Michaela Klepancová; Dana Smetanová

Nekonečné rady a ích vizualizácia

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 4, 193–205

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149434

NEKONEČNÉ RADY A ICH VIZUALIZÁCIA

Michaela Klepancová, Dana Smetanová

Nekonečno, či už v potenciálnej alebo aktuálnej podobe, je bez pochybností jeden z ústredných pojmov matematiky. V rámci rôznych matematických disciplín uvažujeme o nekonečne vždy tak z trochu iného hľadiska. V každej z týchto disciplín vystupujú do popredia iné z jeho prejavov či atribútov. O nekonečne môžeme uvažovať napríklad v kontexte mohutnosti alebo usporiadania množiny, nekonečného procesu či konvergencie. Porozumenie pojmu nekonečno, jeho jednotlivých prejavom či „podobám“ predpokladá u každého jedinca značnú mieru kognitívnej vyspelosti. Najmä z tohto dôvodu je vo vyučovacom procese pojem nekonečna zdrojom mnohých prekážok či ťažkostí pri osvojovaní si a dôkladnom pochopení rôznych matematických konceptov súvisiacich s týmto pojmom. Zrejme aj preto sú otázky spojené s výučbou tejto problematiky predmetom záujmu mnohých pedagogických výskumov či štúdií.

S nekonečnom v „explicitnej podobe“ sa študenti po prvýkrát (najčastejšie už na strednej škole) stretávajú v súvislosti s pojmom nekonečná číselná postupnosť či súčet nekonečného (geometrického) číselného radu. Prax mnohých pedagógov či závery viacerých štúdií (Eisenmann, 2002; Sierpinska, 1987) poukazujú na viaceré ťažkosti týchto študentov (najmä študentov stredných škôl či prvých ročníkov univerzitného štúdia, teda študentov na istom stupni (ešte neukončeného) mentálneho vývoja) s dôkladným pochopením pojmu súčet nekonečného radu. Z pedagogických výskumov zameraných na skúmanie predstáv študentov (15–17 rokov) o nekonečne a nekonečných radoch, vyplýva, že študenti v tomto veku ešte nie sú schopní prijať tézu, že nekonečný rad by mohol mať konečný súčet. (Sierpinska, 1987; Cornu, 1991; Williams, 1991; Monaghan, 2001; Eisenmann 2002; Gunčaga et al, 2008)

Uveďme niekoľko odpovedí študentov gymnázia, ktorí boli vyzvaní, aby sa pokúsili určiť súčet nekonečného radu (Eisenmann, 2005).

„To sa nedá, veď to ‚ide' do nekonečna. ‚To' nemá koniec, teda ani súčet . . . " (Ivan, 16 rokov)

„Nemôžem sčítať nekonečný počet čísel, vždy musím pripočítať ďalšie a ďalšie, stále donekonečna . . . " (Marta, 17 rokov)

„. . . ale keď pripočítam ďalšie a ďalšie číslo, rastie to do nekonečna . . . " (Ondrej, 16 rokov).

O podobných ťažkostiach svedčia aj odpovede študentov na otázku: „Platí $0{,}\overline{9} < 1$ alebo $0{,}\overline{9} = 1$?", ktorú kládli študentom autori viacerých štúdií či výskumných sond (Sierpinska, 1987; Richman, 1999; Eisenmann, 2005).

Anna Sierpinska v tejto súvislosti uvádza reakciu študentky Ewy, ktorá nasledovala po tom, čo bol v jej triede odprezentovaný korektný matematický dôkaz rovnosti $0{,}\overline{9} = 1$.

„Matematicky alebo algebricky je to tak . . . je to v poriadku, ale v skutočnosti to bude veľmi blízko jednotky, ale nikdy sa to nebude rovnať jednej. Vždy tam bude malý, . . . , veľmi malý rozdiel . . .
To je ako hyperbola a jej asymptota . . . nikdy sa nedotknú . . . Rozdiel medzi nimi sa bude stále zmenšovať, ale nikdy nebude nulový." (Sierpinska, 1987)

Aj napriek tomu, že Ewa pripúšťa, že dôkaz je matematicky správny, nemal žiadny vplyv na jej „presvedčenie" založené na intuícii. Aj táto reakcia Ewy je ukážkou toho, aké stále a odolné sú mylné intuitívne predstavy študentov a ako ťažko podliehajú zmenám aj pod vplyvom vyučovacieho procesu.

Ako potvrdzujú uvedené štúdie, prax mnohých pedagógov, ale aj naše vlastné skúsenosti, podobné nesprávne intuitívne predstavy o pojme súčet nekonečného radu, žiaľ, nie sú zriedkavé. Stretáme sa s nimi nielen u stredoškolákov, ale aj u „čerstvých" univerzitných študentov. S argumentáciu, resp. výrokmi typu „číslo $0{,}\overline{9}$ sa približne rovná 1", „blíži sa k 1, ale nie je to presne 1" sa často stretávame aj u študentov 1. ročníka učiteľstva matematiky, najmä počas výučby predmetu matematická analýza.

Domnievame sa, že v súvislosti s úlohou vypočítať súčet nekonečného radu spôsobuje študentom najväčšie ťažkosti nutnosť uvažovať o množine členov radu, ktoré „treba spočítať“ už ako o aktuálne nekonečnej množine. No pritom intuitívne predstavy študentov sú často viazané iba na chápanie potenciálne nekonečného procesu obsiahnutého v tejto úlohe.

Ďalšou prekážkou, ktorej študenti čelia v súvislosti s touto problematikou, je podľa nás stotožňenie pojmov nekonečný a neohraničený, o čom svedčia výroky ako „... ale keď pripočítam ďalšie a ďalšie číslo, rastie to do nekonečna...“. Predstava študentov totiž často zodpovedá presvedčeniu Zenóna[1] a starých Grékov, že súčet nekonečného počtu sčítancov nemôže byť konečné číslo. Jednou z možností, ako týmto študentom ukázať (ešte predtým, než im sprostredkujeme základné informácie o súčte nekonečného radu), že ich intuitívne predstavy nie sú správne a súčet nekonečného počtu kladných čísel môže byť ohraničený a výsledkom nemusí byť vždy len „nekonečno“, je využitie „vhodných“ ilustrácií či obrázkov, nazývaných či označovaných aj ako „dôkazy bez slov“.

Roger B. Nelson (autor knihy *Proofs without words*) charakterizuje „dôkazy bez slov“ ako obrázky, schémy či diagramy, ktoré umožnia „vidieť“, prečo môže byť nejaké matematické tvrdenie pravdivé či môže poskytnúť istý návod, ako uvažované matematické tvrdenie aj formálne dokázať. Zámerom „dôkazov bez slov“ je sprostredkovanie istej matemetickej myšlienky čisto vizuálnym spôsobom, nanajvýš s použitím symboliky. Vysvetlenie, interpretácia či zdôvodnenie platnosti uvažovaného tvrdenia na základe jeho vizuálnej reprezentácie je už ponechaná na konkrétnom jednotlivcovi.

Domnievame sa, že prostredníctvom takýchto vizuálnych reprezentácií súčtu nekonečného radu je možné názorným spôsobom „presvedčiť“ študentov, že súčet nekonečného počtu sčítancov nemusí byť nekonečný, ale môže byť ohraničený konečným reálnym číslom resp. že aj sčítaním nekonečného počtu (kladných) čísel môžeme dostať konečný výsledok, konečné reálne číslo.

[1]Zenón z Eley (490–430 p. n. l.), autor známych Zenónových apórií, z ktorých medzi najznámejšie patria Dichotómia a Achilles a korytnačka.

Bardelle (Bardelle, 2010) však upozorňuje na skutočnosť, že niektorí študenti môžu mať problém s interpretáciou grafickej reprezentácie procesu (nie nevyhnutne nekonečného), a to najmä s určením správneho poradia konštrukcie jednotlivých krokov, čo vedie k nepochopeniu danej ilustrácie. Podľa nášho názoru môže byť práve tento problém eliminovaný použitím dynamickej vizuálnej reprezentácie takýchto procesov, napríklad vo forme apletov. Pretože dynamický aplet umožňuje zobraziť proces konštrukcie krok po kroku, je možné použiť ho aj na vizualizáciu takých nekonečných procesov, pri ktorých by konštrukcia jednotlivých krokov nebola taká zrejmá zo statického obrázka či ilustrácie.

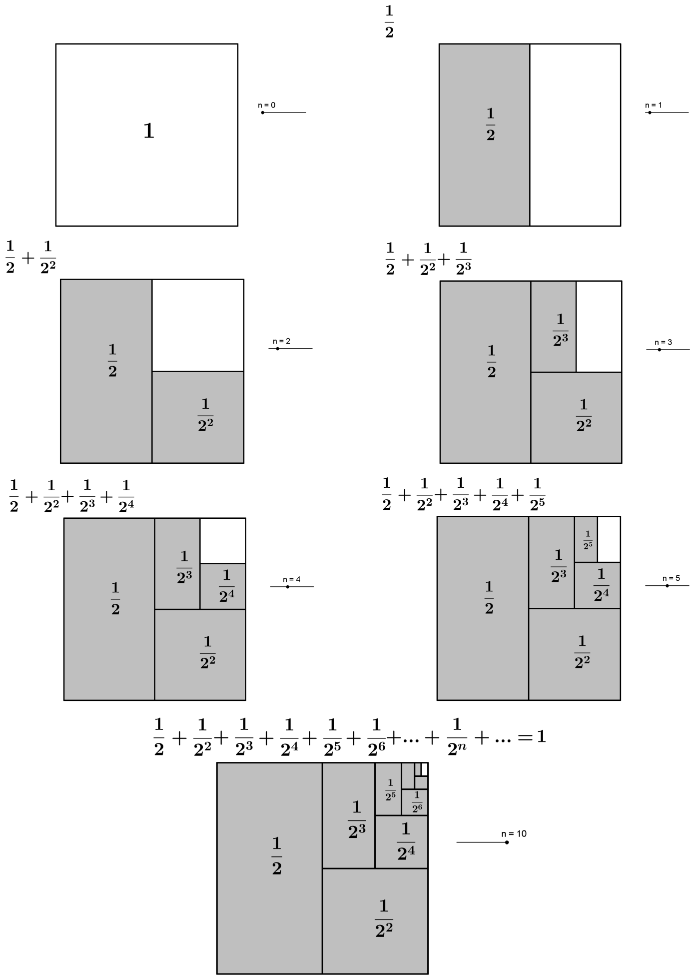
S cieľom odstrániť či „skorigovať" mylné intuitívne predstavy našich študentov (toho času študentov 1. ročníka učiteľstva matematiky) o pojme súčet nekonečného radu, sme sa na základe uvedených dôvodov rozhodli v softvéri Geogebra vytvoriť súbor apletov, predstavujúcich vizuálne reprezentácie súčtu viacerých nekonečných radov.

V článku uvádzame ukážky niektorých apletov, reprezentujúcich súčty nekonečných geometrických radov. Myslíme si, že ich zaradenie do výučby už na strednej škole v rámci propedeutiky súčtu nekonečného (najmä geometrického) radu môžu študentom pomôcť prekonať isté ťažkosti, ktorým čelia v súvislosti s touto problematikou.

Vizuálna reprezentácia súčtu niektorých geometrických radov

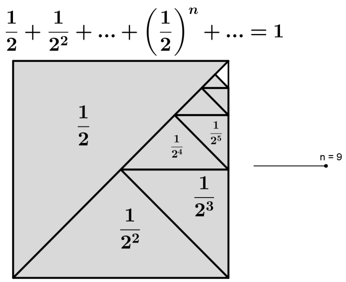
Rad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Zostrojme štvorec s dĺžkou strany $a = 1$. Rozdeľme ho na dva rovnaké obdĺžniky, ich obsahy zrejme budú $\frac{1}{2}$. Vyberme si jeden z nich, a opäť ho rozdeľme na dve rovnaká časti – tento raz to budú štvorce s obsahmi $\frac{1}{4}$. Zvoľme si jeden z nich a rozdeľme ho na dva rovnaké obdĺžniky, ich obsahy budú $\frac{1}{8}$. Nekonečným pokračovaním v tomto procese by sme zrejme vyplnili celý základný štvorec, ktorého obsah je $S = 1$. Prirodzeným záverom je teda tvrdenie, že $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$ (obr. 1).



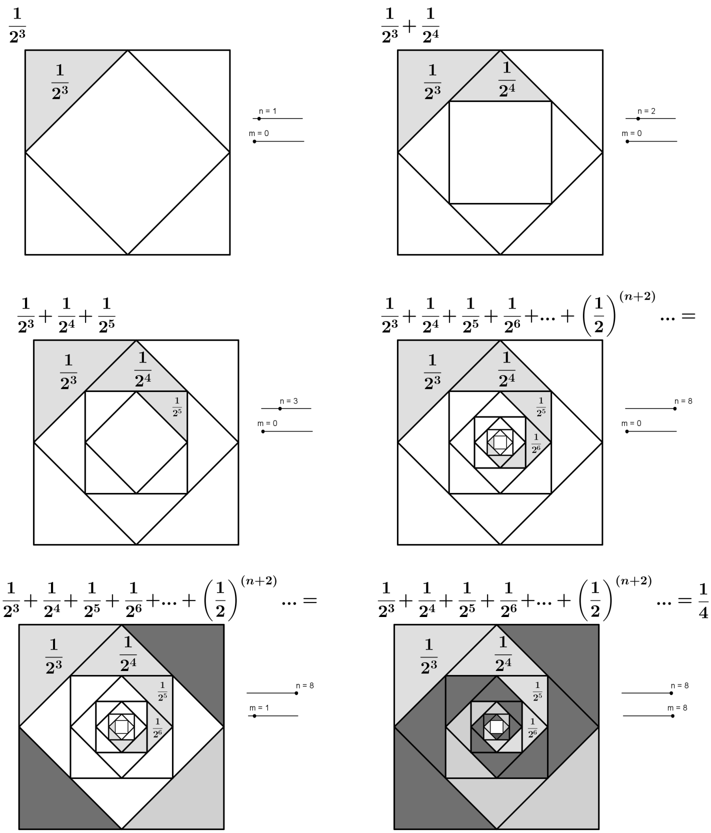
Obr. 1: Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Vyskúšajme si, že tento výsledok dostaneme nezávisle od toho, akým spôsobom spomínaný štvorec „rozkrájame“. Zoberme si teda opäť štvorec so stranou $a = 1$. Rozdeľme ho uhlopriečkou na dve časti – tými budú dva pravouhlé trojuholníky s obsahmi $\frac{1}{2}$. Vyberme si jeden z nich a výškou na preponu ho rozdeľme na ďalšie dva zhodné pravouhlé trojuholníky, ich obsahy zrejme budú $\frac{1}{4}$. Zoberme jeden z nich a výškou na preponu ho rozdelíme na dva pravouhlé trojuholníky, tento raz s obsahmi $\frac{1}{8}$. Ak by sme v tomto procese pokračovali do nekonečna (obr. 2), zjednotením všetkých takto získaných trojuholníkov dostaneme pôvodný štvorec, preto sčítaním obsahov všetkých týchto pravouhlých trojuholníkov dostaneme obsah daného štvorca. Opäť teda môžeme písať $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots=1$.



Obr. 2: Rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pridajme – už bez tradičného detailného rozboru – ešte jeden pohľad na rad $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$ Znova si pomôžme štvorcom, tradične so stranou $a=1$. Nájdime stredy jeho strán, a ich spojením získame ďalší štvorec, pričom budeme v tomto procese stále pokračovať. Potom je z obrázka 3 zrejmé, že platí $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+$ $+\dfrac{1}{32}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+2}}+\cdots=\dfrac{1}{4}$. Doplnením prvých dvoch členov radu ľahko dostávame $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+2}}+\ldots\right)=$ $=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=1$.

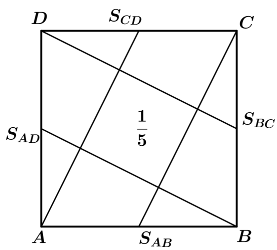


Obr. 3: Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

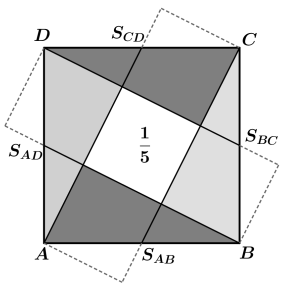
Doterajšie úvahy nám začínajú naznačovať, že súčtom nekonečného počtu kladných sčítancov skutočne môže byť konečné reálne číslo. Ukážme ďalej, že rad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ nemá žiadne „výsadné“ postavenie – že k rovnakému záveru možno prísť pri veľkom množstve ďalších nekonečných číselných radov. Samozrejme, kvôli názornosti si opäť môžeme pomôcť jednoduchými obrázkami.

Rad $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{125}+\cdots+\dfrac{1}{5^n}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Opäť uvažujme štvorec so stranou $a = 1$. Spojením stredov strán tohto štvorca s protiľahlými vrcholmi (obr. 4a) získame štyri zhodné pravouhlé trojuholníky a menší štvorec, pričom je zrejmé (obr. 4b), že obsah každého z týchto útvarov sa rovná pätine obsahu pôvodného štvorca.

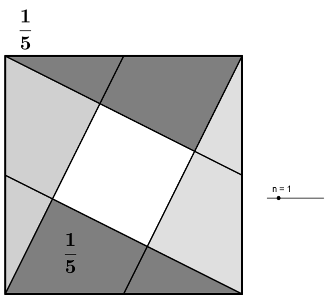


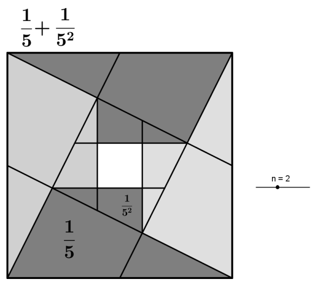
Obr. 4a

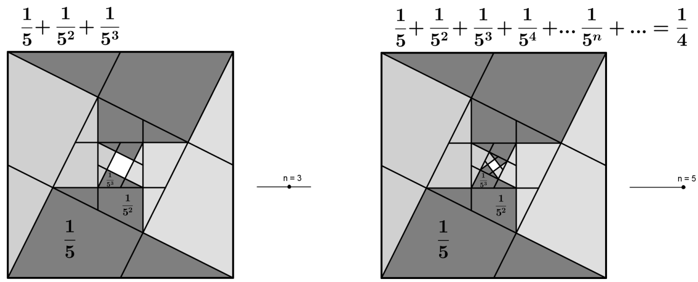


Obr. 4b

Spôsob, akým môžeme pokračovať v delení každého „novovzniknutého“ menšieho štvorca a tak získať rovnosť $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+ \dfrac{1}{125}+\cdots+\dfrac{1}{5^n}+\cdots=\dfrac{1}{4}$ je už evidentný z obr. 5.







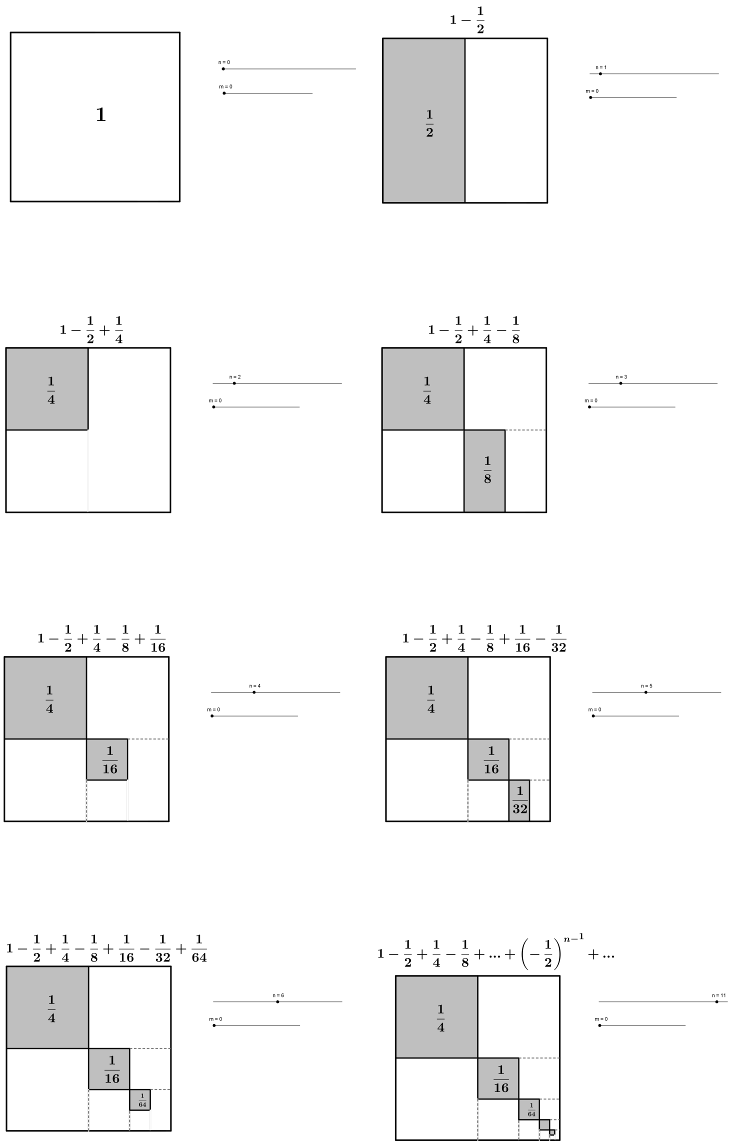
Obr. 5: Rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

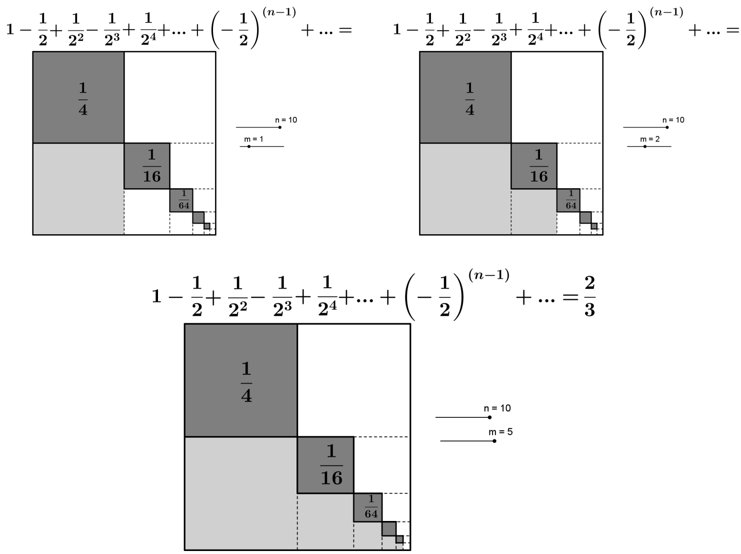
Vizuálne reprezentácie geometrických radov so striedavými znamienkami

Doteraz sme kládli dôraz – na zvýraznenie skutočnosti, že súčtom nekonečného počtu sčítancov môže byť konečné číslo – len na súčet kladných čísel. Zamyslime sa v ďalšom aj nad všeobecnejším problémom: môžeme byť súčtom nekonečného počtu kladných a záporných sčítancov nejaké konečné číslo? Pozrime sa aj na túto otázku geometrickým pohľadom.

Rad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Na úvod zvoľme rad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$, pri jeho skúmaní totiž môžeme využiť jeden z našich predošlých obrázkov. Znovu zostrojíme štvorec so stranou $a=1$, a budeme ho deliť spôsobom opísaným na obr. 6. Napriek tomu náš pohľad bude odlišný – zatiaľ čo v predchádzajúcich prípadoch sme si všímali vyfarbené útvary, teraz nás bude zaujímať práve doplnok tejto časti. Práve tieto nevyfarbené útvary (resp. svetlosivé útvary) napokon vytvoria z obsahu pôvodného štvorca dvojtretinovú časť, teda môžeme písať $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}$.


1
n = 0
m = 0
$1-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
n = 1
m = 0
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$
n = 2
m = 0
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$
n = 3
m = 0
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{16}$
n = 4
m = 0
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{32}$
n = 5
m = 0
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{64}$
n = 6
m = 0
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{64}$
n = 11
m = 0



Obr. 6: Rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Záver

Jednou z prekážok, ktorej študenti čelia v súvislosti s pojmami konvergencia a súčet nekonečného radu, je podľa nás stotožnenie pojmov nekonečný a neohraničený, o čom svedčia výroky ako *„... ale keď pripočítam ďalšie a ďalšie číslo, rastie to do nekonečna...“*. Na základe našich skúseností sme sa presvedčili, že zaradenie „vhodných“ ilustrácií či obrázkov, nazývaných aj ako *„dôkazy bez slov“* počas výučby pojmu súčet nekonečného radu (a to najmä v rámci propedeutiky tohto pojmu) umožňuje efektívne pomôcť študentom uvedenú prekážku prekonať. Spracovanie týchto vizuálnych reprezentácií súčtov nekonečných radov vo forme dynamických apletov naviac umožňuje používať pri výučbe aj také *„dôkazy bez slov“*, ktorých interpretácia by bola zo statického obrázka pomerne náročná.

V článku uvedené grafické reprezentácie súčtu nekonečného geometrického radu s kvocientom $\frac{1}{2}$ sú všeobecne známe. Na základe tejto inšpirácie sme vo forme apletov vytvorili grafické reprezentácie súčtu ďalších nekonečných radov, a to najmä nekonečných geometrických radov s kladnými či zápornými kvocientmi. Ako ukážku z nich sme v článku zvolili reprezentácie súčtu nekonečných geometrických radov s kvocientmi $\frac{1}{5}$ a $-\frac{1}{2}$. Pri používaní „dôkazov bez slov“ počas výučby pojmov konvergencia nekonečného radu a jeho súčet sa samozrejme nemusíme obmedzovať iba na grafické reprezentácie súčtu nekonečných geometrických radov. Pomocou názorných grafických reprezentácií sa nám podarilo na intuitívnej úrovni „presvedčiť“ študentov aj o konvergencii niektorých iných typov nekonečných radov, a to najmä teleskopických nekonečných radoch či Riemannovho radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$.

Literatura

[1] Bardelle, C. (2010). Visual proofs: An experiment. In CERME 6 – *Proceedings of Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (251–260). Dostupné z `http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/cerme6.pdf`

[2] Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (153–165). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[3] Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that $0{,}999\cdots < 1$? *The teaching of mathematics*, 11(1), 35–40.

[4] Gunčaga, J., Fulier, J. & Eisenmann, P. (2008). *Modernizácia a inovácia vyučovania matematickej analýzy.* Ružomberok: KU.

[5] Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 48(2–3), 239–257.

[6] Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words.* Washington: MAA Service Center.

[7] Richman, F. (1999). Is $0{,}999\cdots = 1$?. *Mathematics Magazine*, 72(5), 396–400.

[8] Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371–387.

[9] Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 219–236. Dostupné z `http://www.jstor.org/discover/10.2307/749075?uid=3739024&uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21102295043697`

Abstract

Understanding the concept of infinity, which is one of the fundamental concepts of mathematics, assumes significant degree of cognitive maturity of every individual. For this reason this concept is a source of many obstacles and difficulties in a teaching process. Students meet for the first time with the notion of infinity in an explicit form in connection with the concept of convergence of sequences and series. As confirmed by several studies, many practicing teachers or our own experience, the concept of the sum of infinite series belongs to difficult and problematic ones. In our opinion, one of the obstacles that students face in relation to the concepts of convergence and the sum of the infinite series is confusion of meanings of terms infinite and unbounded. The contribution presents several visual representations of the sum of infinite series, which may help students to overcome some difficulties related to the thorough understanding of this concept.

Michaela Klepancová
Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích
Okružní 517/10
370 01 České Budějovice
e-mail: klepancova@mail.vstecb.cz

Dana Smetanová
Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích
Okružní 517/10
370 01 České Budějovice
e-mail: smetanova@mail.vstecb.cz