

Martina Škorpilová

Maria Gaetana Agnesi a její čarodějná křivka

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 67 (2022), No. 2, 62–77

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/150446>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2022

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

Maria Gaetana Agnesi a její čarodějná křivka

Martina Škorpilová

Abstrakt. Maria Gaetana Agnesi (1718–1799) měla od malička pověst zázračného dítěte. Díky své pílì a velké vůli napsala velmi dobře hodnocenou učebnici a stala se zřejmě první ženou, která publikovala matematickou knihu pod svým jménem. Proslavila se studiem křivky, která je dnes pojmenována *Witch of Agnesi*. Své matematické bádání sama ukončila již krátce po třicátých narozeninách. Dobrovolně se vzdala i života v hmotném bohatství, aby se mohla věnovat starým, nemocným a chudým lidem.

V článku představíme klikaté životní osudy Marie Gaetany Agnesi a na základě původních pramenů podrobně a kompletně rozebereme její italský text o křivce, která nese její jméno.

1. Dětství a dospívání¹

Maria Gaetana (též Gaëtana) Agnesi se narodila 16. května 1718 v Miláně do místní bohaté rodiny.² Byla nejstarším dítětem Pietra Agnesiho (?–1752), který měl poté ještě dalších dvacet potomků, a to se svými třemi ženami. Matkou Marie Gaetany byla Anna Fortunato Brivio (zřejmě 1699–1732), která pocházela ze šlechtické rodiny Brivius de Brokles.

Příjmy rodiny plynuly z otcových obchodů s hedvábím.³ Pietro Agnesi se snažil, aby rodina žila kulturním životem a byla společensky uznávaná. Děti vedl od raného dětství ke vzdělání, kultivovanosti a poslušnosti. Mezi jeho dcery patřila i hudební skladatelka, cembalistka a zpěvačka Maria Teresa Agnesi Pinottini (1720–1795).⁴

Maria Gaetana byla velmi nadaná na jazyky. Již v pěti letech mluvila plynně nejen italsky, ale i francouzsky. O čtyři roky později přeložila z italštiny do latiny stať, kterou napsal jeden z jejích lektorů a která byla věnována obhajobě vyššího vzdělávání žen. Text byla poté schopná v latině z paměti přednést před širším publikem. V jedenácti letech zvládala také řečtinu, němčinu, španělštinu a hebrejštinu.

Otec Marii Gaetanu podporoval jak v jejích zájmech o jazyky, tak ve studiu filozofie a přírodovědných disciplín. Sehnal pro ni kvalitní, z církevního prostředí často pocházející pedagogy. Současně se vzděláním tak byla vedena k náboženské zbožnosti.

¹Při zpracování této kapitoly byly využity texty [3], [7], [9], [12], [16], [25].

²Milán byl tehdy součástí habsburské říše. Habsburkové ho měli v držení v letech 1525 až 1859.

³Výjimečně prameny uvádějí rovněž obchodování s vlnou. Naopak v relativně velkém množství zdrojů se mylně uvádí, že Pietro Agnesi byl profesorem na univerzitě v Bologni.

⁴Tři audio ukázky skladeb, které složila Maria Teresa Agnesi Pinottini, jsou dostupné na webové stránce <https://mathwomen.agnesscott.org/women/agnesi.htm>.

RNDr. MARTINA ŠKORPILOVÁ, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: stepanov@karlin.mff.cuni.cz

Její výuka se přitom nesla v reformním duchu – její učitelé například považovali za nezbytné začlenit základy experimentální vědy a nejnovější matematické výsledky do univerzitních kurzů.

Pietro Agnesi ve svém domě zřídil „kulturní salón“, v němž pořádal soaré. Tyto společenské akce byly nazývány *conversazioni* a byli na ně zváni posluchači z celé Evropy. Před nimi vystupovala malá Maria Gaetana se svými přednáškami z filozofie, matematiky, logiky, fyziky (nebeská mechanika, hydromechanika, pružnost, gravitace), chemie, botaniky, zoologie či mineralogie. Upoutávala svými následnými diskuzemi o těchto tématech s univerzitními učiteli a dalšími učiteli, které byly vedeny převážně v jazyce tazatele. V přestávkách mezi disputacemi obstarávala hudební program její o dva roky mladší sestra Maria Teresa.

Tyto společenské sešlosti byly pořádány po několik let. Pod jejich pokličku dává nahlédnout následující příspěvek vykreslující soaré konané 16. července 1739:

... I was brought into a large fine room, where I found about thirty people from all countries of Europe, arranged in a circle and Mlle Agnesi, all alone with her little sister, seated on a sofa. She is a girl of about twenty years of age, neither ugly nor pretty, with a very simple and very sweet manner. ... Count Belloni, who took me, wanted to make a public show. He began with a fine discourse in Latin to this young girl, that it might be understood by all. She answered him well, after which they entered into a dispute, in the same language, on the origin of fountains and on the causes of the ebb and flow which is seen in some of them, similar to tides at sea. She spoke like an angel on this topic, I have never heard anything so pleasurable...

She is much attached to the philosophy of Newton, and it is marvellous to see a person of her age so conversant with such abstract subjects. Yet however much I was amazed at her learning, I was perhaps more amazed to hear her speak Latin with such purity, ease and accuracy...

(v anglickém překladu [16]; originál ve francouzštině [3])

Z dnešního pohledu se jeví chování Pietra Agnesiho v podobě předvádění talentů svých dcer poněkud netaktní. V té době však byly takovéto společenské akce poměrně běžné. Je však nutné současně zdůraznit, že Maria Gaetana pouze poslušně plnila přání svého otce a neměla své výstupy příliš v lásce.

Vystupování obou sester před uznávanými hosty zajistilo rodině společenskou prestiž, což bylo pro otce nesmírně důležité. Ve třicátých letech 18. století se dokonce snažil získat rodinný erb.

Když bylo Marii Gaetaně ani ne patnáct let, její matka zemřela. Z dospívající dívky se tak stala hospodyně starající se o svých osm mladších sourozenců a zároveň učitelka vzdělávající své bratry. Otec Pietro se sice znovu oženil, ale smutná historie se opakovala (jeho druhá žena také zemřela; o osudu třetí ženy se neví) a Maria Gaetana nakonec pečovala o svých dvacet vlastních či nevlastních sourozenců. Jejich výuka umožnila Marii Gaetaně poznávat vzdělávací potřeby dětí a mládeže.

Při tom však – většinou po nocích a až do vyčerpání – vytrvale studovala (nejen) matematiku. V sedmnácti letech sepsala dobře hodnocené, avšak nepublikované ko-

mentáře k textu o kuželosečkách *Traité analytique des sections coniques* (1687), jehož autorem je známý francouzský matematik Guillaume de L'Hospital⁵ (1661–1704).

2. Raná dospělost⁶

Jakožto ženě jí nebylo dopřáno studovat na univerzitě. Většinu látky musela vstřebat samostudiem. Dopisovala si s odborníky a občas brala soukromé hodiny vedené významnými školiteli.⁷ Mezi nimi měl nejvýraznější vliv italský mnich⁸ Ramiro Rampinelli (1697–1759; narozen jako Lodovico Rampinelli). Byl učitelem matematiky a fyziky majícím významný vliv na šíření matematické analýzy, algebry a matematické fyziky na nejprestižnějších italských univerzitách. Napsal větší množství studijních textů, z nichž pouze jeden (*Lectiones opticae*) byl, a to posmrtně v roce 1760, publikován.⁹

V roce 1745 Rampinelli zavzpomínal na setkání s Marií Gaetanou Agnesi takto:

Shortly after, when I came to Milan, I had the pleasure of meeting Signora Contessa Donna Maria Agnesi who was very well versed in Latin, Greek, and even Hebrew languages, as well as other more familiar ones; moreover, she was very learned in the best Metaphysics, and in the Physics of the day, in Geometry, and in Mechanics for the purposes of Physics; she had some knowledge of Cartesian algebra, but she has acquired that by herself, because she had no one here who could enlighten her. She therefore wanted me to assist her in this study, as I did, and in a short time with extraordinary strength and depth of talent she mastered the Cartesian algebra, and the two infinitesimal calculi, to which she has added the application of them to the most sublime physical matters. I assure you that I have always been and still am amazed to see so much talent, and such depth of knowledge in a woman, that would be remarkable in a man, and especially to see the accompaniment of a very particular Christian moral virtue.
(v anglickém překladu [17])

Také tehdy, stejně jako v dnešní době, patřilo mezi povinnosti univerzitních studentů předložení závěrečné práce. Maria Gaetana, ač nebyla studentkou školy, takovýto text rovněž sepsala. Jednalo se o kolekci 191 studií o filozofii či přírodních vědách,

⁵Přesněji Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital (též de l'Hôpital), Marquis de Sainte Mesme, Comte d'Entremont et Seigneur d'Ouques la Chaise. Ani toto však není jeho plné jméno.

⁶Při zpracování této kapitoly byly využity texty [1], [5], [7], [9], [12], [16], [17], [23], [25].

⁷Existuje obsáhlá korespondence Marie Gaetany Agnesi s evropskými matematiky, neboť – s výjimkou letních pobytů na rodinném venkovském statku – nikam necestovala. Řada z jejích materiálů je uchována ve veřejné milánské knihovně.

⁸Člen olivetského řádu, též zvaného řád Panny Marie z hory Olivet.

⁹Pro zajímavost uvedme, že Rampinelliho cesta za matematikou nebyla snadná. Pomocí kamarádů sice již v mládí získal některé matematické knihy, jejichž autory jsou Eukleidés (kolem roku 300 př. Kr.), Archimédés (asi 287–212 př. Kr.) či Niccolo Tartaglia (1500–1557), ale jeho otec tyto spisy spálil, neboť chtěl mít ze syna právníka. Ramiro Rampinelli na protest utekl z domova. Jeho usmíření s rodinou a návrat k rodičům zajistil jezuita Gerolamo Bornati, který chlapce navíc nasměroval ke studiu algebry z knih již zmíněného Niccola Tartaglii, ale také Girolama Cardana (1501–1576) či Françoise Viëta (1540–1603). Rampinelli nakonec dva roky studoval na univerzitě v Boloni, a to pod vedením italského matematika Gabrielea Manfrediho (1681–1761). I poté získával další matematické vzdělávání od značného množství učitelů.

kteře pramenily z jejich již proběhnuvších veřejných diskuzí. V roce 1738 byly statě publikovány v *Propositiones Philosophicae* [1].

Již od matčiny smrti se stále výrazněji stavěla proti svým přednáškám na společenských sešlostech. Tento odpor vygradoval kolem roku 1738, tedy v době vydání esejí. Jejím přáním byl vstup do kláštera, proti čemuž se však rázně postavil její otec. Přesvědčoval ji, aby to nedělala. Maria Gaetana souhlasila, že bude i nadále žít v jeho domě a bude se starat jak o sourozence, tak o něj pod třemi podmínkami: bude moci kdykoliv chodit do kostela, bude se prostě oblékat a zcela se přestane účastnit plesů, divadelních představení a profánních zábav.

3. Stěžejní dílo *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*¹⁰

Stáhla se ze společenského života a o to více se věnovala studiu matematiky. Pokračovala ve výuce svých mladších sourozenců a zatoužila přiblížit matematiku širšímu počtu zájemců z řad mládeže. Na základě svých studijních materiálů určených pro její bratry proto začala sepsovat matematický text, který by byli schopni přečíst mladí studenti. Z tohoto důvodu nepsala učebnici v latině, ale v italštině. Snažila se předložit nejen text přístupný širšímu okruhu čtenářů, ale také kompletní a sjednocený materiál s důrazem na relativně nové poznatky té doby, tj. doby, v níž se úspěšně rozvíjel infinitezimální počet.¹¹

V roce 1748, po deseti letech vytrvalého bádání, vydala 1. část svého dvojdílného díla *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* [2]. Věnovala ho císařovně Marii Terezií (1717–1780), která jí jako výraz vděku darovala diamantové šperky. Druhý díl vyšel v roce následujícím. Celkem má text více než tisíc stran a je rozdělen do čtyř knih (*Libri*), jejichž názvy jsou: 1. *Dell' analisi delle quantità finite*, 2. *Del calcolo differenziale*, 3. *Del calcolo integrale* a 4. *Del metodo inverso delle tangenti*.

Dílo obsahuje algebru, analýzu i geometrii (elementární algebra, teorie rovnic, trigonometrie, diferenciální a integrální počet – včetně elementárních diferenciálních rovnic, nekonečné posloupnosti, geometrie v kartézské soustavě souřadnic, křivky, ...).¹²

Maria Gaetana Agnesi dbala na didaktický účel textu. Snažila se o přesné a jasné vysvětlení pojmů, uvedení velkého počtu příkladů a velmi zdařile sjednotila poznatky vycházející z různých pramenů. Často používala „řeč geometrie“, která se dnešnímu čtenáři jeví poněkud kostrbatě. Používala např. termín *obdélník* pro součin dvou proměnných; preferovala i důkazy využívající geometrii před ověřováním pomocí algebraické manipulace se symboly.

V úvodu díla poděkovala svému výše zmíněnému učiteli Rampinellimu. Ten ji totiž výrazně podporoval v napsání knihy a ovlivnil i její náplň. Navrhl, aby byl rukopis díla Marie Gaetany zaslán k nezávislému posouzení benátskému matematikovi a právníkovi Jacopovi Francescu Riccatimu (1676–1754), což byl jeho bývalý učitel.

Dne 9. června 1745 Rampinelli poprosil Riccatiho o pomoc následujícími slovy.

¹⁰Při zpracování této kapitoly byly využity texty [2], [5], [7], [9], [12], [16], [17], [25].

¹¹Uvědomme si, že Maria Gaetana Agnesi prožila své dětství v době, kdy ještě žil celosvětově proslulý anglický matematik, fyzik, astronom a teolog Isaac Newton (1643–1727), který položil základy diferenciálního a integrálního počtu.

¹²Skeny stran druhé až čtvrté knihy jsou dostupné online na adrese:
<https://books.google.cz/books?id=C0BbScsmb1QC&printsec=frontcover>.

She has taken note of all the chit-chat I have heard about Analysis, she has improved it making it much better, ordered, and increased it with her own contributions, and with the reading of books, in sum she has formed a body of it, which can be called an accomplished foundation of Analysis. Her father would love that this work be published; but both because I am incapable and also because in some way I have a small part of it, do not want to judge it; so I ask you and Conte Jacopo, that you kindly would take the trouble to go and read the manuscript, which apart from the other I would send you, when I feel you are to do me the favour, of which I beg. (v anglickém překladu [17])

Riccati nejen přislíbil, že rukopis přečte a okomentuje, ale o poznámky požádal i své syny Vincenza a Giordana.

Na následující rádcích je citace (v anglickém překladu) části dopisu, který 20. července 1745 Riccatimu napsala sama Maria Gaetana Agnesi.

Among the enormous feelings of obligation I hold towards my esteemed teacher Father Don Ramiro Rampinelli, I count also the honour your Lordship has granted me by deigning to cast your expert eye, and that of your worthy son Count Giordano, over the little that my meagre talents have allowed me to produce under the title of “Instituzioni analitiche” following the guidance and direction of a man with such great mathematical faculties, with the aim of as far as possible making the study of such a difficult and laborious study in itself easier for the young, . . .

I beg your most excellent Lordship to honour me with your sage criticisms and at the same time oblige me by placing your corrections in the margins, since Father Rampinelli, as my overly biased – or rather my overly modest – tutor, refuses to pass judgment on my work and has referred me to your infallible and unbiased opinions, advice and aid. (v anglickém překladu [17])

Jakmile Maria Gaetana Agnesi obdržela od Jacopa Riccatiho komentáře k 1. dílu, zapracovala je do poslední verze textu, a to včetně zahrnutí některých jeho nových matematických výsledků. Poté se postarala o tisk 1. dílu (Riccati mezitím oponoval díl druhý). Díky otcovým financím dokázala zajistit přesun části tisku knihy do svého domu, a mohla tak na postup osobně dohlížet. Tiskářům například radila, jak pracovat s matematickými symboly a grafy.

4. Čarodějná křivka¹³

Kromě zdařilého didaktického zpracování patří mezi klady učebnice zahrnutí zcela nových, byť ne zásadních poznatků té doby.¹⁴ Přesto je dílo známo hlavně kvůli jediné skutečnosti, a to studiu křivky, která je dnes v anglicky psané literatuře označována poetickým názvem *Witch of Agnesi* (vývoj termínu viz níže). V článku budeme křivku dále nazývat *čarodějnicí z Agnesi* nebo jednoduše *čarodějnou křivkou*.

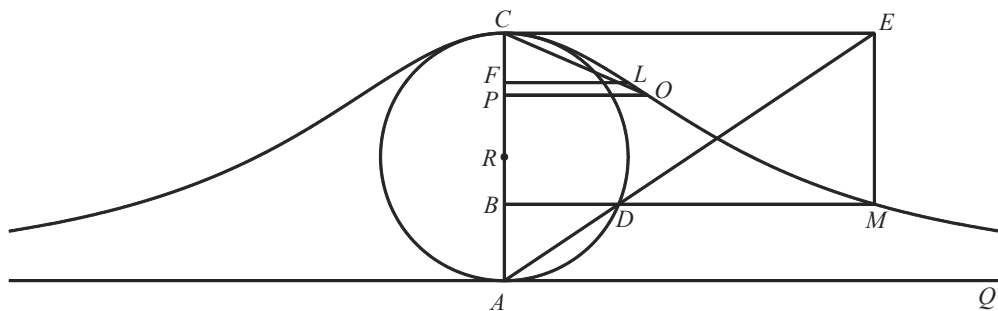
¹³Při zpracování této kapitoly byly využity texty [2], [5], [9], [15], [16], [21], [25].

¹⁴Maria Gaetana Agnesi podstatnými novými poznatky nepřispěla, snažila se však dodat vlastní závěry a metody řešení.

Maria Gaetana Agnesi pojem zavedla a studovala v 1. dílu na stranách 380–382 (1. kniha, 5. kapitola na stranách 351–415) tímto způsobem:¹⁵

Uvažovala půlkružnici určenou různými body A , D , C sestrojenou nad průměrem AC (viz obr. 1). Hledala takový bod M , aby ležel na přímce, která prochází bodem D a je kolmá na průměr AC (patu kolmice označila B), a aby současně platilo $|AB| : |BD| = |AC| : |BM|$ (v jejím značení AB , $BD :: AC$, BM). Poznamenala, že těchto bodů je nekonečně mnoho (místo bodu D můžeme uvažovat nekonečně mnoho bodů dané půlkružnice), a je tedy požadováno určit množinu všech bodů uvedených vlastností. Připojila odkaz na obrázek č. 135, který nebyl uveden přímo u textu, ale byl součástí obrazové přílohy učebnice umístěné na konci 1. knihy.

Obr. 1 je původní ilustrace č. 135 z učebnice *Instituzioni analitiche* překreslená moderním softwarem (originální obrázek viz např. [21]). Podotkněme, že původní obrázek je značně nepřesný. Můžeme jen odhadovat, zda se jedná o důsledek technického problému v podobě sazby a tisku ilustrací. Dále si všimněme, že ač autorka psala o půlkružnici, zakreslila celou kružnici.



Obr. 1. Původní definice křivky

Dále pokračovala takto:

Sia M uno di quefti punti, e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, farà, per la proprietà del circolo, $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema, farà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax - xx} :: a, y$; e però $y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x}$, o fia $y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da deferiverfi, che dicefi la Versiera.

([2], str. 380–381; viz též [21])

Nyní její konstrukci, resp. úvahy okomentujme a snadno rozklíčujme pro současné české čtenáře. Protože $|CE| = |BM|$, kde bod E je průsečíkem přímky AD a kolmice vedené bodem C na úsečku AC , lze poměr $|AB| : |BD| = |AC| : |BM|$ nahradit poměrem $|AB| : |BD| = |AC| : |CE|$. Tento poměr lze interpretovat geometricky jako poměr stran podobných trojúhelníků ADB a AEC , a je tedy důležité sestrojít bod E (naopak bod B není nutné sestrojovat).

¹⁵Při dnešní sazbě by se text vešel přibližně na jednu stranu formátu B5. Originální definice křivky v italštině viz např. [21].

(např. místo x^2 psala xx). Dále si uvědomme, že pokud bychom zavedli kartézský souřadnicový systém s počátkem v bodě A , jehož vertikální osa (v dnešním značení osa y) splývá s přímkou AC , má bod M souřadnice $[y, x]$. Agnesi používala označení y pro horizontální osu a x pro vertikální osu.

Přeznačme tedy ve vztahu (1) x na y a naopak y na x . Získáme

$$x = \frac{a \cdot \sqrt{a - y}}{\sqrt{y}}$$

a pomocí jednoduchých úprav vyjádříme y :

$$\begin{aligned} x^2 y &= a^3 - a^2 y, \\ y &= \frac{a^3}{x^2 + a^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Právě tento funkční předpis nacházíme v souvislosti s čarodějnou křivkou v současných publikacích. Případně je místo parametru a (průměr kružnice) využíván parametr r (poloměr kružnice), pro který platí $2r = a$. Potom je

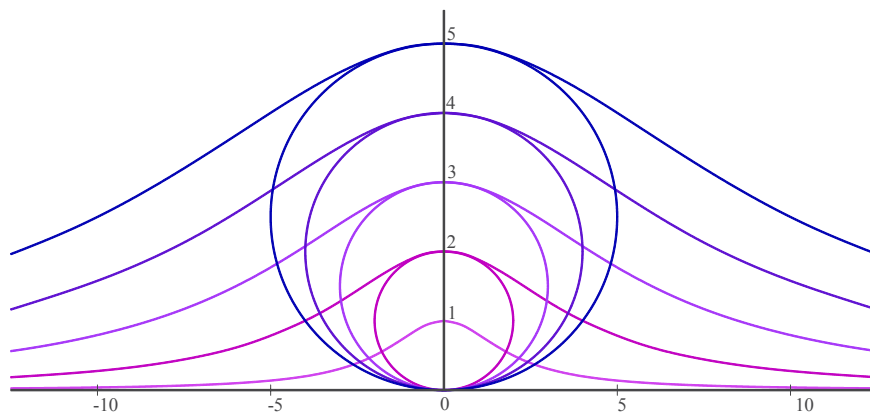
$$y = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}.$$

Častá práce s parametrem je dalším typickým znakem přístupu používaného v *Instituzioni analitiche*. Maria Gaetana Agnesi uvažovala např. obecnější případ rovnice $y^3 = axx$ místo $y^3 = xx$ pro $a = 1$ apod.

Dosaďme dále konkrétní hodnotu $a = 1$ do vztahu (2). Získáme předpis známé funkce

$$y = \frac{1}{x^2 + 1},$$

která je derivací funkce arkustangens.¹⁶ Grafy pěti funkcí pro různé hodnoty parametru a ($a = 1, 2, 3, 4, 5$) jsou znázorněny na obr. 3.



Obr. 3. Průběh křivky v závislosti na parametru a

¹⁶Výjimečně je termín *Witch of Agnesi* používán úžeji pouze pro tuto funkci příslušející $a = 1$.

Nyní se vraťme k původnímu italskému textu o křivce. Maria Gaetana Agnesi po uvedení konstrukce křivky a vztahu mezi souřadnicemi jejích bodů napsala, že jelikož je $|AB| = x$ a $|BM| = y$, je osou x přímka AC a osou y přímka AQ rovnoběžná s přímkou BM . Poté s využitím vztahu (1) studovala zajímavé body křivky se speciálními souřadnicemi. Napsala, že pro $x = 0$ je $y = \infty$, a proto je přímka AQ asymptotou křivky. Je-li $y = 0$, je $a\sqrt{a-x} = 0$, a proto $x = a$. Bude-li tedy $x = a$, potom křivka protne osu AC v bodě C , který bude jejím vrcholem. Dále se věnovala případům, kdy (viz obr. 1) $x = |AR| = \frac{a}{2}$, $x = |AP| = \frac{3a}{4}$ a $x = |AF| = \frac{4a}{5}$, a dopočítala, že příslušné souřadnice y jsou po řadě $y = a$, $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ a konečně $y = a\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{a}{2}$. Pro případ $x > a$ dospěla k závěru, že hodnota pod odmocninou vyskytující se v čitateli zlomku ve vztahu (1) bude negativní, a tudíž je „křivka imaginární“ (*curva immaginaria*).

Poté vyšetřovala (pro kladná y) konvexnost a konkávnost funkce vzhledem k ose $x = AC$. Využila přitom rovnosti poměrů (sledujme trojúhelník POC a body F , L na obr. 1). Poměr $|CP| = \frac{a}{4}$ (což odpovídá $x = \frac{3a}{4}$) ku $|PO| = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ je stejný jako poměr $|CF| = \frac{a}{5}$ (což odpovídá $x = \frac{4a}{5}$) ku $\frac{4a\sqrt{\frac{1}{3}}}{5}$ (jedná se o vzdálenost bodu F od průsečíku úseček CO a FL). Pro $x = \frac{4a}{5}$ je $y = |FL| = a\sqrt{\frac{1}{4}}$, a protože $\frac{4a\sqrt{\frac{1}{3}}}{5}$ je menší než $y = |FL| = a\sqrt{\frac{1}{4}}$, je funkce na uvažovaném intervalu „mezi body“ C , P konkávní vzhledem k přímce AC . Dále konstatovala toto: Jelikož je přímka AQ asymptotou, musí současně existovat interval, na kterém je funkce konvexní. Musí proto existovat i inflexní bod, který najdeme metodou uvedenou na jiném místě učebnice.

V závěru uvažovala případ, kdy je x záporné (zde evidentně myslela zápornou souřadnici x , nikoliv „zápornou vzdálenost“ $x = |AB|$). Napsala, že jelikož je výraz pod odmocninou ve jmenovateli vztahu (1) záporný, je souřadnice y imaginární. Nakonec z dosažených výsledků vyvodila, že graf funkce vypadá tak, jak je znázorněno na odkazovaném obr. 135, přičemž graf má ještě část „na druhé straně od přímky AC “, která přísluší záporným souřadnicím y a která je shodná s křivkou CLM . Tím její výklad o křivce skončil.

V krátkosti poznamenejme, že křivka má dva inflexní body: $\left[-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3a}{4}\right]$ a $\left[\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3a}{4}\right]$. Má evidentně jediný vrchol, kterým je bod dotyku C křivky a zadávající kružnice k . Tato kružnice je pro křivku zároveň kružnicí (hyper)oskulační.

Obsah kruhu s hraniční kružnicí k je roven $\frac{\pi a^2}{4}$. Jelikož obsah plochy ohraničené čarodějnou křivkou a horizontální osou je roven πa^2 , jedná se o čtyřnásobek obsahu zmíněného kruhu.

Čarodějná křivka má své využití v teorii pravděpodobnosti, numerické analýze či moderní fyzice (viz například [6], [10], [13], [18] či [20]).

5. Historický vývoj křivky a termínu *Witch of Agnesi*¹⁷

Maria Gaetana Agnesi nebyla první, která čarodějnou křivku studovala. Rovnici křivky předložil již v šedesátých letech 17. století francouzský matematik a právník Pierre de

¹⁷Při zpracování této kapitoly byly využity texty [2], [5], [7], [8], [9], [14], [15], [16], [21], [24].

Fermat (1601–1665).¹⁸ Italský matematik Luigi Guido Grandi (1671–1742) představil roku 1703 konstrukci křivky v knize *Quadratura circuli, et hyperbolae per infinitas hyperbolas, & parabolae quadrabiles geometricè exhibita, & demonstrata* [8] a v roce 1718 ji, kvůli jejímu tvaru, označil latinským termínem *versoria*, což znamenalo *lano, které otáčí plachtou*. Navrhl rovněž italský název *la Versiera*:

Quando poi le forze fussero reciproche de' quadrati delle distanze, sarebbe la scala AGFH un'iperbola quadratica fra gli stessi asintoti; e la scala delle velocità ACV sarebbe quella curva, che io descrivo nel mio libro delle quadrature alla prop. 4. nata da' seni versi, che da me suole chiamarsi la Versiera in latino però Versoria. . . ([24])

Křivku zřejmě studoval i výše zmíněný velikán Isaac Newton (1643–1727).

Čarodějná křivka nedávala spát ani matematikům, kteří si již mohli učebnici *Instituzioni analitiche* přečíst. Snažili se např. pomocí podobné transformace zavést křivku s názvem *pseudo versiera*. Analogii čarodějné křivky, která je sestrojitelná obdobným způsobem jako její slavnější předchůdkyně, předložil roku 1887 dokonce i slavný italský matematik, filozof a logik Giuseppe Peano (1858–1932). Nazval ji *visiera of Agnesi* (*visiere* znamená v italštině *hledáček* či *hledíc*).

Věnujme se nyní vývoji anglického termínu *the Witch of Agnesi*, který je dnes pro křivku běžně používán. Z italské citace části textu učebnice *Instituzioni analitiche* uvedené v tomto článku na straně 67 je neoddiskutovatelné, že Maria Gaetana Agnesi křivku pojmenovala *la Versiera* (. . . *equazione alla curva da deferiverfi, che dicefi la Versiera*). Použila tedy termín stejný jako Luigi Guido Grandi.

Hypotéz vzniku pohádkového, anglického termínu *the Witch of Agnesi* existuje velké množství. Vzhledem ke skutečnosti, že k uvedení termínu *la Versiera* v *Instituzioni analitiche* došlo v polovině 18. století a některá slova již dnešní slovníky nepřeloží, nepodařilo se nám mezi různými domněnkami nalézt tu, která by byla jednoznačně správná. Uvedeme zde dvě hypotézy, které se jeví jako nejpravděpodobnější.

Učebnice natolik zaujala Johna Colsona (1680–1760), že ji chtěl přeložit do angličtiny. Lukasiánský profesor matematiky¹⁹ John Colson již měl úspěšný překlad matematického textu do angličtiny za sebou. Z latiny totiž přeložil dílo *De Methodis Serierum et Fluxionum* [14] Isaaca Newtona. S překladem *Instituzioni analitiche* však měl „malý“ problém. Neuměl italsky. Byl ale natolik vnořen do svého snu, že se kvůli překladu italštinu naučil. V překladu díla o 1 020 stranách by se jistě chybička vloudila i zkušenému znalci italštiny, natož Colsonovi. Ten si popletl slovo *la versiera* se slovem *l'aversiera*, což znamená *čarodějnice* nebo *žena dábla*. A chytlavý anglický termín *the Witch* byl tímto na světě!

Poslední část výše uvedené ukázky v italštině tak v Colsonově překladu zní . . . *will be the equation of the curve to be described, which is vulgarly called the Witch*. [21]

¹⁸Některé prameny uvádějí konkrétní rok 1665. Vzhledem k tomu, že Fermat zemřel 12. ledna 1665, musel by rovnici představit v posledních dnech svého života.

¹⁹Titul *Lucasian Chair of Mathematics* je označením osoby, která je profesorem matematiky na univerzitě v Cambridgi. Tento jeden z nejprestižnějších postů v akademické komunitě v celosvětovém měřítku založil roku 1663 ve své poslední vůli Henry Lucas (asi 1610–1663), který v letech 1639 a 1640 zasedal za univerzitu v Dolní sněmovně. Nositeli titulu byli např. Isaac Newton, George Stokes (1819–1903), Paul Dirac (1902–1984) či Stephen Hawking (1942–2018).

Druhé vysvětlení je položeno na záměně italského slova *versiera*, které má původ v latinském slově *vertere* (=otáčet se, měnit) a které mohlo být považováno za zkratku pro *aversiera*, což znamená žena ďábla.

Překvapivé však je, že v dnešní italštině je *versiera* skutečně překládána jako *čertice* či *ďáblice*.

K anglickému překladu *Analytical Institutions in four books: originally written by Donna Maria Gaetana Agnesi* ještě dodejme, že byl vydán až roku 1801, tedy více než čtyřicet let po Colsonově smrti. Editován byl Johnem Hellinsem. V anglickém překladu jsou obrázky přímo u příslušného textu (tj. nejsou, na rozdíl od originálu, shromážděny v obrazových přílohách). Bohužel i zde je obrázek čarodějně křivky značně nepřesný (dokonce ještě více než v původní italské verzi).

6. Ohlasy na *Instituzioni analitiche*²⁰

Po esejích vydaných v roce 1738 v *Propositiones Philosophicae* byl spis *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* druhým a zároveň posledním textem Marie Gaetany Agnesi publikovaným během jejího života. Vzbudil velmi pozitivní reakce v akademické komunitě po celé Evropě a stal se jejím stěžejním dílem. V polovině 18. století byl naprostou výjimkou mezi učebnicemi a stal se studijním materiálem využívaným po další století. Je zřejmě prvním dochovaným matematickým dílem napsaným ženou pod svým jménem. Maria Gaetana Agnesi se učebnicí proslavila a začalo se na ni pohlížet jako na matematicku, což bylo tehdy velmi výjimečné.

Učebnice byla přeložena do mnoha jazyků a využívána byla nejen v Itálii, ale i ve Francii a Německu. Francouzská společnost *Académie des Sciences* o díle napsala:

It took much skill and sagacity to reduce, as the author has done, to almost uniform methods these discoveries scattered among the works of modern mathematicians and often presented by methods very different from each other. Order, clarity and precision reign in all parts of this work. . . . We regard it as the most complete and best made treatise. (v anglickém překladu [16])

Dalšího uznání se dílo dočkalo ze zcela nečekané strany. Papež Benedikt XIV. (1675–1758), vlastním jménem Prospero Lorenzo Lambertini, v mládí studoval matematiku a v době svého pontifikátu v letech 1740 až 1758 podporoval vzdělávání a nové vědecké metody. Věděl, že práce *Instituzioni analitiche* přinese Itálii uznání, a proto autorku kontaktoval. V prvním dopisu z června 1749 jí pogrataloval k vydání učebnice a jmenoval ji čestným členem boloňské univerzity. Obdaroval ji zlatou medailí a zlatým věncem zdobeným drahými kameny. Ve druhém dopisu, který napsal v září 1750, jí – podporován čtyřmi profesory – nabídl na univerzitě v Boloni akademické místo.

Maria Gaetana Agnesi nabídku zřejmě výslovně ani nepřijala, ani neodmítla. Na univerzitě však nikdy neučila, byť obdržela papežský reskript potvrzující její jmenování. Pozici tak zastávala jen jako čestnou, a to v letech 1750 až 1752.

²⁰Při zpracování této kapitoly byly využity texty [5], [9], [16].

7. Odklon od matematiky a závěr života²¹

V roce 1752 zemřel její otec a ona postupně zcela opustila jakékoliv vědecké aktivity.²² Byla přesvědčena, že veškerý její přínos k matematice byl již předán.

Chtěla se věnovat studiu náboženství, výuce a především charitě. Dále opečovávala své mladší sourozence, po otci převzala dohled nad jejich vzděláváním. Začala učit číst, psát a počítat dívky z chudých poměrů a dále pracovala jako dobrovolnice v nemocnici. V domě svého zesnulého otce a poté i na dalších místech založila pro staré, nemohoucí ženy, kterým již nebylo pomoci, hospic. V roce 1771 se stala ředitelkou ženské části *Pio Albergo Trivulzio*, což byla největší charitativní organizace v Miláně starající se o staré, nemocné a chudé.²³

Funkci zastávala po dobu takřka třiceti let. V závěru života postupně ohluchla a oslepla. Své finance a dědictví odkázala charitativním institucím a příbuzným. Zemřela dne 9. ledna 1799 v 80 letech v Miláně, ve městě svého narození, a to v jednom z chudobinců, které sama založila. Příčinou smrti byl zřejmě hydrothorax (nahromadění tekutiny v hrudní dutině). Pohřbena je ve společném hrobě u městských hradeb.

8. Maria Gaetana Agnesi a čarodějná křivka kolem nás²⁴

Více než 220 let po smrti Marie Gaetany Agnesi se může s jejím jménem, resp. s čarodějnou křivkou potkat i člověk, který se matematikou vůbec nezabývá. Je velmi překvapivé, že příjmení ženy, která většinu svého života žila asketickým způsobem, se dostalo do názvu alkoholického nápoje. *Agnesi 1799* je pětiletá americká brandy dolévaná pramenitou vodou z Napa Valley v kalifornském Rutherfordu. Na láhvi (viz obr. 4) je znázorněn nejen portrét matematicky, ale i *čarodějnice z Agnesi* spolu s příslušnou konstrukcí. Kromě názvu nápoje²⁵ a pojmenování křivky je na láhvi uveden i matematický vztah (2) mezi kartézskými souřadnicemi bodů křivky.²⁶

Americký spisovatel Robert Spiller, který byl třicet pět let učitelem matematiky, než se v důchodu začal naplno věnovat psaní, nazval jednu ze svých knih *The Witch of Agnesi*.²⁷ Román je prvním svazkem ze série tajemných Spillerových textů, do níž dále patří *A Calculated Demise, Irrational Numbers, Radical Equations* či *Napier's Bones*. V příběhu knihy *The Witch of Agnesi* zasazeného do Colorada najde středoškolský učitel přírodních věd vraha svých třech studentů.

Souvislost rodiny Agnesi a hudby nalezneme nejen díky již zmíněné Marii Terese Agnesi Pinottini, sestře Marie Gaetany Agnesi. Název *The Witch of Agnesi* například zvolila pro jedno ze svých děl kanadská skladatelka Elma Miller (1954). Skladba pro klarinet, basklarinet, lesní roh, dvě perkuse, violu a kontrabas byla poprvé představena

²¹Při zpracování této kapitoly byly využity texty [9], [16].

²²Odmítla např. nabídku univerzity v Turíně být odborným znalcem spisů o variačním počtu mladého Josepha-Louise Lagrange (1736–1813), jednoho z největších matematiků 18. století.

²³Domov s pečovatelskou službou a nemocnicí *Pio Albergo Trivulzio*, přesněji *Azienda di servizi alla persona Istituti Milanesi Martinitt e Stelline e Pio Albergo Trivulzio*, funguje i dnes. Jeho kořeny sahají do roku 1766.

²⁴Při zpracování této kapitoly byly využity texty [4], [7], [9], [11], [19], [22].

²⁵Číslo 1799 je, jak již bylo řečeno, rokem úmrtí Marie Gaetany Agnesi.

²⁶Souhlas s otištěním fotografie brandy *Agnesi 1799* poskytla společnost Great Woman Spirits.

²⁷Obrázek knihy je dostupný na adrese <https://archive.org/details/witchofagnesi00spil>.



Obr. 4. Brandy Agnesi 1799

roku 1989 v Torontu.

Americký multiinstrumentalista, altsaxofonista, skladatel a hudební producent John Zorn (1953), jehož tvorba zahrnuje mnoho žánrů (jazz, experimentální a avantgardní hudba, noise, klezmer atd.) a jehož diskografie čítá přes čtyři sta položek, vydal v roce 1996 album *Tears of Ecstasy*. Tento jeho počín, zařazený jako pátý v rámci dvacetipětidílné série alb *Filmworks* z let 1991 až 2013, obsahuje 48 krátkých skladeb. V pořadí 31. z nich se jmenuje *Witch of Agnesi*; další potom např. *Lemma*, *Root*, *Lie Group*, *Reduction*, *Interpolation*, *Gradients*, *Random Walk*, *Prism*, *Limit*, *Tensor*, *Rank*, *Quadrature*, *Discriminant*, *Involute*, *Spiral*, *Cissoïd of Diocles* či *Arc*.²⁸

V roce 2018 vydalo jazzové kvarteto *Radius* ve složení Alan Lechusza (saxofon,

²⁸Skladby na albu *Filmworks V: Tears of Ecstasy* si je možné poslechnout pomocí služby Spotify na webové stránce <https://open.spotify.com/album/5IHwMjZevqngasxfcnMx26>, kde jsou samozřejmě uvedeny i jejich názvy. Hudba Johna Zorna je rovněž dostupná na serveru YouTube – pro konzervativnější posluchače doporučujeme např. skladbu *Between two worlds*, příznivcům alternativnější hudby např. album *Naked City* či některý z živých koncertů.



Obr. 5. Album *Witch of Agnesi* a vatikánská poštovní známka

flétna, klarinet, hoboj, basklarinet), Mark Weaver (tuba), Damon Smith (kontrabas) a Dave Wayne (bicí) album, jehož název je *Witch of Agnesi* a na jehož přebale (viz obr. 5) je uvedena čarodějná křivka spolu s poměrem délek úseček, který použila Maria Gaetana Agnesi k zavedení křivky.²⁹

V tomtéž roce 2018, u příležitosti třístého výročí narození Marie Gaetany Agnesi, vyšla v Itálii a ve Vatikánu dvojice poštovních známek. Italská známka je součástí kolekce čtyř známek oslavující kvarteto italských nadaných žen (Maria Gaetana Agnesi, filozofka Elena Lucrezia Cornaro Piscopia (1646–1684), botanička Eva Mameli Calvino (1886–1978) a spisovatelka Ada Negri (1870–1945)). Je na ní portrét matematičky doplněný čarodějnou křivkou.³⁰ Na vatikánské známce je jednak celá postava modlící se Marie Gaetany Agnesi, u jejíž nohou leží arch papíru s náčrtem čarodějné křivky, a dále vztah $y = 8 \cdot \frac{3^3}{x^2 + 4 \cdot 3^2}$ pro výpočet souřadnic y bodů čarodějné křivky pro poloměr $r = 3$ zadávající kružnice (viz obr. 5).³¹

Jméno matematičky nesou i italské školy (např. milánské školy *Istituto magistrale Gaetana Agnesi* a *Liceo Statale Gaetana Agnesi*), ulice (např. ve městech Milán, Monza či Bovisio-Masciago) a nadace.³² Připomeňme, že v Miláně dodnes slouží hospic, který Maria Gaetana Agnesi založila a který je známý po celé Itálii.

Opustíme-li při pátrání po příjmení *Agnesi* Zemi a vydáme-li se hledat i na planetu Venuši, budeme také úspěšní. Nalezneme na ní totiž kráter nesoucí jméno *Agnesi*.³³

²⁹Souhlas s otiskem obalu CD a poštovní známky poskytli Mark Weaver, Plutonium Records a Ufficio Filatelico e Numismatico ve Vatikánu.

³⁰Všechny čtyři známky viz [4].

³¹Viz též <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Miller/images/agnesi2.jpg>.

³²V Miláně existuje malý park *Giardino Maria Teresa Agnesi* pojmenovaný po sestře matematičky.

³³Až na naprosté výjimky jsou na základě rozhodnutí *International Astronomical Union* pojmenovávány útvary na povrchu Venuše pouze ženskými jmény. První Češkou, po které byl kráter na Venuši pojmenován, byla spisovatelka Božena Němcová (1820–1862).

9. Závěr

Jelikož se ztotožňujeme s výstižným závěrem článku [5], dovolíme si ho zde citovat. Jeho autorkou je italsko-americká matematicka Antonella Cupillari, jejíž publikace se věnují historii a vyučování matematiky.

We have to wonder how well Agnesi's name would be remembered if she had decided that the Versiera was not interesting enough to be included in Chapter V, or if Reverend Colson had had more time to learn Italian. Such is serendipity, and the irony of the situation in which a very knowledgeable, complex, and religious woman was made famous by a simple name: "the Witch". ([5])

Poděkování. Děkuji tímto doc. Antonínu Slavíkovi za jeho podnětné komentáře a cenné postřehy vedoucí k vylepšení textu.

L i t e r a t u r a

- [1] AGNESI, M. G.: *Propositiones philosophicae quas crebris disputationibus domi habitis coram clarissimis viris explicabat extempore, et ab objectis vindicabat Maria Cajetana de Agnesiis mediolanensis*. Malatesta, Milán, 1738.
- [2] AGNESI, M. G.: *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*. Nella Regia-Ducal Corte, Milán, 1748, 1749. Anglický překlad Colson, J.: *Analytical Institutions in four books: originally written by Donna Maria Gaetana Agnesi*. Taylor & Wilks, London, 1801.
- [3] DE BROSSES, CH.: *Lettres historique et critiques sur l'Italie*. Paris, 1799.
- [4] Comunicato – Emissione francobolli dedicati al genio femminile italiano. Dostupné z: <https://www.mise.gov.it/index.php/it/34-comunicazioni/postale/2037822-comunicato-emissione-francobolli-dedicati-al-genio-femminile-italiano>
- [5] CUPILLARI, A.: *Maria Gaetana Agnesi's other curves (more than just the Witch)*. Math. Mag. 87 (2014), č. 1, 3–13.
- [6] CUPILLARI, A., DETHOMAS, E.: *Unmasking the witchy behavior of the Runge function*. Math. Comput. Educ. 41 (2007), č. 2, 143–156.
- [7] DUMBAUGH, D.: *Maria Gaetana Agnesi 1718–1799*. Notices Amer. Math. Soc. 66 (2019), č. 3, 414–415.
- [8] GRANDI, G.: *Quadratura circuli, et hyperbolae per infinitas hyperbolas, & parabolas quadrabiles geometricè exhibita, & demonstrata*. Pisa, Franciscus Bindus, 1703.
- [9] KRAMER, E. A., a kol.: *Agnesi, Maria Gaetana*. Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York 1970–1990). Dostupné z: <https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/maria-gaetana-agnesi#2830900055>
- [10] LAMB, K. G.: *Numerical simulations of stratified inviscid flow over a smooth obstacle*. J. Fluid Mech. 260 (1994), 1–22.
- [11] Maria Gaetana Agnesi 1799 Small Batch Brandy. Dostupné z: <https://uptownspirits.com/product/liquor/brandy/maria-gaetana-agnesi-1799-small-batch-brandy/>

- [12] MAZZOTTI, M.: *World of Maria Gaetana Agnesi, Mathematician of God*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2007.
- [13] MCKENZIE, A. J.: *Decision theory meets the Witch of Agnesi*. J. Philos. 109 (2012), č. 12, 712–727.
- [14] NEWTON, I.: *De methodis serierum et fluxionum*. Vydáno v překladu Colson, J.: *The method of fluxions and infinite series: with its application to the geometry of curve-lines*. Henry Woodfall, London, 1736.
- [15] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F.: *Curves. Witch of Agnesi*. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Witch/>
- [16] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F.: *Maria Gaëtana Agnesi*. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Agnesi/>
- [17] O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F.: *Ramiro Lodovico Rampinelli*. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rampinelli/>
- [18] SPENCER, R. C.: *Properties of the Witch of Agnesi—Application to fitting the shapes of spectral lines*. J. Opt. Soc. Am. 30 (1940), č. 9, 415–419.
- [19] SPILLER, R.: *The Witch of Agnesi*. Medallion Press, 2006.
- [20] STIGLER, S. M.: *Studies in the history of probability and statistics. XXXIII. Cauchy and the Witch of Agnesi: An historical note on the Cauchy distribution*. Biometrika 61 (1974), č. 2, 375–380.
- [21] SWETZ, F. J., KAT, V. J.: *Mathematical treasures – Maria Agnesi's Analytical Institutions*. Dostupné z: <https://www.maa.org/book/export/html/116929>
- [22] Štefánikova hvězdárna. Názvosloví povrchových útvarů. Dostupné z: <https://www.observatory.cz/static/elearn/slidepump.php?chapter=venuse&page=56>
- [23] TRUESDELL, C.: *Maria Gaetana Agnesi*. Arch. Hist. Exact Sci. 40 (1989), 113–142.
- [24] TRUESDELL, C.: *Correction and additions for Maria Gaetana Agnesi*. Arch. Hist. Exact Sci. 43 (1991), 385–386.
- [25] UNLU, E.: *Maria Gaetana Agnesi*. Biographies of women mathematicians. Dostupné z: <https://mathwomen.agnesscott.org/women/agnesi.htm>