = 30 \tag{8}$$

$$\frac{u}{35} = \frac{b}{7} \Rightarrow u = 5b \tag{9}$$

$$\frac{a}{35} = \frac{v}{7} \Rightarrow a = 5v \tag{10}$$

$$v^2 + b^2 = 7^2 \tag{11}$$

$$a^2 + u^2 = 35^2 \tag{12}$$

Z (8), (9) a (10) plyne:

$$a + b = 5v + \frac{u}{5} = 5v + \frac{30 - v}{5} = 6 + 4{,}8v$$

Z (11) a (8) dostáváme:

$$b^2 = 7^2 - v^2$$

$$\frac{(30 - v)^2}{25} = 7^2 - v^2$$

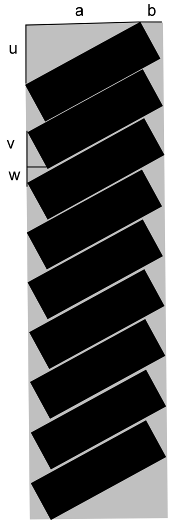
$$26v^2 - 60v - 325 = 0$$

$$v_1 = 4{,}8730 \qquad v_2 = -2{,}5653$$

$$a + b = 29{,}39$$

Protože b je 5,03 cm, zdá se, že budeme potřebovat asi 29,39 cm papíru.

Je třeba ověřit, že nedosáhneme lepšího výsledku šikmým uložením většího počtu obdélníků. Načrtneme obrázek pro 9 šikmých obdélníků a zavedeme značení (viz obr. 6).



Obr. 6

Víme, že:

$$u + 9v + 8w = 100 \tag{13}$$

$$\frac{u}{35} = \frac{b}{7} \Rightarrow u = 5b$$

$$\frac{a}{35} = \frac{v}{7} \Rightarrow a = 5v$$

$$\frac{v}{b} = \frac{b}{w} \Rightarrow w = \frac{b^2}{v} \Rightarrow w = \frac{7^2 - v^2}{v} \tag{14}$$

$$v^2 + b^2 = 7^2$$

$$a^2 + u^2 = 35^2$$

Z (9), (10), (11), (13) a (14) dostáváme:

$$a + b = 5v + \frac{u}{5} = 5v + \frac{100 - v - \frac{8 \cdot 7^2}{v}}{5} = 20 + 4{,}8v - \frac{8 \cdot 7^2}{5v}$$

Ze (11), (13) a (14) dostáváme:

$$b^2 = 7^2 - v^2$$
$$\frac{\left(100 - v - \frac{8\cdot 7^2}{v}\right)^2}{25} = 7^2 - v^2$$
$$26v^4 - 200v^3 + 9559v^2 - 78\,400v + 153\,644 = 0$$

Využitím CAS programu GeoGebra dostaneme řešení:

$$v_1 = 3{,}05, \quad v_2 = 5{,}41$$

Smysl má pouze druhý kořen, protože prvnímu kořenu přísluší záporné hodnoty u a b.

$$a + b = 31{,}48$$

Tedy optimálním řešením bude opravdu jen 29,39 cm papíru.

Změna tvaru obalu a počtu krabiček generuje spoustu variant zadání a řešení různé obtížnosti.

Druhou část řešení můžeme použít jako řešení úlohy: *Jak nízký může být regál o hloubce 1 m, abychom do něj byli schopni šikmo za sebou opřít 9 krabic o výšce 35 cm a tloušťce 7 cm?*

Budeme-li parafrázovat slova klasika, vidíme, že i skladník může řešit rovnici čtvrtého stupně. S ohledem na vývoj techniky není daleko doba, kdy i skladník bude muset umět řešit nejen rovnici čtvrtého stupně.

Tato úloha předznamenala další typ úloh. Jedná se o rovnání nákladu. Můžeme řešit rovinný problém, kdy máme narovnat na obdélníkovou korbu nákladního automobilu krabice se zbožím daných rozměrů. Mnohem těžší a zajímavější je trojrozměrná verze problému.

Úloha 4. Jak má řidič do úložného prostoru kamionu o šířce 2,5 m, výšce 3 m a délce 8 m uložit co nejvíce stejných krabic se zbožím, jestliže je může libovolně otočit. Krabice mají rozměry v metrech:

a) $0{,}6 \times 0{,}9 \times 7{,}8$
b) $0{,}5 \times 1{,}5 \times 8{,}1$
c) $0{,}4 \times 0{,}4 \times 8{,}4$
d) $0{,}6 \times 0{,}5 \times 3$

a) Délka krabice je o 0,2 metru menší než délka nákladového prostoru kamionu. Tedy krabice musíme rovnat ve směru délky nákladového prostoru. Bude nás zajímat maximální počet obdélníků $0{,}6 \times 0{,}9$, které se vejdou do obdélníku $2{,}5 \times 3$.
Nabízí se dvě možnosti:

1. Do 2,5 se 0,6 vejde čtyřikrát. Zbude 0,1 volného prostoru. Do výšky 3 se vejde 0,9 třikrát a zbude 0,3 volného prostoru. Počet krabic je $4 \cdot 3 = 12$.
2. Do 2,5 se 0,9 vejde dvakrát a zbude 0,7, kam se vejde jednou 0,6.
   Na výšku 3 se vejde 0,6 pětkrát a 0,9 třikrát se zbytkem 0,3 volného prostoru.
   Počet krabic je $2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 13$.

Nejvyšší počet krabic je 13.

b) Protože jeden rozměr krabice je delší než délka úložného prostoru, musíme krabici umístit šikmo. Úhlopříčku podlahy vypočítáme Pythagorovou větou:

$$u^2 = 2{,}5^2 + 8^2$$
$$u = \sqrt{6{,}25 + 64}$$
$$u = 8{,}38$$

Tedy krabice můžeme rovnat do úhlopříčky. Do úložného prostoru dostaneme dvě krabice postavené na sebe.

c) Protože jeden rozměr krabice je delší než délka úložného prostoru a delší než úhlopříčka podlahy, musíme krabici umístit šikmo ve směru tělesové úhlopříčky. Tělesovou úhlopříčku úložného prostoru vypočítáme Pythagorovou větou:

$$u^2 = 2{,}5^2 + 3^2 + 8^2$$
$$u = \sqrt{6{,}25 + 9 + 64}$$
$$u = 8{,}90$$

Do úložného prostoru dostaneme jednu krabici.

d) Existuje řada způsobů, jak krabice narovnat. Jako optimální se jeví možnost skládání krabic tak, že do 2,5 se 0,5 vejde pětkrát. Do 3 se 0,6 vejde pětkrát a do 8 se 3 vejde dvakrát. Zůstávají 2 m volného prostoru.
Počet krabic je $5 \cdot 5 \cdot 2$, což je 50 krabic.
V posledních dvou metrech můžeme stavět krabice na výšku. A tedy do 2 se vejde 0,5 čtyřikrát a do 2,5 se vejde 0,6 čtyřikrát a zůstane 0,1 volného prostoru.
Počet krabic je $4 \cdot 4 \cdot 1$, což je 16 krabic.
Celkem lze naložit 66 krabic.

Úlohu lze opět obměnit a případně ztížit volbou jiných rozměrů a tvarů krabic či úložného prostoru.

K úplně jiným typům úloh, co do obtížnosti, se dostaneme otočením problému, kdy hledáme rozměry beden, které můžeme v daném počtu naložit do daného prostoru.

Závěr

Jak je vidět na několika uvedených příkladech, úlohy nemusí vyžadovat od žáka příliš znalostí, ale je nutné, aby žák důkladně ovládal základy a nelekl se případných složitějších rovnic, se kterými by se měl být schopen, i s využitím techniky, vypořádat.

Je třeba si uvědomit, že žáci, mají-li být nejen v praxi co platní, musí řešit mnohem složitější problémy než jen výpočet srážky ze mzdy či procenta zisku. Diskuze o tom, zda řešení kvadratické rovnice patří do matematiky maturanta nebo se jedná o přetěžování žáků, je bezpředmětná. Dnešní praxe vyžaduje od lidí stále ve větší míře činnosti, které jsou obtížně naprogramovatelné a které za ně nemůže udělat počítač a stroj. Proto by bylo vhodné poté, co žáci zvládnou bezpečně základní znalosti (což je nutný předpoklad a velký problém), rozvíjet u žáků schopnost hledat nejlepší řešení problému, promýšlet a hodnotit různé varianty řešení, rozvíjet kreativní myšlení. Jen v tom případě budou žáci konkurenceschopní nejen na trhu práce, ale i ve vědě a životě. V opačném případě budou nuceni podlehnout konkurenci automatů.

Literatura

[1] Matematika pro všechny. Dostupné z `http://home.pf.jcu.cz/~math4all/aktivity_u_s.php?stupen=sou&sekce=32`

Abstract

The article contains some simple practical mathematical problems related to the most efficient covering of a rectangle and arranging boxes (prisms) to a block. These problems have a considerable number of variations which vary in difficulty. The problems are suitable for students to develop their reasoning.

Miroslav Staněk
SŠ André Citroëna Boskovice, příspěvková organizace
nám. 9. května 2a
680 11 Boskovice
e-mail: mirastanek@centrum.cz