Rozhledy matematicko-fyzikální

Pavel Pokorný

Goniometrické nerovnosti

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 96 (2021), No. 2, 1–15

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149122`

Goniometrické nerovnosti

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Ukážeme si zobecnění goniometrických nerovností z článků [1] a [3] na případ s libovolným počtem sčítanců. Naučíme se využívat konkávnost funkce a ukážeme si, jak dokázat nerovnost převedením rozdílu levé a pravé strany na součin. Vedle odvozených a dokázaných vztahů budou pro nás zajímavé i způsoby, jakými tyto výsledky dostáváme.

1. Úvod

V článku [1] (viz též [2]) je uveden elementární důkaz čtyř goniometrických nerovností

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2} \tag{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2} \tag{3}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{4}$$

které platí pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníka, tedy pro všechna kladná reálná čísla α, β, γ splňující vztah $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, měříme-li úhly v radiánech.

V článku [3] jsme zobecnili výraz na levé straně nerovností (1) a (2) na tvar

$$\sin(p\alpha) + \sin(p\beta) + \sin(p\gamma)$$

a podobně výraz na levé straně nerovností (3) a (4) na tvar

$$\cos(p\alpha) + \cos(p\beta) + \cos(p\gamma).$$

Dále jsme provedli numerický experiment, kdy jsme pro různé hodnoty parametru p, $0 \le p \le 1$, volili velké množství hodnot argumentů α, β

a γ splňující podmínku $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ a hledali jsme největší a nejmenší hodnotu součtu sinů a kosinů. Minimum a maximum jsme pak vynesli do grafu v závislosti na parametru p a vyslovili tuto hypotézu:

Je-li

$$p \in \langle 0,1\rangle,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \alpha+\beta+\gamma=\pi,$$

potom platí

$$\sin(p\pi) \leq \sin(p\alpha)+\sin(p\beta)+\sin(p\gamma) \leq 3\sin\frac{p\pi}{3} \tag{5}$$

$$2+\cos(p\pi) \leq \cos(p\alpha)+\cos(p\beta)+\cos(p\gamma) \leq 3\cos\frac{p\pi}{3}. \tag{6}$$

Maxima nastávají pro $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, minima nastávají, je-li jeden z úhlů roven π a ostatní dva úhly jsou nulové.

2. Zobecnění

Položme si otázku: Jak se změní maximum a minimum součtu sinů a kosinů, změníme-li počet sčítanců?

Označíme-li $x_1=p\alpha$, $x_2=p\beta$, $x_3=p\gamma$, pak

$$x_1+x_2+x_3=p(\alpha+\beta+\gamma)=p\pi$$

a můžeme levou nerovnost v (5) napsat ve tvaru

$$\sin\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\sin x_i, \tag{7}$$

levou nerovnost v (6) ve tvaru

$$n-1+\cos\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\cos x_i, \tag{8}$$

pravou nerovnost v (5) ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n}\sin x_i \leq n\sin\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{9}$$

a pravou nerovnost v (6) ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \cos x_i \leq n \cos \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{10}$$

V tomto článku budeme vždy uvažovat

$$x_i \geq 0.$$

Jak ukážeme dále, nerovnosti (7)–(10) platí pro všechna přirozená n za určitých podmínek, které ještě upřesníme.

Pro $n = 1$ se součet zredukuje na jediný člen, platnost vztahů (7)–(10) je zřejmá, nastává totiž rovnost, dokonce pro všechna $x_1 \in \mathbb{R}$.

3. Dolní odhady

Uvažujme nejprve $n = 2$ a zkoumejme dolní odhad součtu sinů

$$\sin(x_1 + x_2) \leq \sin x_1 + \sin x_2.$$

Tento vztah odvodíme spolu s podmínkou, za které platí, tím, že rozdíl pravé a levé strany převedeme na součin. Ze součinu bude lépe vidět, kdy je kladný, tedy kdy platí ostrá nerovnost, a kdy prochází nulou, tedy kdy nerovnost přestává platit, tedy jaké jsou hranice oblasti platnosti nerovnosti. Konkrétně dostaneme (podrobnosti jsou uvedeny v dodatku)

$$\sin x_1 + \sin x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Součin je výhodný, protože z něj lze snadno určit, kdy je rovný nule. To nastane v těchto třech případech:

1. je-li $\sin \frac{x_1}{2} = 0$, pak $\frac{x_1}{2} = k\pi$, $x_1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

2. je-li $\sin \frac{x_2}{2} = 0$, pak $x_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

3. je-li $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$, pak $x_1 + x_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

To jsou tři ekvidistantní soustavy přímek v rovině (přímky rovnoběžné s osou x, rovnoběžné s osou y a přímky klesající pod úhlem 45°). Tyto přímky rozdělí rovinu na pravoúhlé trojúhelníky. Nás zajímá ten trojúhelník, který je nejblíže počátku v prvním kvadrantu, tedy trojúhelník ohraničený přímkami

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 2\pi.$$

Na hranici tohoto trojúhelníku je rozdíl

$$\sum_{i=1}^{n} \sin x_i - \sin \sum_{i=1}^{n} x_i$$

nulový. Uvnitř je kladný, protože je to součin čísla 4 a tří kladných výrazů. Tedy pro $n = 2$ platí: je-li

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 2\pi$$

pak

$$\sin \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i.$$

Úplnou indukcí (viz dodatek) snadno dokážeme, že toto platí pro všechna přirozená n za podmínky

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2\pi.$$

Pro minimum součtu kosinů můžeme postupovat obdobně. Opět si upravíme rozdíl pravé a levé strany dokazované nerovnosti na součin. Pro $n = 2$ to bude

$$\cos x_1 + \cos x_2 - (1 + \cos(x_1 + x_2)) = 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ten bude nulový opět na přímkách, které rozdělí rovinu na trojúhelníky. Nás zajímá ten nejblíže počátku v prvním kvadrantu, tedy trojúhelník ohraničený přímkami

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = \pi.$$

Vidíme, že tento trojúhelník je menší než oblast platnosti dolního odhadu pro součet sinů. A úplnou indukcí pak zobecníme na případ n sčítanců a dostaneme

$$n - 1 + \cos \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \cos x_i$$

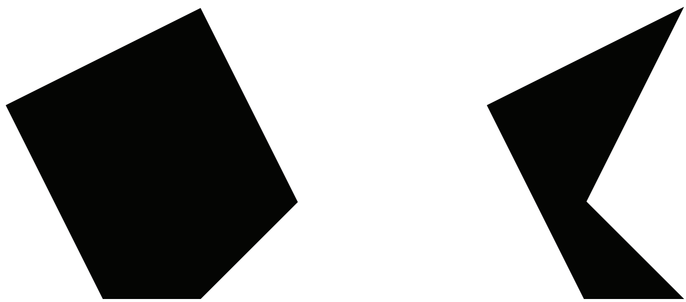
za podmínky

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \pi.$$

4. Horní odhady

4.1. Konkávní funkce

Dokázat, že součet sinů příp. kosinů bude maximální, jestliže všechny hodnoty argumentů (z jistého intervalu) budou stejné, lze různými způsoby. Můžeme využít skutečnosti, že funkce sinus je na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ konkávní. Pojďme se tedy podrobněji podívat na vlastnost, která se nazývá konkávní a konvexní. Na obr. 1 vidíme dva mnohoúhelníky. Ten vlevo je konvexní, česky vypouklý nebo vypuklý. Žádný jeho vnitřní úhel není větší než 180°, mnohoúhelník leží celý v jedné polorovině vymezené přímkou určenou libovolnou jeho stranou. Naopak ten vpravo je nekonvexní, česky vydutý. Velice neodborný popis by mohl znít, že je promáčklý dovnitř.



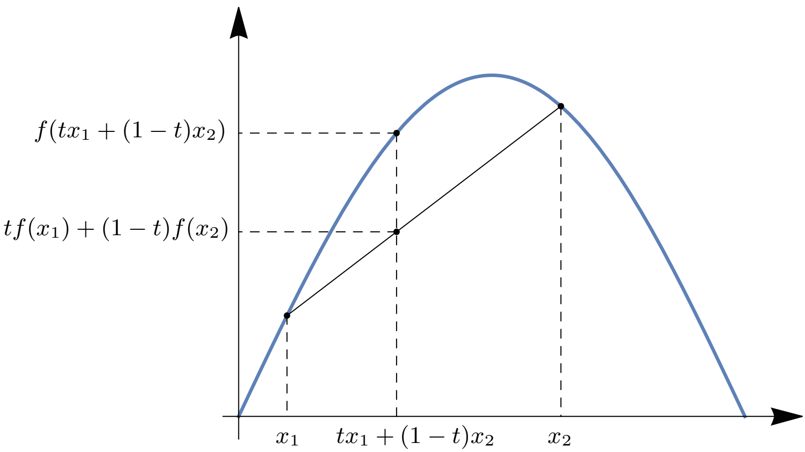
Obr. 1: Mnohoúhelník vlevo je konvexní, mnohoúhelník vpravo je nekonvexní

Pojmy konvexní a naopak konkávní zavádíme i pro grafy funkcí a odtud pro funkce samotné. Samozřejmě záleží na tom, z které strany se na graf funkce díváme. Uvažujeme část roviny nad grafem funkce. Tak např. graf funkce $y = x^2$, tedy parabolu ve tvaru jamky nazýváme konvexní, protože část roviny nad grafem není promáčklá dovnitř. Naopak graf funkce $y = -x^2$, tedy parabolu ve tvaru kopečku nazýváme konkávní.

Jako užitečnou představu uvažujme stopu motocyklisty po zasněženém parkovišti. Když má řidítka stočená doprava, bude zatáčet doprava. Tuto vlastnost křivky nazveme konkávní. Zde mlčky předpokládáme, že stopa motocyklisty je graf funkce, který kreslíme zleva doprava. Když jsou řidítka stočená doleva, bude naopak zatáčet doleva a tuto vlastnost nazveme konvexní.

Body, kde křivka přechází z konvexní do konkávní nebo naopak, nazýváme inflexní body. Toto slovo je složené z předpony in, která zde znamená opak, nepřítomnost, a ze slova flexe, které zde znamená ohyb. Tedy slovo inflexe bychom mohli volně přeložit jako bod, kde není ohyb. To nastane, pokud bude náš motocyklista otáčet řidítky zleva doprava (nebo obráceně). Pak v jednom okamžiku bude mít řidítka rovně a na jeho stopě vznikne inflexní bod.

Pro definici pojmu konkávní použijeme obr. 2. Zde vidíme graf funkce $f(x) = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Všimněte si, že když zvolíme libovolná dvě čísla $x_1 < x_2$ v tomto intervalu a spojíme body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ úsečkou, tak body grafu $(x, f(x))$ leží nad touto úsečkou (pro argumenty $x_1 < x < x_2$).



Obr. 2: Graf konkávní funkce vypadá jako čepička (anglicky cap like). Spojíme-li dva body na grafu úsečkou, pak graf leží nad touto úsečkou.

Jak to lze zapsat? Číslo x mezi čísly $x_1 < x_2$ lze zapsat

$$x = tx_1 + (1-t)x_2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Zde číslo t je parametr, který určuje, jestli bude x blíže x_1 (pro t blízké jedné) nebo blíže x_2 (pro t blízké nule). Je to vážený průměr hodnot x_1 a x_2, kde vahami jsou koeficienty t a $1-t$. Bod na grafu má souřadnice

$$(x, f(x)) = (tx_1 + (1-t)x_2, f(tx_1 + (1-t)x_2)).$$

A bod na úsečce spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ má souřadnice

$$(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2)).$$

Slovy bychom tedy mohli konkávní funkci popsat tak, že funkční hodnota průměru je větší než průměr funkčních hodnot.

To platí pro dva argumenty. Označíme-li $t_1 = t$, $t_2 = 1-t$, můžeme psát

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) \leq f(t_1 x_1 + t_2 x_2).$$

Úplnou indukcí lze dokázat, že odtud pro n argumentů za podmínky

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1, \quad t_i \geq 0$$

plyne vztah

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right).$$

To je známá Jensenova nerovnost, viz. např. [4].

Volíme-li $t_i = \frac{1}{n}$, dostaneme pro $f(x) = \sin(x)$

$$0 \leq x_i \leq \pi \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sin x_i \leq n \sin \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{11}$$

tedy vztah podobný vztahu (9), zde ovšem již s konkrétními postačujícími podmínkami. Tyto podmínky ještě rozšíříme. Zde požadujeme $0 \leq x_i \leq \pi$, protože na tomto intervalu je funkce sinus konkávní. To je jednak vidět z grafu. Vrátíme-li se k našemu přirovnání k motocyklistovi, tato část grafu funkce sinus je pravotočivá. Také to lze zdůvodnit tak, že body grafu leží nad sečnou, protože směrnice tečny je klesající, protože druhá derivace je záporná.

A pro $f(x) = \cos(x)$ dostaneme

$$0 \leq x_i \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \cos x_i \leq n \cos \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{12}$$

vztah podobný vztahu (10), zde ovšem opět s postačujícími podmínkami. Mohli bychom požadovat obecnější podmínku

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_i \leq \frac{\pi}{2},$$

protože na tomto intervalu je funkce kosinus konkávní a to je dostatečná podmínka pro použití Jensenovy nerovnosti. V dalším textu i tuto podmínku rozšíříme směrem do kladných hodnot.

Někdy pracujeme s konvexními a konkávními útvary, i když používáme jiné označení. Např. ve fotografii se vyskytuje optická vada objektivu, nazývaná soudkové zkreslení (anglicky barrel distorsion), kdy jsou původně rovné hrany obdélníku vybouleny ven. Opakem je poduškové zkreslení (anglicky pincushion distorsion), kdy jsou hrany obdélníku prohnuté dovnitř a vznikne nekonvexní množina.

4.2. Převod rozdílu na součin pro maximum sinů

Podobně jako pro dolní odhad i zde, pro horní odhad součtu sinů s výhodou použijeme převod rozdílu pravé a levé strany na součin. Pro $n = 2$ chceme dokázat nerovnost

$$\sin x_1 + \sin x_2 \leq 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$$

a odvodit podmínky, za kterých platí. Převedeme rozdíl pravé a levé strany na součin

$$2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} - (\sin x_1 + \sin x_2) = 4 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin^2 \frac{x_1 - x_2}{4},$$

abychom zjistili, kdy je kladný a kdy prochází nulou. Tento výraz bude nulový v těchto dvou případech.

1. Pro

$$\sin \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.$$

V tomto případě

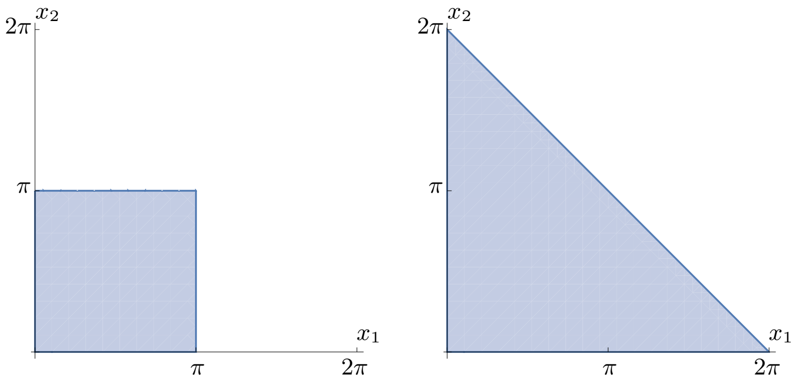
$$x_1 + x_2 = 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

To je soustava ekvidistantních klesajících přímek v rovině x_1-x_2. Tyto přímky rozdělují rovinu do pásů, ve kterých je rozdíl pravé a levé strany střídavě kladný (nerovnost platí) a záporný (nerovnost neplatí). Nás zajímá oblast platnosti v prvním kvadrantu nejblíže počátku. Spolu s podmínkami $0 \leq x_1$ a $0 \leq x_2$ nás zajímá nejvíce přímka $x_1 + x_2 = 2\pi$, protože tyto přímky ohraničují trojúhelník, na kterém platí studovaná nerovnost.

2. Součin bude dále nulový pro

$$\sin^2 \frac{x_1 - x_2}{4} = 0.$$

Tedy pro $x_1 - x_2 = 4k\pi$. To je opět soustava ekvidistantních přímek tentokráte rostoucích. Pro nás bude nejzajímavější přímka $x_1 = x_2$. Na této přímce je součin nulový, tedy bude nulový i rozdíl pravé a levé strany studované nerovnosti. Tedy pro $x_1 = x_2$ nerovnost platí, nastává rovnost, dokonce pro všechna $x_1 \in \mathbb{R}$. Protože je zde ale sinus ve druhé mocnině, nebude nikdy záporný a nenaruší platnost nerovnice, tedy neovlivní hranici platnosti vztahu.



Obr. 3: Vlevo: oblast platnosti horního odhadu součtu sinů odvozená z Jensenovy nerovnosti využitím konkávnosti funkce sinus na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$. Vpravo: oblast platnosti odvozená převodem rozdílu pravé a levé strany na součin je větší.

4.3. Převod rozdílu na součin pro maximum kosinů

Podobně jako pro maximum sinů, i pro maximum kosinů nejprve pro $n = 2$ dokážeme nerovnost

$$\cos x_1 + \cos x_2 \leq 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}$$

tak, že rozdíl pravé a levé strany převedeme na součin

$$2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} - \cos x_1 - \cos x_2 = 4 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin^2 \frac{x_1 - x_2}{4}.$$

Postupem obdobným případu pro siny dostaneme, že na přímce $x_1 = x_2$ nerovnost platí, protože platí rovnost, dokonce pro všechna $x_1 \in \mathbb{R}$. A přímka

$$x_1 + x_2 = \pi$$

ohraničuje spolu s osami trojúhelník v prvním kvadrantu, kde platí nerovnost. Tento trojúhelník je opět větší než oblast platnosti ve tvaru čtverce o straně $\frac{\pi}{2}$, kterou jsme dostali použitím Jensenovy nerovnosti z konkávnosti funkce kosinus.

4.4. Průměrování pro více sčítanců

Když se nám nepodaří pro $n = 3$ převést rozdíl pravé a levé strany na součin, jako se nám to podařilo pro $n = 2$, ani použít úplnou indukci, jako se nám to podařilo pro dolní odhad, můžeme přesto použít výsledek odvozený pro $n = 2$ a odvodit závěry i pro $n = 3$ a vyšší hodnoty metodou, kterou bychom mohli nepřesně nazvat průměrování.

Víme, že platí

$$x_1 + x_2 \leq 2\pi \Rightarrow \sin x_1 + \sin x_2 \leq 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{13}$$

Dále platí (za stálého předpokladu $x_i \geq 0$): jestliže

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2\pi,$$

pak rozhodně také platí

$$x_1 + x_2 \leq 2\pi, \quad x_2 + x_3 \leq 2\pi, \quad x_3 + x_1 \leq 2\pi.$$

Tedy můžeme v součtu

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3$$

vybrat vždy dva ze tří sčítanců a použít na ně odhad (13) a dostaneme

$$\begin{aligned}
\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \ &\leq \ 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} + \sin x_3 \\
\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \ &\leq \ 2 \sin \frac{x_2 + x_3}{2} + \sin x_1 \\
\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \ &\leq \ 2 \sin \frac{x_3 + x_1}{2} + \sin x_2.
\end{aligned}$$

Nyní tyto tři nerovnice sečteme, vydělíme třemi, odečteme průměr sinů, vydělíme zlomkem $\frac{2}{3}$ a dostaneme

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \leq \sin \frac{x_1 + x_2}{2} + \sin \frac{x_2 + x_3}{2} + \sin \frac{x_3 + x_1}{2}.$$

Po opětovném použití tohoto kroku dostaneme

$$\begin{aligned}
&\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \leq \\
&\qquad \leq \sin \frac{2x_1 + x_2 + x_3}{4} + \sin \frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4} + \sin \frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{4}.
\end{aligned}$$

Při opakování tohoto kroku se argumenty sinů blíží aritmetickému průměru

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

a vztah přechází na

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \leq 3 \sin \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

zde zatím za podmínky $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2\pi$. Tuto metodu můžeme použít i pro více sčítanců, tak dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \leq n \sin \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

zatím za podmínky

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2\pi.$$

Podrobnějším rozborem lze ukázat, že náš horní odhad pro součet sinů platí pro

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \left(1 + \frac{n}{2}\right)\pi.$$

Pro funkce kosinus lze tento postup použít přesně stejným způsobem za podmínky

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \pi.$$

A opět, podrobnějším rozborem lze ukázat, že náš horní odhad pro součet kosinů platí pro

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq x_n^*,$$

kde $x_1^* = \infty$, $x_2^* = \pi$ a pro vyšší n je x_n^* dáno průsečíkem grafu dolního a horního odhadu součtu kosinů, tedy nejmenší kladné řešení rovnice

$$n - 1 + \cos x_n^* = n \cos \frac{x_n^*}{n}.$$

Např. pro $n = 3$ z rovnice

$$2 + \cos x_3^* = 3 \cos \frac{x_3^*}{3}$$

dostaneme

$$x_3^* = 3 \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \doteq 3{,}58819.$$

4.5. Pantograf

Někdy je vhodné neuvažovat funkce sinus a kosinus samostatně, ale jako dvě složky jednoho dvousložkového vektoru

$$\boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

nebo dokonce jako reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \cos\alpha + i \sin\alpha,$$

kde i je imaginární jednotka splňující $i^2 = -1$. Tomu ještě nahrává skutečnost, že platí

$$z = \cos\alpha + i \sin\alpha = \mathrm{e}^{i\alpha}.$$

A dvousložkové vektory se dobře zakreslují v rovině.

Uvažujme tedy pro $n = 2$ naše horní odhady

$$\sin x_1 + \sin x_2 \leq 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\cos x_1 + \cos x_2 \leq 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}$$

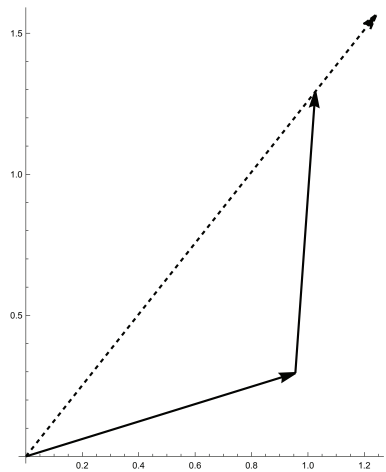
a utvořme vektory

$$\boldsymbol{v}_1 = (\cos x_1, \sin x_1)$$

$$\boldsymbol{v}_2 = (\cos x_2, \sin x_2)$$

$$\boldsymbol{v} = \left(2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2}, 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Pak levé strany těchto dvou nerovností tvoří složky vektoru $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, zatímco pravé strany tvoří složky vektoru $\boldsymbol{v}$. Obr. 4 připomínající pantograf ukazuje, že pokud dva vektory míří různým směrem, pak jejich součet nedosáhne tak daleko jako vektor mířící směrem určeným aritmetickým průměrem těchto dvou úhlů. To je zajímavá grafická interpretace studovaných nerovností.



Obr. 4: Dvojnásobek vektoru (vykreslen čárkovaně) mířícího do směru určeného průměrem dvou úhlů dosáhne dále než součet vektorů s těmito dvěma úhly

5. Dodatky

Převod rozdílu pravé a levé strany na součin

Odvodíme vztah

$$\sin x_1 + \sin x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Použitím vztahů

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

dostaneme

$$\sin x_1 + \sin x_2 - \sin(x_1 + x_2) =$$

$$= \sin x_1 + \sin x_2 - \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2 =$$

$$= \sin x_1 (1 - \cos x_2) + \sin x_2 (1 - \cos x_1) =$$

$$= \sin x_1 2 \sin^2 \frac{x_2}{2} + \sin x_2 2 \sin^2 \frac{x_1}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{x_1}{2} \cos \frac{x_1}{2} 2 \sin^2 \frac{x_2}{2} + 2 \sin \frac{x_2}{2} \cos \frac{x_2}{2} 2 \sin^2 \frac{x_1}{2} =$$

$$= 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} (\cos \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} + \cos \frac{x_2}{2} \sin \frac{x_1}{2}) =$$

$$= 4 \sin \frac{x_1}{2} \sin \frac{x_2}{2} \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Úplná indukce

Úplnou indukcí dokážeme, že za podmínky

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2\pi$$

platí

$$\sin \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i. \tag{14}$$

V hlavním textu jsme dokázali, že nerovnost (14) platí pro $n = 1$ a pro $n = 2$.

Dokážeme, že za předpokladu platnosti nerovnosti pro nějaké n tento odhad platí také pro $n + 1$. Pak bude platit pro všechna přirozená n. Přitom ještě použijeme platnost pro $n = 2$, což už máme dokázáno. Chceme tedy dokázat, že platí také

$$\sin \sum_{i=1}^{n+1} x_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} \sin x_i.$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} L = \sin \sum_{i=1}^{n+1} x_i = & \qquad \text{(roztrhneme sumu na dvě části)} \\ = \sin \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \right) \leq & \qquad \text{(použijeme předpoklad pro 2)} \\ \leq \sin \sum_{i=1}^{n} x_i + \sin x_{n+1} \leq & \qquad \text{(použijeme předpoklad pro } n\text{)} \\ \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i + \sin x_{n+1} = & \qquad \text{(spojíme sumu)} \\ = \sum_{i=1}^{n+1} \sin x_i = P. & \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

L i t e r a t u r a

[1] Smýkalová, R.: Čtyři trigonometrické nerovnosti. *Rozhledy matematicko--fyzikální*, roč. 83 (2008), č. 1, s. 1–7.

[2] Smýkalová, R.: *Goniometrické funkce v elementární matematice*. CERM, Brno, 2016.

[3] Pokorný, P.: Od numerického experimentu ke goniometrickým nerovnostem. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 84 (2009), č. 4, s. 19–23.

[4] Wikipedie: Jensenova nerovnost.
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Jensenova_nerovnost`