Lukáš Vízek
Řešení trojúhelníku

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 4, 226–234

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149438

ŘEŠENÍ TROJÚHELNÍKU

Lukáš Vízek[1]

Tímto článkem autor navazuje na svůj příspěvek *Výuka sinové a kosinové věty v souvislosti se shodností trojúhelníků* (Vízek, 2013) na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky 2013[2]. Po stručném připomenutí zde prezentované didaktické koncepce se podrobněji věnuje zpracování problematiky v českých středoškolských učebnicích, porovnává studijní texty současnosti a poslední třetiny 19. století[3], čímž chce podložit svůj přístup k problematice a rovněž umožnit čtenáři inspirovat se ve více než sto let starých knihách.

Ve zmiňované přednášce autor vycházel ze svých zkušeností s vyučováním matematiky na gymnáziu[4]. Jako dobrý didaktický koncept, myšleno v praxi osvědčený způsob výuky, předložil řešení obecného trojúhelníku[5], jehož pointou je přímé navázání na planimetrická tvrzení o shodnosti trojúhelníku. Metodicky v něm postupujeme takto: Nejprve rozhodneme, podle jaké věty o shodnosti, tedy *usu*, *Ssu*, *sss* a *sus* je daný trojúhelník určen, následně usoudíme, zdali při řešení využijeme sinovou nebo kosinovou větu. Konkrétně rozlišujeme následující čtyři případy.

[1]Práce vznikla na Katedře matematiky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové díky podpoře projektu specifický vysokoškolský výzkum v roce 2014 č. 2101/04410.

[2]Konference se konala na PedF UK v Praze ve dnech 14. a 15. února 2013.

[3]Po zrovnoprávnění českého a německého jazyka v roce 1848 postupně došlo v našich zemích k zavedení výuky v mateřštině na středních školách. Díky tomu zásadně vzrostla poptávka po českých učebnicích, jež byla naplněna v poslední třetině 19. století. Studované práce (Jandečka, 1865), (Šanda, 1870) a (Strnad, 1893) představují jedny z nejstarších českých učebnic matematiky pro střední školy obsahujících trigonometrii. Historií školské soustavy a vývojem metodiky vyučování matematice se podrobně zabývá práce (Mikulčák, 2010).

[4]V letech 2010 až 2013 působil na Gymnáziu Nový Bydžov.

[5]Řešením trojúhelníku je v tomto článku i v práci (Vízek, 2013) rozuměna úloha: Vypočítejte velikosti zbývajících stran, resp. vnitřních úhlů trojúhelníku, jsou-li zadány velikosti některých stran, resp. vnitřních úhlů.

Věta *usu*

Trojúhelníky, jež mají stejnou velikost jedné strany a dvou úhlů k ní přilehlých, jsou shodné. V důsledku tohoto tvrzení jsou zbývající strany a úhel určeny jednoznačně[6]. Jejich velikost lze vypočítat užitím sinové věty, je-li např. v $\triangle ABC$[7] dáno c, α, β, potom $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ a pro a platí

$$a = \frac{c}{\sin\gamma} \cdot \sin\alpha.$$

Věta *Ssu*

Z věty *Ssu* plyne, jestliže jsou známé velikosti dvou stran a úhlu proti větší z nich, potom jsou třetí strana i zbývající úhly určeny jednoznačně. Dále (podle příslušných planimetrických tvrzení) platí, že zadaný úhel má největší velikost, resp. neznámé úhly jsou určitě ostré. Je-li v $\triangle ABC$ dáno a, c, α, lze potom psát

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{a} \cdot c\right),\ \gamma \in (0^\circ, 90^\circ).$$

Následně se do 180° dopočítá úhel β a velikost strany b se určí pomocí sinové věty z předchozí situace.

Věta *sss*

V důsledku věty *sss* jsou jednoznačně určeny takové trojúhelníky, jež jsou zadány velikostmi všech jejich stran. Podle kosinové věty např. pro úhel α platí

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right).$$

Jelikož je funkce kosinus v intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$ prostá, je úhel α určen jednoznačně. K výpočtu druhého úhlu se buďto znovu užije

[6] Zbývající úhel je jednoznačně určen rovněž podle věty o součtu velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku.

[7] V celém článku je uvažováno obvyklé značení vrcholů, stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

kosinová věta nebo se postupuje podle sinové věty. V druhém jmenovaném případě je však účelné počítat nejprve úhel proti menší straně, který je určitě ostrý.

Věta *sus*

Je-li trojúhelník zadán dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným, jsou velikosti zbývající strany a úhlů určeny jednoznačně v důsledku věty *sus*. Je-li v $\triangle ABC$ známé a, b, γ, pak podle kosinové věty platí

$$c = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma}.$$

Dále se postupuje obdobně jako v předchozím případě.

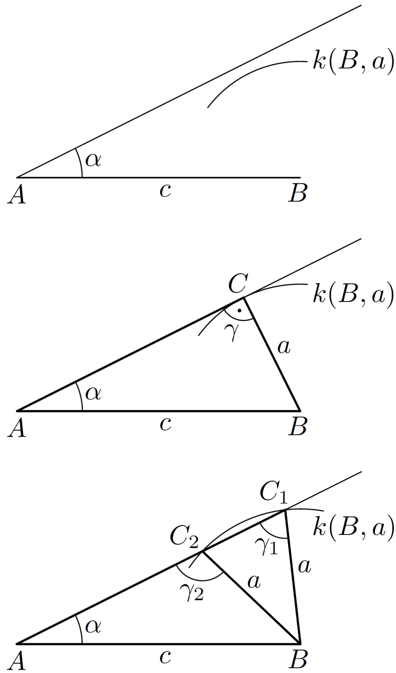
Úhel proti menší straně

Za náročnější považuje autor řešení trojúhelníku zadaného dvěma stranami a úhlem proti menší z nich. Zde je možné postupovat obdobně, jako u trojúhelníku určeném podle věty *Ssu*. Je-li v $\triangle ABC$ dáno a, c, α $(a < c)$, potom pro úhel γ platí rovnost

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot c.$$

Obecně mohou nastat tři případy: $\sin\gamma > 1$, $\sin\gamma = 1$ a $0 < \sin\gamma < 1$, jež je účelné dát do souvislosti s tím, jak bychom postupovali konstrukčně (obr. 1). V prvním případě není možné $\triangle ABC$ sestrojit, druhý odpovídá pravoúhlému trojúhelníku s přeponou c a poslední dvěma řešením, trojúhelníku ABC_1 a ABC_2, kde $\gamma_1 \in (0°, 90°)$, $\gamma_2 \in (90°, 180°)$ a kde díky vlastnostem funkce sinus platí, že $\gamma_2 = 180° - \gamma_1$.

Při tomto zadání můžeme rovněž využít kosinovou větu ve tvaru $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Chápeme ji jako kvadratickou rovnici $b^2 - 2bc\cos\alpha - a^2 + c^2 = 0$ s neznámou b. Její diskriminant D je roven $4a^2 - 4c^2\sin^2\alpha$, výše popsaným třem případům odpovídá $D < 0$, $D = 0$ a $D > 0$, resp. různý počet reálných kořenů (délek strany) b.



Obr. 1

Poznámky k současným učebnicím trigonometrie

V následující analýze středoškolských učebnic obsahujících trigonometrii bude věnována pozornost tomu, jakým způsobem je v nich odkazováno na planimetrii a jak je v nich vyloženo řešení zejména takových trojúhelníků, jež jsou zadány dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich.

V elektronické učebnici (Krynický, 2010)[8] v části *Trigonometrie* nejsou věty o shodnosti trojúhelníků vůbec zmíněny a také není dáno do souvislosti početní řešení trojúhelníku s jeho konstruováním. Kapitola 4.4.1 *Sinová věta* obsahuje řešený příklad č. 6 o trojúhelníku daném podle věty *Ssu*:

[8] Tuto učebnici lze v současné době považovat za nejnovější.

V trojúhelníku jsou dány dvě strany (o velikostech 8,7 *a* 5,3*) a úhel proti větší z nich (*$85°35'$*). Urči všechny strany a úhly v trojúhelníku.*

Nejprve je podle sinové věty počítán úhel proti menší straně, jenž, jak víme, je zajisté ostrý. V postupu je však napsáno (s drobným překlepem): *Úhly s touto hodnotou sinu mohou existují dva* $\Longrightarrow$ *musíme využít oba.* Z planimetrického hlediska však využití „druhého“ nedává žádný smysl.

V sérii učebnic *Matematika pro gymnázia*, konkrétně v dílu *Goniometrie* (Odvárko, 2003) jsou připomenuty pouze věty *sss* a *sus*, tedy tvrzení vztahující se k užití kosinové věty. V kapitole věnované sinové větě je k řešení trojúhelníků daných dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich podáno vysvětlení vysázené menším písmem pod hlavním textem:

Poznámka. *Velikost úhlu je určena funkcí sinus dvojznačně. Podle konkrétních údajů rozhodneme na základě trojúhelníkové nerovnosti a věty o součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku o počtu řešení.* (Odvárko, 2003: s. 108).

Tohoto principu je také využito v práci (Odvárko & Řepová, 1996), zde jsou navíc uvedeny všechny věty o shodnosti trojúhelníků. Ve sbírce (Jirásek et al., 1996: s. 325–326) je řešení trojúhelníku zadaného dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich efektivně porovnáváno s konstrukčním řešením. Výklad je doplněn obrázkem podobným našemu obr. 1. Tento přístup se ve výše uvedených pracích neobjevuje.

Zpracování starých učebnic

Ve všech třech studovaných starých učebnicích geometrie je řešení trojúhelníku důsledně vztahováno na příslušná planimetrická tvrzení. Vedle vět o shodnosti trojúhelníků je vždy připomenuto tvrzení říkající, že proti kratším stranám trojúhelníku leží vždy ostré úhly. Tuto vlastnost považuje autor článku za zásadní, neboť řešení trojúhelníku velmi zefektivňuje. Přitom v soudobých učebnicích je tato věta přímo uvedena pouze v práci (Odvárko, 2003: s. 114). Není s ním však pracováno příliš systematicky, je zmíněno pouze u jednoho příkladu na řešení trojúhelníku daného podle *sss* a jednou v následující poznámce.

V práci (Jandečka, 1865) její autor uvedl přímo označení příslušných planimetrických vět, jež dokázal v předchozím dílu učebnice, tedy v (Jandečka, 1864):

Hodnota $\sin B$ *náléží vůbec ku dvěma úhlům, které se na* $180°$ *doplňují (§. VII 3. vz. 42.)*[9]*; pročež je-li B úhel dutý, k jednomu ostrému a k jednomu tupému zároveň. V naší úloze jest ale tupý úhel vyloučen, ježto dle výminky jest* $b < a$ *a tím* $B < A$ *(Pl. XLV.), tedy na všechen způsob* $B < 90°$*. Kdyby ale bylo* $b > a$*, zůstala by dvojsmyslnost, což se srovnává s Pl. XLVII. 5.* (Jandečka, 1865: s. 32)

V paragrafu XLV je dokázáno tvrzení *V trojúhelníku leží proti větší straně též větší úhel* (Jandečka, 1864: s. 35) a v paragrafu XLVII je podrobně rozebrána *Určenost trojúhelníka dvěma stranami a úhlem protilehlým*, je k tomu využit postup konstrukce takových trojúhelníků (Jandečka, 1864: s. 35–36).

V. Šanda se podrobněji zabýval nejednoznačným určením trojúhelníku (daným dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich), navíc proti ostatním autorům využil také kosinovou větu, resp. řešení kvadratické rovnice:

Že není trojúhelník dokonale určen, když by byly dány dvě strany na př. a *a* c*, a úhel proti té menší ležící, plyne přímo z následujícího: určíme-li plochu trojúhelníka,* $p = \frac{1}{2}ac\sin B$*, a stranu* b *dle věty Carnotovy*[10]*:* $b^2 = a^2 = c^2 - 2ac\cos B$ [11]*, můžeme v této poslední čtvercové rovnici určiti* c *a dosaditi jeho hodnotu do rovnice první. Jest totiž* $c = a\cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 + a^2\cos B^2} = a\cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2\sin B^2}$*, tudy* $p = \frac{1}{2}a\sin B(a\cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2\sin B^2})$.

Dokudby bylo $b > a$*, má i kořenová veličina dvojí cenu; že*

[9] Paragraf VII je obsažen v (Jandečka, 1865), *Části I., Vztahy úkonů goniometrických*, str. 19. Jsou v něm popsány vlastnosti goniometrických funkcí.

[10] Kosinová věta byla dříve pojmenovávána podle francouzského inženýra, generála a politika Lazara Carnota (1753–1823). Základní informace o jeho životě a díle viz *Ottův slovník naučný. Pátý díl.* Praha: J. Otto, 1892, str. 169–170.

[11] Zde je překlep, má být $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.

ale p vždycky jenom kladné býti musí, smí se vzíti též i kořenová veličina toliko kladně. Pro $b < a$ mohou se vzíti buď obě ceny, aniž by proto p bylo záporným býti muselo, a nebo bude celá hodnota pomyšlenou. (Šanda, 1870: s. 194)

Zpracování řešení trojúhelníku ve starých učebnicích lze shrnout citací rozboru nejednoznačně určeného trojúhelníku v knize (Strnad, 1893), z něhož autor tohoto článku využil z bodu *c)* diskuzi o hodnotě funkce sinus ve vztahu k počtu řešení:

Dány jsou dvě strany a úhel proti jedné z nich.

Dáno-li a, b, α, jest podle věty sinové $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$, *načež vypočítáme* $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$, $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. *Zde se sluší rozeznávati tyto případy:*

a) Je-li $a > b$, jest zlomek vyjadřující $\sin\beta$ *pravý; úhel β jest pak možný a jednoznačně určen, poněvadž nemůže býti tupým z příčiny $\alpha > \beta$.*

b) Je-li $a = b$, jest $\sin\beta = \sin\alpha$ *a také $\beta = \alpha$. Úloha jest zde též jednoznačná a výsledkem trojúhelník rovnoramenný.*

c) Je-li $a < b$, může býti $b\sin\alpha \lesseqqgtr a$.

V prvém z těchto případů jest $\sin\beta < 1$, *úloha možná a dvojznačná, neboť β může býti úhel ostrý nebo tupý; v druhém případě* $\sin\beta = 1$, *úloha jest jednoznačná s výsledkem trojúhelník pravoúhlý; v třetím případě jest* $\sin\beta > 1$, *tedy úloha nemožná.* (Strnad, 1893: s. 209)

Závěr

Důležitost správného didaktického přístupu k vyučování trigonometrie podtrhuje řada dobových článků otištěných v *Časopise pro pěstování matematiky (a fyziky)*[12], jež zajímavým a podnětným způsobem rozebírají metodiku řešení trojúhelníku, dokazování sinové a kosinové věty nebo další trigonometrická tvrzení a jejich užití.

[12]Vedle práce (Lerl, 1939) lze jmenovat např. Houel, J. (1876). *Poznámky o vyučování trigonometrii. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, 5 (1876), 103–112, nebo Ryšavý V. (1926). *Metodické poznámky z trigonometrie. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 55 (1926), 120–123.

Tento příspěvek si proto autor dovoluje zakončit místo vlastních slov následující citací, s jejímž obsahem je ztotožněn:

Základní věty odvozujeme rozmanitým způsobem; avšak přes to se pokládá – zvláště při prvním odvozování – za nejvhodnější onen způsob odvozování, při němž se vychází ze známých planimetrických vět a vztahů a používá se metody pomocných obrazců. Vzhledem k tomu je na místě opakování základů planimetrie, obzvláště k pozdějšímu řešení trojúhelníka, daného různými prvky. Ale i konstruktivní řešení je nám často dobrým vůdcem při trigonometrieckém řešení, neboť nám nejen umožňuje přehlédnouti vnitřní stavbu, ale poskytuje nám i mnoho námětů k diskuzi úlohy, obzvláště pokud jde o mnohoznačnost. (Lerl, 1939: s. 164–165)

Literatura

[1] Jandečka, V. (1864). *Geometria pro vyšší gymnasia. Díl prvý. Planimetria.* Praha: nákladem vlastním.

[2] Jandečka, V. (1865). *Geometria pro vyšší gymnasia. Díl třetí. Trigonometria.* Praha: nákladem vlastním.

[3] Šanda, F. (1870). *Měřictví pro vyšší třídy středních škol. Díl první. Planimetrie. Trigomonetrie. Stereometrie.* Praha: I. L. Kober.

[4] Strnad, A. (1893). *Geometrie pro vyšší gymnázia.* Praha: F. Kytka.

[5] Lerl, K. (1939). Poznámky k metodice trigonometrie. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 68(1939), 163–170.

[6] Jirásek, F. et al. (1996). *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. 1. část.* Praha: Prometheus.

[7] Odvárko, O. & Řepová, J. (1996) *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU. 3. část.* Praha: Prometheus.

[8] Odvárko, O. (2003). *Matematika pro gymnázia. Goniometrie.* Praha: Prometheus.

[9] Krynický, M. (2010). *Matematika SŠ. Sinová věta.* Dostupné z `http://www.realisticky.cz`

[10] Mikulčák, J. (2010). *Nástin dějin vzdělávání v matematice.* Praha: Matfyzpress.

[11] Vízek, L. (2013). Výuka sinové a kosinové věty v souvislosti se shodností trojúhelníků. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2013. Sborník příspěvků.* (106–109). Praha: KMDM PedF UK.

Abstract

The article deals with methods of teaching triangles and calculations of their sides, angles, etc. First, the analysis of current secondary textbooks is made and second, the author's own conception of teaching is presented. It is, among others, grounded in Czech secondary mathematics textbooks from the last third of the 19th century.

Lukáš Vízek
KMa PřF UHK
Rokitanského 62
500 03, Hradec Králové