Katarína Bachratá; Hynek Bachratý

Prirodzené tempo budovania matematických predstáv

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 1, 1–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149479

PRIRODZENÉ TEMPO BUDOVANIA MATEMATICKÝCH PREDSTÁV

KATARÍNA A HYNEK BACHRATÝ[1]

Úvod

Jednou z kľúčových príčin, ktorá podľa nášho názoru zhoršuje výsledky a postavenie matematického vzdelávania, sú jeho neprimerané ambície. Veľmi často učíme príliš veľa, príliš rýchlo a sledujeme z hľadiska žiakov a študentov zbytočne vysoké ciele. Pokiaľ vyučovanie prispôsobíme skutočným potrebám a schopnostiam žiakov, dočkáme sa zväčša príjemného prekvapenia. Najdôležitejšia je zmena a zlepšenie postoja žiakov k matematike, ďalej dosahujeme lepšie vzdelávacie výsledky a významné sú aj nové didaktické postrehy a podnety.

Tieto tézy vieme doložiť množstvom príkladov siahajúcich od predškolského veku po študentov vysokých škôl. Do tohto článku sme vybrali také situácie, ktorých spoločným prvkom je zaradenie fázy manuálnej, experimentálnej a manipulatívnej činnosti do priebehu vzdelávania. Spomalenie vzdelávacieho procesu spôsobené týmto zásahom sa ukázalo ako veľmi prirodzené a správne nastavené a bolo prínosné pri budovaní matematického poznania žiakov.

Kreslenie

Predškoláci a ich objavy

Máloktorý rodič má viac energie, nadšenia pre pohyb, skúmanie, poznávanie, skúšanie a vôbec vyvíjanie aktivity akéhokoľvek druhu, ako jeho vlastné dieťa v predškolskom veku. Detský

[1] Článok nadväzuje na prednášku autorov *Ručné práce v matematike* z dňa 17.2.2012 na konferencii *Dva dny s didaktikou matematiky* na Pedagogickej fakulte Karlovej Univerzity v Prahe

pohyb a činorodosť samozrejme sprevádzajú malé nehody a tak je rodič neustále v strehu a je vďačný za každú chvíľu zaujatia dieťaťa niečím bezpečným a pre rodiča čo najmenej obmedzujúcim. Rodič preto niekedy dáva dieťaťu úlohy, ktoré ho zaujmú na dlhšiu dobu a ktorých účelom je, aby dieťa hľadalo riešenie čo najdlhšie, aby sa čo najdlhšie zabavilo. Deti ochotne a často až nepochopiteľne opakujú rovnakú činnosť. Desaťkrát si nechajú prečítať tú istú rozprávku, opakovane kreslia rovnaký domček na obrázku, spievajú pesničku, rozoberú autíčko, vyložia veci zo zásuviek v kuchyni. A hoci ich konanie môže vyzerať bezúčelné, trénujú si tým slovnú zásobu, jemnú motoriku, pohybové zručnosti, alebo iba skúšajú, čo všetko rodič toleruje. Riešenie náročnejšej úlohy dokáže dieťa zabaviť na dlhú dobu. A rodičom to vyhovuje, podporujú ho v zdĺhavom vyfarbovaní obrázkov, či obkresľovaní písmeniek.

S nástupom do školy sa prístup zrazu zmení, dieťa nedostáva úlohy, pri ktorých by sa mohlo a malo zdržať, má úlohy riešiť, napodobovať odskúšané spôsoby riešenia a nezdržovať sa neefektívnymi postupmi. V škole má pochopiť návod ako pracovať a zopakovať ho podľa pokynu učiteľa, pokiaľ možno čo najrýchlejšie. A dieťa zrazu takáto práca nebaví.

V nasledujúcom príbehu si na príklade päťročného Ondríka ukážeme, ako sme sa najskôr priblížili a potom nechtiac zamedzili vzniku jedného objavu.

Čísla a draci

Kolega mi (Kataríně) do kancelárie priviedol svojho syna Ondríka s prosbou, aby som ho na pol hodinku postrážila, pretože musí niečo vybaviť. Ondrík si chvíľu pozeral knižky, ktoré si priniesol, a ja som si robila svoju robotu. Potom zatúžil po pozornosti a opýtal sa ma, či mi môže nakresliť trojhlavého draka. Keď bol hotový, prepočítali sme, koľko má hláv, a dala som Ondrovi ďalšiu úlohu; zistiť, koľko hláv majú traja trojhlaví draci. Čakala som, že sa zabaví tým, že dokreslí ďalších dvoch drakov, a ja budem mať ďalšiu chvíľu čas pre svoju prácu. Ondro ma prekvapil tým, že obrázok prvého draka odložil a začal kresliť ďalší obrázok nanovo.

S tromi drakmi. Na obrázku potom spočítal, že traja draci majú deväť hláv.

Nasledovala úloha o štyroch drakoch. Pochvaľovala som si, že Ondra zatiaľ žiadne zlepšováky nenapadli a že zase vytiahol čistý papier a začal kresliť odznova. V tej chvíli sa vrátil jeho otec. S Ondríkom sme mu vysvetlili, čo robíme, že ideme nakresliť štyroch trojhlavých drakov, aby sme mohli spočítať, koľko majú hláv. Ondríkov ocko však potreboval syna rýchlo odviesť a tak pracovný postup trochu urýchlil. Zobral už nakreslené výkresy, prvý s jedným drakom a druhý výkres s tromi drakmi a ukázal ich Ondríkovi. Keď ich spočítali, vedeli, že sú draci štyria. A potom stačilo spočítať už iba hlavy drakov a tých bolo dvanásť. A ocko s Ondríkom odišli. Ondro vyzeral trochu popletený, očividne mal naplánované nakresliť štyroch drakov a spočítať hlavy, ocko s jeho autoritou ale povedal, že výsledok bude rovnaký, ako keď nebude kresliť, ale zoberie už nakreslené výkresy. Neviem, možno stačila pol hodina a Ondro by si objavil svoje vlastné zlepšováky.

Keď ponúkneme zlepšováky a vynálezy deťom, keď ešte na ne nie sú pripravené, môže sa stať, že deti popletieme, získajú pocit, že je to komplikované, a preto sa neodvážia robiť zlepšováky sami. Ak deti nemajú skúsenosť s tým, že by niečo sami vymysleli, nebudú sa o zmeny postupu snažiť. Budú počúvať a poslúchať návody, ktoré im ponúknu autority, a budú napodobovať známe postupy. Ale práve matematika by mala byť aj o hľadaní svojich riešení a vylepšení a nie iba o opakovaní cudzích postupov.

Teoretický podklad tu uvádzaných úvah a záverov tvorí známa teória generických modelov, ktorej základný popis je možné nájsť napríklad v [1], [2], [3] alebo [4]. Vo viacerých prácach, napr. [5], [6] je tiež ukázané, ako nerešpektovanie zákonitostí tejto teórie vedie k formálnym vedomostiam a formálnemu vzdelávaniu detí. Pre presnejšie pochopenie psychiky predškolákov a problému prechodu do školského prostredia odporúčame [7].

Príklad s Ondríkom a drakmi je výnimočný tým, že ukazuje na možnosť vzniku podobných deformácií už v predškolskom veku. Súvisí to aj so špecifickou situáciou v oblasti numerácie a elementárnej aritmetiky. Objektívnym dôvodom problémov je skutočnosť, že spôsob pomenovania a používania čísloviek v našom jazyku je výsledkom a zavŕšením mnoho tisíc rokov trvajúceho fylogenetického vývoja v oblasti matematických predstáv. Dieťa ho ale získa spolu s osvojením si reči v čase, keď ontogeneticky a matematicky na tento poznatok ešte zďaleka nie je pripravené. Druhá, subjektívna a žiaľ veľmi častá príčina problémov je tradícia rodičov „trénovať a predvádzať" schopnosti predškolákov práve v oblasti „počítalky a sčítalky".

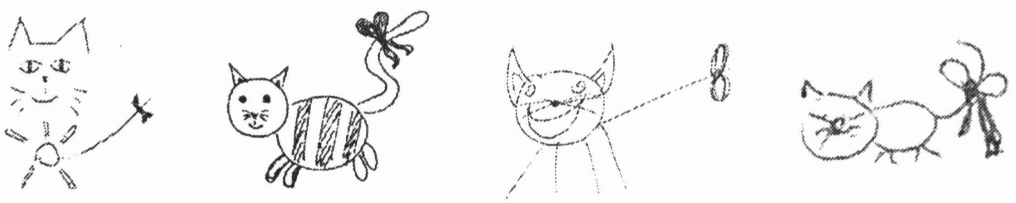
Výsledkom sú aritmetické znalosti založené prevažne na verbálnych a pamäťových schopnostiach, na ktoré žiaľ veľmi často nadväzuje aj školské vzdelávanie. To, že na úrovni mnohostných predstáv vzťah „1 plus 3 sa rovná 4" pre šikovné päťročné dieťa nemusí byť automatizovaný, a možno ani vytvorený, ilustruje náš príklad s drakmi.

Logické spojky a mačky

Ďalším príkladom témy, ktorá sa v škole preberá v situácii, kedy deti ešte nemajú vybudované skúsenosti, na ktorých by mohli stavať pri jej uchopení, je logika. Konkrétne výrokový počet vo forme obmedzujúcej sa na skúmanie výrokov zložených pomocou logických spojok a negácie. Na rôznych stupňoch škôl sa ešte stále stretávame so situáciou, keď vysvetlíme žiakom, čo sú výroky, cez tabuľky pravdivostných hodnôt ukážeme, ako fungujú spojky, aké sú pravdivostné hodnoty zložených výrokov a ako vyzerajú rôzne typy dôkazov. Následne nás mrzí, keď žiaci či študenti na základe takéhoto vyučovania nevedia dokazovať a zväčša ani nechápu, prečo by sa tým mali obťažovať.

Z tohto dôvodu už dlhé roky hľadáme a využívame rôzne prostredia, v ktorých aj mladší žiaci dokážu pracovať s logickými spojkami a určovať pravdivostnú hodnotu zložených výrokov. Tému, ktorú predstavíme v nasledujúcej ukážke, sme vyskúšali postupne so skupinou žiakov 5. a 6. ročníka základnej školy, študentmi 1. a 2. ročníka strednej školy a so zmiešanou skupinou študentov, doktorandov a učiteľov na FMFI UK v Bratislave.

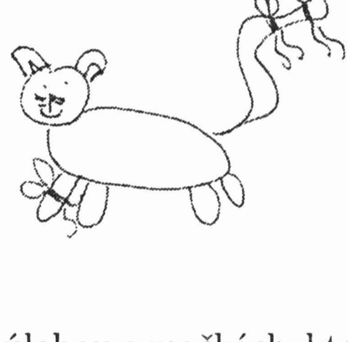
Prostredie, v ktorom sme sa venovali úlohám o logických spojkách, bolo *Mačacie kráľovstvo*. Prvé úlohy boli o mačacom kráľovi, ktorý vydáva príkazy. Príkazy hovoria o tom, kto dnes večer môže ísť von. Napríklad *dnes večer môžu ísť von iba mačky, ktoré majú na chvoste mašľu.* Žiaci aj študenti boli vyzvaní, aby znázornili mačky, ktoré poslúchli kráľov príkaz. (Obrázky, ktoré náš text sprevádzajú, sú iba od vysokoškolákov, obrázky od piatakov sa nezachovali.)



Piataci aj vysokoškoláci ochotne kreslili mačky, problém bol so stredoškolákmi, ktorí práve výrokový počet preberali v škole. Títo si automaticky označili výroky písmenami a pracovali iba s formálnymi zápismi. Počas riešenia úloh urobili najviac chýb, ktoré neboli schopní opraviť.

Piataci aj vysokoškoláci kreslili mačky s dvomi cieľmi. Buď sa snažili nakresliť čo najkrajšie mačky, alebo vymýšľali vtipné doplnky, neskôr aj originálne situácie, ktoré rafinovane splnili požiadavky zadania.

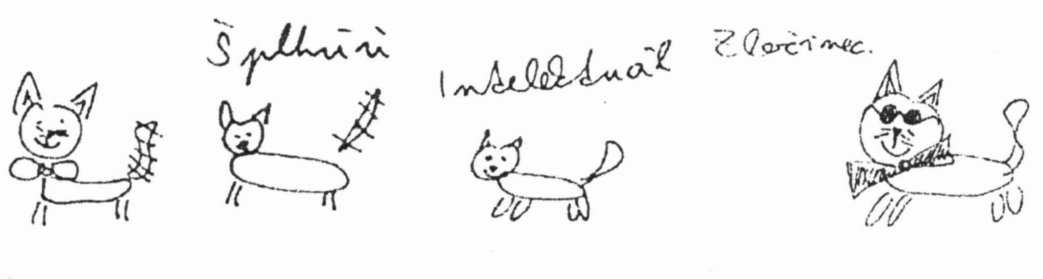
Napríklad mačka, ktorá má na chvoste mašľu, mohla vyzerať nasledovne:



Príbeh pokračoval úlohou o mačkách, ktoré musia splniť príkaz zložený z dvoch výrokov: *Dnes večer môžu ísť von iba mačky, ktoré majú na chvoste mašľu a v papuľke myš.*

Náročnou sa ukázala byť úloha so spojkou *alebo*. Niektoré deti chápali spojku *alebo* ako vylučovaciu, iné nie. Bolo dobré s nimi rozdiskutovať a nechať ich rozhodnúť, ako spojku pochopiť. Ako argumenty, ktoré by deti presvedčili, sa dajú použiť vety: *Kúp si zmrzlinu, alebo nanuk!* Ak si dieťa kúpi aj zmrzlinu, aj nanuk, je to asi nesprávne pochopený príkaz. Ak mi ale mama povie: *Umy riad, alebo povysávaj byt!* a ja spravím oboje, tak to bude na veľkú pochvalu. Teda z kontextu sa dá usúdiť, či ide o vylučovacie *alebo*, alebo nie. V našej situácii sa deti vždy zhodli, že *alebo* u mačiek vylučovacie nebude. *Dnes večer môžu ísť von iba mačky, ktoré majú na krku mašľu alebo pruhovaný chvost.*

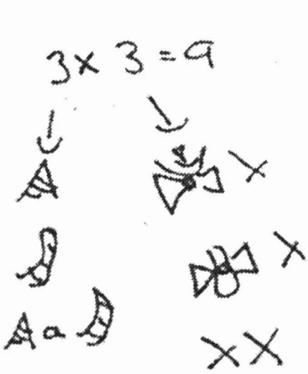
Ďalšia úloha bola implikácia. Dokonca ani tí najmenší, piataci, nemali problém s implikáciou. Obrázky vysokoškolákov ale ilustrujú, že stále ide o veľmi silný podnet. Nielen experimentátor, ale aj študenti sami boli prekvapení, ako sa pri kreslení dobre zabávajú a ako jasné sú všetky detaily implikácie, keď sa o nich nerozpráva, ale keď sa nakreslia. *Ak má mačka na krku mašľu, potom musí mať pruhovaný chvost.*

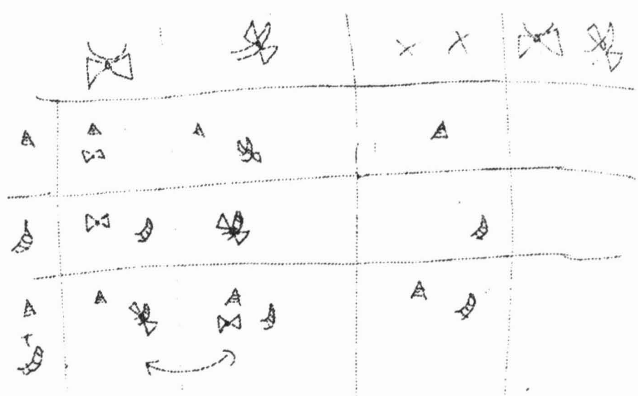


Študenti na obrázkoch nakreslili postupne poslušnú mačku, mačku šplhúňa, mačku intelektuála a nakoniec aj neposlušnú mačku, „zločinca“. (Nie je našim cieľom robiť prvoplánové analógie, tu si ich ale neodpustíme. Vedeli by ste tieto mačacie obrázky aplikovať na implikáciu „ak je ciferný súčet deliteľný tromi, potom je číslo deliteľné tromi“ a na implikáciu „ak je ciferný súčet deliteľný deviatimi, potom je číslo deliteľné tromi“? Pri ktorej sa vám to darilo lepšie a prečo? Viete vymyslieť podobný príklad z oblasti geometrie? Podarí sa vám to pre obrázok „trojmašľovej“ mačky?)

Posledné zadanie bol zložený výrok: *Ak má mačka pruhovaný chvost, alebo pruhované ucho, tak musí mať mašľu na krku aj na nohe.* Okamžitá reakcia piatakov na toto zadanie bola požiadavka, aby som pridala do vety zátvorky, lebo kým tam nie sú, dá sa to pochopiť rôznymi spôsobmi. Riešili potom úlohu: *Ak má mačka (pruhovaný chvost, alebo pruhované ucho), tak musí mať (mašľu na krku aj na nohe).*

Úloha pre vysokoškolákov bola náročnejšia. Doplniť do zadania zátvorky všetkými možnými spôsobmi a nájsť pre každé zadanie všetky (principiálne odlišné) riešenia. Napriek ponuke, že riešenie už nemusia robiť pomocou obrázkov, študenti naďalej kreslili, aj keď už iba schematicky a dobre sa vďaka kresbám orientovali nielen vo vlastných riešeniach, ale aj v riešeniach ostatných študentov.





S rozprávkou sme u piatakov pokračovali kreslením neposlušných mačiek, ktoré si robia, čo chcú, a mačacieho kráľa naschvál neposlúchajú. Táto časť bola pre deti jednoduchá a prešli sme ju pomerne rýchlo.

Zaujímavá bola ďalšia časť príbehu, v ktorej na scénu vstúpila mačacia kráľovná. Tá každý deň povedala príkaz, ktorý bol negáciou kráľovho príkazu. Teda pustila von mačky, ktoré tam ísť nesmeli, a zakázala ísť von mačkám, ktorým to kráľ povolil. A navyše to povedala tak, aby kráľ neprišiel na to, že mu podkopáva autoritu.

To, ako deti vytvárali negácie, bolo inšpirujúce. Pozreli si obrázky s „neposlušnými" mačkami a potom povedali výrok mačacej kráľovnej. Zistili, či platí naozaj pre všetky nakreslené mačky. Potom si skontrolovali výsledok aj u iných detí, na ich obrázkoch mačiek. Týmto spôsobom sa im podarilo vytvoriť negáciu aj posledného výroku, zloženého zo 4 jednoduchých výrokov. Nepodarilo sa im to na prvý krát. Keď výsledok vyhovoval všetkým mačkám, ktoré už boli nakreslené, začali si kresliť ďalšie mačky a overovať, či sú poslušné, alebo neposlušné. Nakoniec našli mačku, ktorá nebola ani poslušná, ani neposlušná. To ich presvedčilo, že treba výrok opraviť. Toto všetko však deti urobili sami, bez asistencie učiteľa.

Nie je úplne jasné, či úspešnosť u piatakov bola spôsobená len tým, že mali počas kreslenia viac času na rozmýšľanie, alebo tým, že skutočne nakreslená mačka je pre dieťa zrozumiteľnejšia než napísaná veta. Podstatná je ale v oboch prípadoch fáza kreslenia. Ukázala sa tiež funkčnosť prostredia mačacieho kráľovstva pre konštruktivistický prístup v oblasti výrokového počtu a zdá sa, že propedeuticky aj predikátového počtu. Určite môžeme povedať, že téma deti bavila, vydržali pri nej celú hodinu, a to aj deti matematicky slabšie.

Veľmi poučné sú ale aj priložené ilustrácie z práce vysokoškolákov. Tie jasne naznačujú, že vizualizácia je ešte aj pre nich veľmi dôležitá. Vysoká miera citovej angažovanosti prítomná v kresbách ukazuje, že (v terminológii teórie generických modelov) je určite predčasné hovoriť v oblasti výrokového počtu už len o fáze kryštalizácie a automatizácie poznatku. Naopak uvedené príklady skôr poukazujú na etapu izolovaných modelov a „zátvorkový príklad" na tvorbu generických modelov. Treba si tiež uvedomiť, že v tomto prípade pravdepodobne nesledujeme zo strany študentov štandardný priebeh poznávacieho procesu, ale skôr spontánnu „reedukáciu“ formálnych vedomostí a postupov získaných na strednej a vysokej škole. Študentov totiž z veľkej časti poznáme a vieme, že majú naozaj hlboký a kladný vzťah k matematike, s ktorou sa ale z veľkej časti zoznámili na základe konštruktivistického vzdelávania. Svoje formálne vedomosti preto pociťujú negatívne a pôsobia na nich motivujúco smerom k ich vedomému alebo podvedomému odstráneniu a nahradeniu.

Aj keď vieme, že mnohým čitateľom sa tieto myšlienky zdajú známe a samozrejmé, ide žiaľ o stále aktuálnu a boľavú problematiku. „Dnes a denne“ sa ešte stále, opakovane a pravidelne stretávame pri tvorbe stredoškolských aj vysokoškolských študijných plánov a programov s utkvelou myšlienkou zaradiť hneď na úvod kurz viac alebo menej formálnej logiky, čím zabezpečíme hladké „logické“ a tým aj vedomostné a postojové zvládnutie všetkých ďalších matematických predmetov. O scestnosti tohto postupu najlepšie svedčia rozsiahle lamentácie učiteľov týchto typov škôl nad kvalitou vedomostí študentov. Vidíme pritom, že pri správnom postupe je logika prístupná a zaujímavá aj pre 11ročné deti. Prostredia, ktoré toto umožňujú a zároveň aj majú potenciál na nápravu vzniknutých vzdelávacích chýb, preto sú a stále budú veľmi cenné. Privítame preto spoluprácu pri ďalšej analýze a rozpracovaní tejto problematiky.

Nástroje na náhodné experimenty

Kocky a postupnosť výsledkov

Ďalšou dôležitou a zároveň problémovou témou nášho matematického vzdelávania je oblasť pravdepodobnosti a štatistiky. Aj tu nás zaujímajú možnosti konštruktivistických prístupov, a zároveň, špeciálne ako vysokoškolských učiteľov, metódy a postupy vhodné pre nápravu deformovaných predstáv študentov a reštrukturalizáciu ich skúseností. Vhodným nástrojom, ktorý deti v našom kultúrnom prostredí majú možnosť spoznať pri spoločenských hrách, sú hracie kocky. Aby deti nadobudli skúsenosti s organizovaním vlastných experimentov, ponúkli sme im nasledujúcu úlohu:

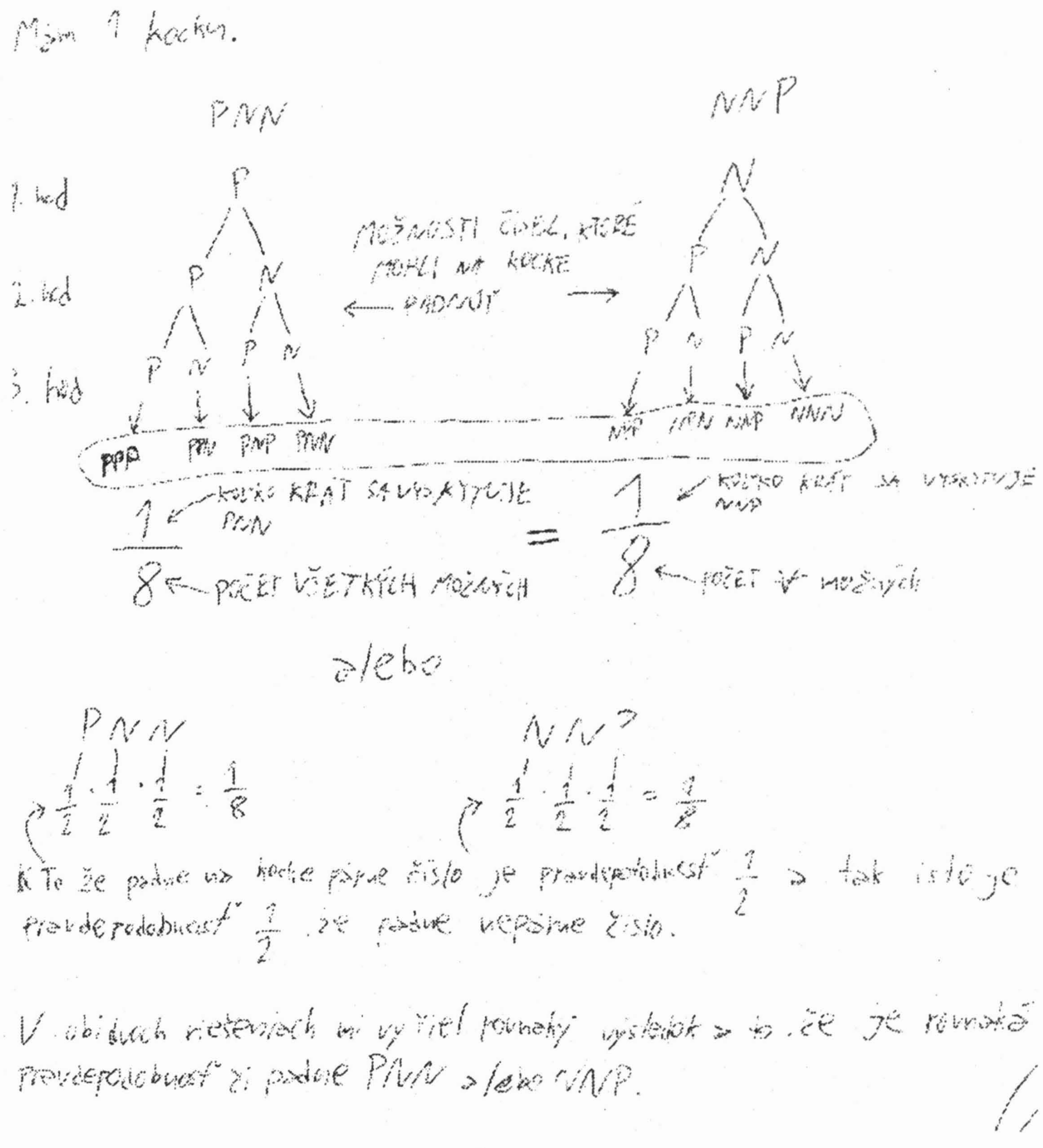
Dvaja hráči hrajú hru, spočívajúcu v sledovaní parity čísel, ktoré padli pri postupnom hádzaní kockou. Napríklad ak postupne padali čísla 5, 4, 3, 2, 2, 1, 6, 2, 5, 3, zapíšeme postupnosť N, P, N, P, P, N, P, P, N, N. (Písmeno P označuje, že na kocke padlo párne číslo a N označuje, že na kocke padlo nepárne číslo.) Hráči sa dopredu dohodnú, pri akej kombinácií výsledkov hádzania ktorý z nich vyhrá. Na výber majú dve možnosti: PNN alebo NNP. Kockou sa teda hádže dovtedy, kým sa neobjaví v postupnosti výsledkov jedna z možností PNN alebo NNP. Vyhráva hráč, ktorého možnosť sa v sérii po sebe idúcich hodov objavila ako prvá. (V našom ilustračnom príklade vyhral hráč, ktorý si vybral PNN, pretože možnosť PNN sa v postupnosti objavila skôr.)
Ktorú možnosť spomedzi PNN a NNP si má hráč vybrať, aby mal väčšiu šancu vyhrať?

Úlohou sme „trápili“ mnohých našich priateľov, doktorandov a kolegov, tu ale uvedieme závery z jej riešenia 10 až 11ročnými deťmi, ktorým sme úlohu predložili v rámci korešpondenčného matematického seminára SEZAMKO.

Typickým riešením detí, ktorým sa pri práci snažili pomôcť dospelí, boli riešenia podobné ukážke na obr. 1.

Pri teoretických úvahách deťom (alebo ich rodičom) vychádzalo, že sekvencie PNN aj NNP sú rovnako pravdepodobné a vyskytujú sa rovnako často. Pre úplnosť len doplníme, že použitá teória bola zrejme nasadená na základe niektorých vonkajších, jazykových a formálnych znakov úlohy a pre jej skutočné riešenie sa dá využiť len okrajovo.

Na tomto mieste poznamenáme, že sme sa (nie u detí, ale u dospelých) často stretli s názorom, že *úloha je zavádzajúca, pretože sa tvári ako úloha z pravdepodobnosti, ale v skutočnosti je to kombinatorická úloha o počte postupností, v ktorých sa vyskytuje séria PNN skôr ako séria NNP.* Problém, ako vopred zvoliť správnu teóriu pre riešenie úlohy, je určite zaujímavý. My pri tejto úlohe nepoznáme človeka, ktorý by našiel správne riešenie bez toho, že by najprv experimentoval.



Obr. 1

Niektoré deti, ktoré experiment s kockami vyskúšali, dostávali výsledky, ktoré boli v rozpore s očakávaním rovnako pravdepodobných výsledkov. Slúži im ku cti, že napriek tomu, že s výsledkom experimentu nesúhlasili, priznali tento výsledok: *Ja si myslím, že pravdepodobnosť, či padne PNN alebo NNP, by mala byť úplne logicky rovnaká, lebo keby to tak nebolo, dali by sa na tom zakladať špekulácie pri kartových a kockových hrách. Ak mi padne P a za ním dve N, tak by mala byť, že mi po dvoch N padne P. V mo-*

jich desiatich partiách mi častejšie vyšlo PNN, čo si myslím, že je vec náhody, a ak ste presvedčení, že viete ovplyvniť výsledok, tak ste už teraz milionármi. Rozpor medzi názorom a experimentom bol zároveň často aj rozporom medzi rodičovskou autoritou a autentickou skúsenosťou detí.

Ďalšia skupina riešiteľov uznala častejší výskyt série PNN, no vysvetlenie hľadali, tak ako kedysi naši predkovia, mimo pravdepodobnosti: *Z 20 partií vyhrala séria PNN 13 krát a séria NNP 7 krát. V prírode majú párne čísla prednosť.* Nedá sa nepodotknúť, že takémuto riešeniu by sa potešil aj sám Pytagoras, pre ktorého školu bol až mystický súvis prírody a sveta čísel typický a významnú úlohu v ňom hrala aj parita.

Iný riešiteľ pre zmenu vytvoril tabuľku, v ktorej zaznamenal viacero fyzikálnych parametrov experimentov: strana hodu, sila hodu, prudkosť hodu, rýchlosť hodu a ich hodnoty. Hodnoty z tabuľky si zapamätal a pomocou nich dokázal zabezpečiť, že séria PNN padala častejšie než séria NNP (viz obr. 2).

Ak sme pred chvíľou spomínali Pytagora, v tejto ukážke fyzikálne experimentovanie a snaha previazať ho na matematické výsledky zodpovedá takmer Galileovskému prístupu. Chceme preto upozorniť na skutočnosť, že takmer 2 000 rokov fylogenetického vývoja sa v týchto dvoch prípadoch vtesnalo do schopností detí, ktorých vekový rozdiel bol najviac jeden ročník základnej školy. To nám ukazuje naozaj veľkú rôznorodosť žiakov a ich matematických schopností na začiatku druhého stupňa ZŠ, s ktorou by mali počítať nielen učitelia, ale aj osnovy.

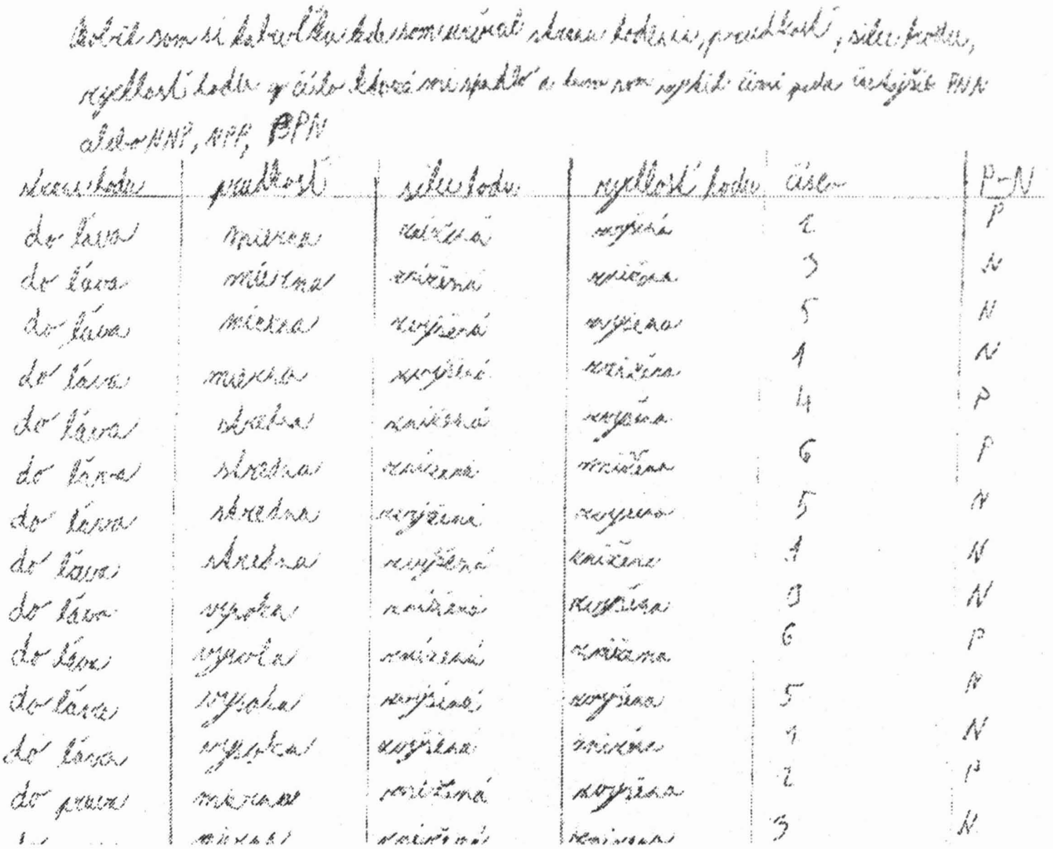
Poslednou skupinou boli riešitelia, ktorí si počas experimentovania uvedomili zákonitosti, ktoré naozaj súvisia s týmto problémom a pomôžu pri jeho riešení:

Častejšie nastane PNN:

Ak pri prvom hode padne P, hra končí PNN. Ak pri prvom hode padne N, a pri druhom padne P, hra končí PNN. Ak pri prvom hode padne N, a pri druhom padne N, hra končí NNP.

Alebo:

Hráč, ktorý si vyberie PNN, vyhrá viacej krát, pretože stačí, aby padlo v prvom alebo druhom ťahu P a potom je víťaz, pretože hráč



Obr. 2

s NNP potrebuje získať NN a potom P, lenže to už by hráč s PNN mal PNN a vyhrá, a aby vyhral hráč s NNP, potrebuje mať v prvom a druhom hode N.

Posledné riešenia sú správne a deti tomu naozaj rozumejú. Druhé z riešení je formulované v tvare procesu, popisuje, ako sa musí vyvíjať situácia v hre, aby hráč vyhral. O tom, že špeciálne v oblasti budovania pravdepodobnostných predstáv na základe reálnych alebo myšlienkových experimentov je polarita procesu, konceptu a proceptu výrazne zastúpená a dobre pozorovateľná, sme informovali v príspevku [8].

Kým začneme deti učiť pravdepodobnosť alebo štatistiku, mali by sme ich nechať zorganizovať si vlastný experiment, aby sami museli hľadať, čo je pre výsledok pokusu relevantné a čo nie. Túto skutočnosť sme si overili na viacerých podobných úlohách v korešpondenčných seminároch pre žiakov druhého stupňa základných škôl. Deti nás prekvapili svojimi hypotézami a niekedy aj nezmyselnými riešeniami. Naša skúsenosť však hovorí, že je lepšie, keď sami prídu na to, že niektoré ich predstavy nezodpovedajú výsledkom, než keby im tento fakt niekto sprostredkoval bez toho, že by si experimentovanie vyskúšali. Experimenty s kockou síce nie sú reálnymi experimentmi, ale história nás učí, že pravdepodobnosť je disciplína, ktorá z veľkej časti vyrástla práve na hazardných hrách.

Veľmi nás teší, že vzdelávací potenciál podobných experimentov podľa našich skúseností ostáva zachovaný aj pre študentov prvých ročníkov informatickej fakulty, na ktorej učíme. Často sa ocitneme v situácii, keď potrebujeme zmeniť a prebudovať chybné vedomosti v oblasti logiky alebo záporný a odmietavý postoj k pravdepodobnosti, štatistike a matematike vôbec. Vzhľadom na informatické zameranie našej fakulty a jej študentov sme často po získaní základných skúseností prešli z experimentovania s kockami na simulovanie na počítačoch, ktoré môže reálne experimenty z veľkej časti nahradiť a je pre študentov tiež atraktívne. Očakávame, že reedukačný potenciál týchto experimentov bude nadobúdať na význame. Pravdepodobnosť a štatistika má v osnovách slovenských stredných škôl získať výrazne väčší priestor, čo môže spôsobiť výrazne väčšie ťažkosti s odbúravaním predsudkov voči týmto disciplínam na vysokej škole.

Záver

Skutočný záver bude súčasťou pokračovania časti nášho článku. Tu len uvedieme, že sa v nej budeme venovať konštrukčnej geometrii na základnej škole a vyučovaniu vysokoškolákov pomocou počítačov. Tešíme sa na skoré stretnutie ...

Literatúra

[1] Hejný, M., Understanding and Structure, In CERME3 (Conference on European Research in Mathematics Edu-

cation 3, Group 11), Feb. 28 – March 3, Bellaria, Italy, http://www.dm.unipi.it/ didattica/CERME3. 2003.

[2] Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková. N. (Eds.), *25 kapitol z didaktiky matematiky*, 1. a 2. díl., Praha, PF UK, 2004.

[3] Hejný, M. at al., *Creative teaching in mathematics*, Charles University in Prague, Czech Republic, Kassel University, Germany, Aristotle University, Thessaloniki, Greece, University of Derby, United Kingdom. 2006.

[4] Hejný, M., Schéma – pilíř matematické znalosti, *Zborník príspevkov z letnej školy z vyučovania matematiky Pytagoras* 30.6-7.7, Hronec. 2007.

[5] Hejný, M., Kuřina, F., *Dítě, škola a matematika (Konstruktivistické přístupy k vyučování)*, Portál, Praha, 2001.

[6] Hejný, M., Michalcová, A., *Skúmanie matematického riešiteľského prístupu*, Metodické centrum Bratislava, 2001.

[7] Hejný, V., *„Výchova prací"*, vyjde ako súčasť prvého zväzku „Archívu Víta Hejného" v nakladateľstve EDIS Žilinskej univerzity.,

[8] Bachratá, K., Bachratý, H., *Rozumejú naši žiaci a študenti pravdepodobnosti a štatistike?*, Zborník príspevkov 41. konferencie slovenských matematikov, Jasná. 2009.

Doc. RNDr. Katarína Bachratá, PhD.
RNDr. Hynek Bachratý, PhD.
Katedra informačných sietí
Fakulta riadenia a informatiky Žilinskej univerzity
Univerzitná 1, 010 26 Žilina
Slovensko
e-mail: Katarina.Bachrata@fri.uniza.sk
e-mail: Hynek.Bachraty@fri.uniza.sk