Lukáš Vízek

Hranolec

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 3, 174–184

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149432

HRANOLEC

Lukáš Vízek[1]

V tomto příspěvku rozebereme výpočet objemu hranolce, přesněji antihranolu[2] vzniklého z krychle, předložíme celkem tři způsoby řešení a rovněž zobecnění úlohy. Příkladem chceme čtenáře inspirovat a poskytnout mu podněty k tříbení středoškolských matematických dovedností. V závěru příspěvku přiblížíme některé didaktické aspekty studované problematiky.

Zadání úlohy zní takto: *Vypočítejte objem hranolce*[3] *vepsaného do krychle $ABCDEFGH$ o hraně velikosti* 1, *jehož podstavy tvoří trojúhelníky $S_{AB}S_{BC}S_{BF}$ a $S_{DH}S_{GH}S_{EH}$ a hrany stěn jsou $S_{AB}S_{EH}$, $S_{AB}S_{DH}$, $S_{BF}S_{EH}$, $S_{BF}S_{GH}$, $S_{BC}S_{DH}$ a $S_{BC}S_{GH}$* (obr. 1)[4].

Poznamenejme ještě, že příklad vymyslel autor tohoto článku při tvorbě nových úloh v rámci zkvalitnění předmětu *Metody řešení matematických úloh*, jež bylo podpořeno rozvojovým projektem MŠMT *Inovace didaktické přípravy v studijním oboru „Matematika zaměřená na vzdělávání“* řešeným na MFF UK v Praze.

Objem hranolce V lze určit dvojím základním způsobem. Jednak jej můžeme rozdělit na menší části a sečíst objemy obdržených těles, jednak od celé krychle můžeme „odřezat“ to, co je přebytečné.

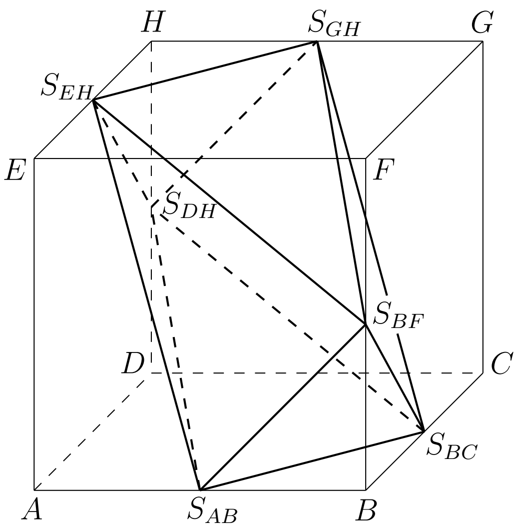
---

[1]Práce vznikla díky podpoře projektu Specifický vysokoškolský výzkum 2014–260105.

[2]Hranolcem (nebo též prismatiodem) rozumíme mnohostěn, jehož podstavy jsou rovnoběžné a jsou tvořeny libovolnými mnohoúhelníky. Jeho vlastností je, že jeho stěny jsou buďto trojúhelníky nebo lichoběžníky. Speciálními případy hranolců jsou hranoly (resp. kvádry a krychle) a komolé jehlany. Pokud tato tělesa vyloučíme, můžeme hranolec pojmenovat jako antihranol.

[3]Uvažujeme krychli o hraně 1 délkové jednotky j. Při jednotlivých výpočtech však jednotky neuvádíme, z kontextu bude zřejmé, zda jde o délku, obsah nebo objem.

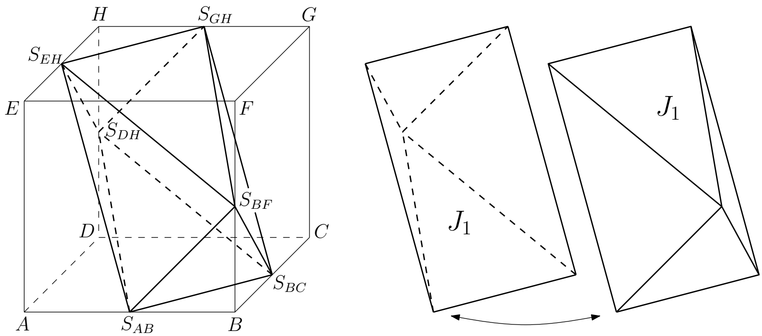
[4]S s indexem krajních bodů příslušné hrany značí její střed.



Obr. 1

1. způsob řešení

Objem hranolce získáme jako součet objemů dvou shodných jehlanů J_1 (obr. 2). Jejich podstavu tvoří obdélník $S_{AB}S_{BC}S_{GH}S_{EH}$, pro velikosti jeho stran platí $|S_{AB}S_{EH}| = |S_{BC}S_{GH}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (jedná se o vzdálenost přímek $S_{AB}S_{BC}$ a $S_{EH}S_{GH}$) a $|S_{AB}S_{BC}| = |S_{EH}S_{GH}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (jde o polovinu stěnové úhlopříčky krychle, resp. vzdálenost přímek $S_{AB}S_{EH}$ a $S_{BC}S_{GH}$). Obsah jeho podstavy je tedy roven $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Výška jehlanu J_1 je rovna vzdálenosti bodu S_{BF}, resp. S_{DH}, a roviny $S_{AB}S_{BC}S_{EH}$, má délku rovnou jedné třetině tělesové úhlopříčky krychle, tedy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Pro objem jehlanu J_1 dostaneme hodnotu $\frac{1}{6}$, celkově tedy $V = \frac{1}{3}$.



Obr. 2

2. způsob řešení

Objem hranolce rovněž obdržíme jako dvojnásobek součtu objemů jehlanů J_2 a J_3 (obr. 3). Podstavné hrany jehlanu J_2 mají délku $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (podstavu tvoří rovnostranný trojúhelník totožný s podstavou hranolce) a jeho výška je rovna $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (jedná se o vzdálenost podstav hranolce). Objem J_2 je roven $\frac{1}{12}$. Vypočítat objem jehlanu J_3 je náročnější, neboť je třeba vhodně zvolit jeho podstavu a vrchol. Jako J_3 uvažujeme jehlan $S_{AB}S_{BF}S_{DH}S_{EH}$[5]. Všimneme si, že lze vcelku snadno určit vzdálenost bodu S_{EH} od roviny $S_{AB}S_{BF}S_{DH}$; je rovna $\frac{\sqrt{3}}{3}$, jde o výšku jehlanu J_3, dále bod S_{EH} tvoří jeho hlavní vrchol a $\triangle S_{AB}S_{BF}S_{DH}$ jeho podstavu. Platí, že $|S_{AB}S_{BF}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $|S_{AB}S_{DH}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ a $|S_{BF}S_{DH}| = \sqrt{2}$. Trojúhelník $S_{AB}S_{BF}S_{DH}$ je tedy obecný, jeho obsah určíme podle Heronova vzorce. Pro obvod o tohoto trojúhelníku platí

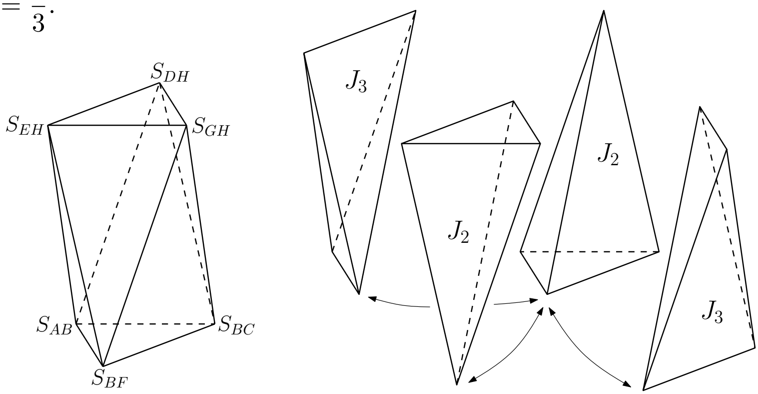
$$o = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

[5]Analogicky bychom uvažovali jehlan $S_{BC}S_{BF}S_{DH}S_{GH}$.

Jeho obsah je

$$\sqrt{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

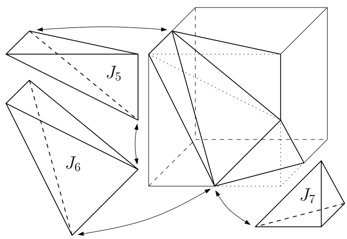
Pro objem jehlanu J_3 získáme opět $\frac{1}{12}$. Celkově tedy $V = 4\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.



Obr. 3

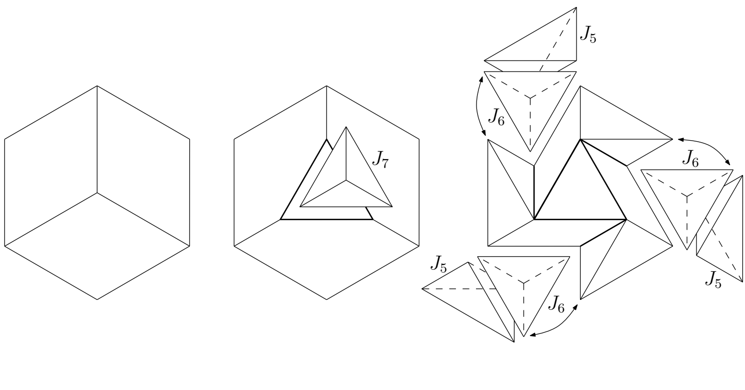
3. způsob řešení

Jako poslední způsob řešení předvedeme „odřezávací techniku“ (obr. 4). Objem hranolce vypočítáme tak, že od objemu krychle, tedy od 1, odečteme šestinásobek objemu jehlanů J_5 a J_6 a dvojnásobek objemu jehlanu J_7. Za podstavu J_5 volíme pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách délky 1 a $\frac{1}{2}$, tedy o obsahu $\frac{1}{4}$ (čtvrtina obsahu čtverce tvořícího stěny krychle). Výška jehlanu J_5 je v takovém případě rovna $\frac{1}{2}$ a jeho objem $\frac{1}{24}$. Jako podstavu J_7 uvažujeme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délky $\frac{1}{2}$. Výška jehlanu J_7 je $\frac{1}{2}$ a objem $\frac{1}{48}$. Za podstavu J_6 je vhodné zvolit rovnoramenný trojúhelník o základně $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a výšce $\frac{3}{4}\sqrt{2}$. Výška jehlanu J_6 je v tomto případě $\frac{1}{2}$ a objem $\frac{1}{16}$. Konečně $V = 1 - \frac{6}{24} - \frac{6}{16} - \frac{2}{48} = \frac{1}{3}$.



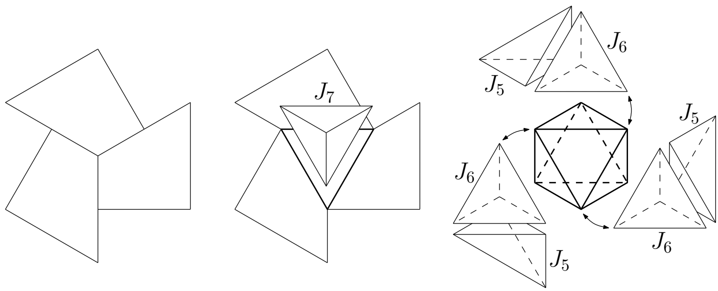
Obr. 4

Objemy jehlanů J_5, J_6 a J_7 obdržíme poměrně jednoduše. Náročnější však může být rozhodnout, kolikrát je třeba je od objemu krychle odečíst. Řešení tohoto problému lze přiblížit takto. Představme si, že krychli postavíme „na špičku“ (tj. na vrchol B nebo H) a díváme se na ni shora (neboli nárysna rovnoběžného promítání je kolmá k tělesové úhlopříčce BH). Nejprve oddělíme jehlan J_7 a následně třikrát odejmeme k sobě přiléhající jehlany J_5 a J_6 (obr. 5).



Obr. 5

Nyní otočíme „z poloviny“ ořezanou krychli „vzhůru nohama“, opět odstraníme J_7 a nakonec zbývající tři dvojice J_5 a J_6. Vzniklý hranolec pozorujeme shora (obr. 6).

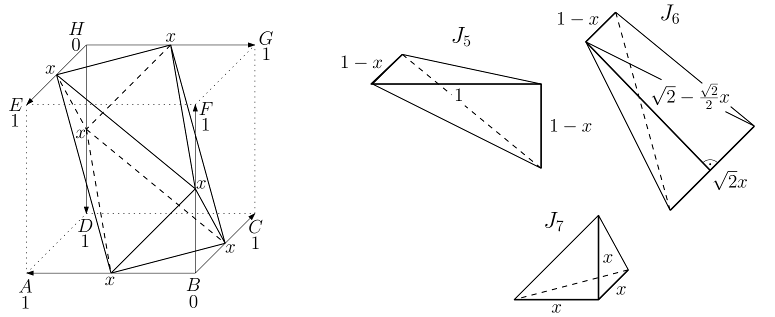


Obr. 6

Zobecnění

Předveďme nyní zobecnění úlohy. Ukažme, jak se mění objem hranolce, pokud měníme jeho výšku, resp. přibližujeme nebo oddalujeme jeho podstavy. Jejich tvar neměníme, stále je jím rovnostranný trojúhelník. Vrcholy hranolce přitom leží na příslušných hranách krychle. Jejich polohu značíme x. Za výchozí body považujeme B a H, zde $x = 0$; pokud vrcholy splynou s A, C, E, resp. D, E, G, bude $x = 1$. Hodnota x tedy vyjadřuje délku, resp. vzdálenost vrcholů jednotlivých podstav hranolce, od bodů B a H (obr. 7 vlevo). Poznamenejme, že doposud jsme uvažovali $x = \frac{1}{2}$. Chceme sestavit předpis reálné funkce $V(x)$ vyjadřující objem hranolce v závislosti na hodnotě x.

Postupujme podle výše uvedené metody „odřezávání“ (obr. 7 vpravo). Klíčem je správně určit potřebné vzdálenosti na jehlanech J_5, J_6 a J_7, následně jde o pouhé sestavení příslušných výrazů. Pro J_5 získáme objem $\frac{(1-x)^2}{6}$, pro J_6 objem $\frac{x(2-x)(1-x)}{6}$

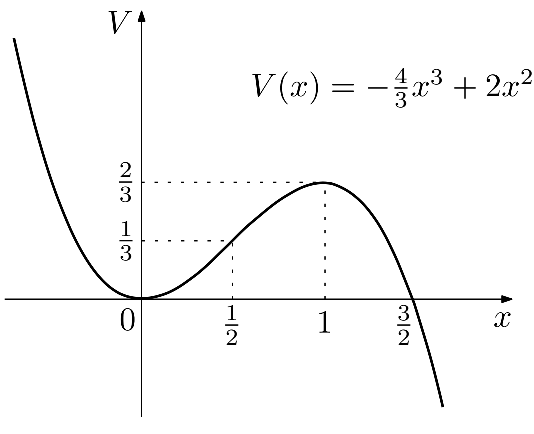


Obr. 7

a pro J_7 objem $\dfrac{x^3}{6}$. Celkově tedy platí, že

$$V(x) = 1 - 6\frac{(1-x)^2}{6} - 6\frac{x(2-x)(1-x)}{6} - 2\frac{x^3}{6} = -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2$$

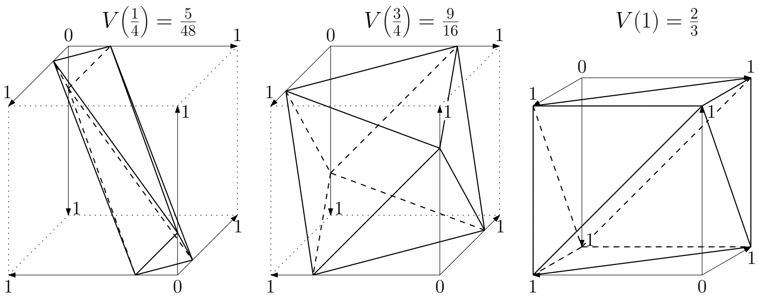
(obr. 8).



Obr. 8

Vyzdvihněme některé vlastnosti funkce $V(x)$ a dejme do souvislostí její hodnoty s tvarem hranolce, který pro příslušná x popisuje. Jedná se o polynomickou funkci třetího stupně[6], jejíž graf je středově souměrný[7] podle „našeho“, resp. inflexního bodu $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$, a prochází počátkem. Zde, resp. pro $x = 0$, se hranolec redukuje na úsečku o nulovém objemu.

Pro $x = \frac{1}{4}$ je objem roven $\frac{5}{48}$, „symetrické“ hodnotě $x = \frac{3}{4}$ odpovídá hranolec, jenž je platónským tělesem, pravidelným osmistěnem o objemu $V\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$. Konečně pro $x = 1$ obdržíme lokální maximální objem $\frac{2}{3}$ (obr. 9).



Obr. 9

[6]Polynomická funkce $V(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2$ je třetího stupně z toho důvodu, že vyjadřuje závislost objemu na délce. Člen $-\frac{4}{3}x^3$ vyjadřuje kubické jednotky, $2x^2$ však také. Musíme si uvědomit, jak jsme tento kvadratický člen obdrželi. Jeho koeficient 2 v podstatě není bez rozměru, je v délkových jednotkách.

[7]Tuto vlastnost funkce snadno dokážeme; platí totiž, že $V = \frac{2}{3} - V(1-x)$.

Můžeme rovněž studovat hodnoty funkce $V(x)$, jež odpovídají situacím, kdy vrcholy hranolce leží mimo krychli, tedy na prodloužení jejích hran. Pro $x = \frac{3}{2}$ prochází graf $V(x)$ osou x, hranolec má nulový objem, neboť se redukuje do židovské hvězdy, resp. jeho podstavy mají nulovou vzdálenost. Pro[8] $x > \frac{3}{2}$ nebo $x < 0$[9], se hranolec převrátí a jeho objem roste nade všechny meze[10].

Závěr

Zhodnoťme nejprve jednotlivé přístupy k řešení úlohy[11]. Domníváme se, že první a třetí postup je časově nejméně náročný a v porovnání s druhým jsou oba pravděpodobně nejefektivnější. První využívá nejjednodušší rozdělení hranolce (pouze na dvě shodné části) a jako jediné „úskalí“ má určení výšky uvažovaného jehlanu J_1[12]. Druhý způsob výpočtu představuje podle našeho názoru pěkné „čisté“ rozdělení hranolce na čtyři (po dvou shodné) jehlany, musíme však přiznat, že výpočet objemu J_3 není úplně nejjednodušší. Obtížné je efektivně určit jeho podstavu, resp. výšku. Třetí přístup k řešení je obtížný v určení správného počtu odřezávaných jehlanů J_5 a J_6, je náročnější na prostorovou představivost. Výpočet dílčích objemů jehlanů je však poměrně triviální.

Pokud bychom měli uchopit studovaný problém z didaktického hlediska, mohli bychom jej popsat jako středoškolskou mate-

[8]Zde bychom uvažovali funkci absolutní hodnota $V(x)$.

[9]Zde vzdálenost vrcholů jednotlivých podstav hranolce od bodů B a H krychle vyjadřuje $|x|$.

[10]V případě zájmu může čtenář tyto případy samostatně prozkoumat, doporučujeme si načrtnout hranolce pro (zajímavé) hodnoty $x = -1$ a $x = 2$.

[11]Autor vychází z vlastního (subjektivního) vnímání a rovněž ze zkušeností s prezentováním problému posluchačům Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze. Předkládanou úlohu zařadil do programu svého kurzu *Kuriózní matematické úlohy* v rámci Prázdninové školy pro učitele matematiky a fyziky (1. 7. a 15. 8. 2014) a přednášky *Kuriózní úlohy* Didakticko-historického semináře Katedry didaktiky matematiky (7. 10. 2014).

[12]Pro výpočet výšky uvažovaného jehlanu J_1 můžeme použít buďto prostředků „klasické“ středoškolské stereometrie (jedná se o jednu ze základních metrických úloh v krychli) nebo analytické geometrie.

matickou úlohu založenou především na poznatcích ze stereometrie. Řadili bychom ji k tématu objemy, resp. povrchy těles, jež bývá v školských kurikulech uvedeno právě po geometrii v prostoru a jež je v současných učebních textech pro SŠ zařazeno ve stejném sledu[13]. Zobecnění úlohy, objevení vyjádření závislosti objemu hranolce na jeho tvaru posunuje problém ke studiu průběhu funkce, jež bychom zde efektně vyřešili užitím diferenciálního počtu. Za přínos popsaného rozšíření úlohy také považujeme „zviditelnění“ funkce na konkrétní situaci v prostoru.

Hmatatelnou, myšleno geometrickou, interpretaci analytického tvaru funkce vnímáme jako velice přínosnou pro školskou matematiku. Dovolujeme si závěrem vyjádřit naději, že tímto příspěvkem můžeme inspirovat k objevování analogických problémů vedoucích vedle tříbení početních a stereometrických dovedností i k hledání zajímavých souvislostí mezi jednotlivými oblastmi naší královny věd.

Literatura

[1] Kadleček, J. (1996). *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy*. Praha: Prometheus.

[2] Odvárko, O., et al. (1996). *Matematika pro SOŠ a SOU, 3. část*. Praha: Prometheus.

[3] Petáková, J. (1998). *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus.

[4] Polák, J. (1999). *Středoškolská matematika v úlohách II*. Praha: Prometheus.

[5] Pomykalová, E. (2009), *Matematika pro gymnázia. Stereometrie*. Praha: Prometheus.

[13] Ve studovaných učebnicích nalezneme jmenovaný tematický celek na následujících stranách: (Kadleček, 1996), str. 147–241, (Odvárko, 1996), str. 170–193, (Petáková, 1998), str. 95–98, (Polák, 1999), str. 313–320, (Pomykalová, 2009), str. 123–188.

Abstract

The article describes a stereometry problem that deals with volume of the antiprism inscribed in cube, followed by generalization of the problem. Thus the question is transformed into studying function of volume of the antiprism. The paper concludes of various solutions and the example given is set in the context of high school mathematics.

Lukáš Vízek
KDM MFF UK v Praze
Sokolovská 83
186 75, Praha 8