Ladislav Beran; Milan Trch

Egyptské zápisy zlomků I. Řešení neurčitých rovnic

Učitel matematiky, Vol. 18 (2010), No. 1, 28–35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150499

EGYPTSKÉ ZÁPISY ZLOMKŮ I

Řešení neurčitých rovnic

LADISLAV BERAN, MILAN TRCH

Podnětem k napsání tohoto článku nebyla jen práce [2] o zlomcích v přípravě učitelů, ale zmínka o pokusu s kmenovými zlomky, který proběhl na jedné základní škole v Praze. Podstatu problému dobře vystihuje poznámka k řešení jedné úlohy z Rhindova papyru uvedená v [3], str. 16. Cituji: *Protože Egypťané neznali zlomky tvaru* $\frac{m}{n}$, *zapsali zlomkovou část odpovědi jako součet kmenných zlomků tvaru* $\frac{l}{n}$, *přitom dbali, aby tyto zlomky byly navzájem různé.* Na straně 17 je řešena úloha, která má následující zadání: *Celá hromada, její dvě třetiny, její polovina a její sedmina tvoří dohromady 37 kusů. Kolik kusů je v celé hromadě?.* Výsledek ve tvaru 16 a $\frac{2}{97}$ doplňuje autor následujícím komentářem: *V Egyptě ovšem zapisovali* $\frac{2}{97}$ *jako součet* $\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$, *pro čísla* $k = 3, 5, \ldots, 101$ *existovaly tabulky rozkladů na zlomky tvaru* $\frac{1}{n}$.

Postupy a obraty používané Egypťany při vyjadřování podílů přirozených čísel jsou popsány v [4]. Tam lze nalézt vyjádření zlomků typu $\frac{2}{k}$ pro $2 < k < 102$ součtem konečného počtu kmenových zlomků. Jestliže dříve umožňovaly součty kmenových zlomků řešit úlohy z praxe a dělit celek na stejné části, představují dnes součty kmenových zlomků zajímavé a velmi zvláštní zápisy racionálních čísel. Ukazuje se, že součtem různých kmenových zlomků je možné vyjádřit každé kladné racionální číslo. Pro libovolné přirozené číslo n však také existují zlomky, které nelze vyjádřit součtem méně než n kmenových zlomků. Vyjadřování zlomků součty kmenových zlomků nabízí netradiční úlohy, které mohou zpestřit výuku matematiky, ale také problematiku, kterou je třeba podrobně prozkoumat z hlediska matematiky i didaktiky matematiky.

Kmenové zlomky, egyptské zápisy zlomků a neurčité rovnice.

Kmenovým zlomkem se rozumí každý zlomek $\frac{1}{q}$, kde q je přirozené číslo, $q > 1$. *Egyptským zápisem zlomku* $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, budeme rozumět každý součet k po dvou různých kmenových zlomků $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_k}$, pro který platí rovnost:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}.$$

Dva egyptské zápisy zlomku $\frac{p}{q}$ pokládáme za různé tehdy, kdykoliv jeden ze zápisů obsahuje kmenový zlomek, který se ve druhém nevyskytuje. To zřejmě nastává vždy, když mají oba zápisy různý počet sčítanců. Mají-li dva různé egyptské zápisy nějakého zlomku stejný počet sčítanců, lze nahlédnout, že se oba zápisy musí lišit alespoň dvěma různými kmenovými zlomky.

Pokud lze zlomek $\frac{p}{q}$ zapsat alespoň jedním způsobem součtem k po dvou různých kmenových zlomků, potom je neurčitá rovnice

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k}$$

o k neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_k$ řešitelná přirozenými čísly. Řešením této neurčité rovnice se rozumí každá uspořádaná k-tice přirozených čísel $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$, pro kterou platí $\frac{p}{q} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_k}$. Jedním z možných řešení této rovnice je také uspořádaná k-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ po dvou různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Součet konečného počtu racionálních čísel nezáleží na jejich pořadí ani na jejich ozávorkování. Proto je možné (bez újmy na obecnosti) předpokládat, že přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$ splňují navíc podmínku $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. To znamená, že ke každému egyptskému zápisu zlomku $\frac{p}{q}$ lze jednoznačně přiřadit uspořádanou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ přirozených čísel, pro která platí $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$.

Proto budeme dále každou uspořádanou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ přirozených čísel $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ nazývat *vyjádřením egyptského typu k-tého řádu* zlomku $\frac{p}{q}$.

Množinu všech takových uspořádaných k-tic pro zvolené číslo k a zlomek $\frac{p}{q}$ budeme dále značit symbolem $V_k(\frac{p}{q})$. Symbolem $V(\frac{p}{q})$ označíme sjednocení množin $V_1(\frac{p}{p})$, $V_2(\frac{p}{p})$, ..., $V_k(\frac{p}{p})$, ...

Egyptské zápisy kmenových zlomků a jeho důsledky

Předpokládejme, že přirozená čísla p, q jsou nesoudělná, $q >$ > 1, a nechť $k > 1$ je nějaké pevně dané přirozené číslo. Nejprve ukážeme, že platí následující věta.

Věta 1. *Pro každé přirozené číslo* $1 < q$ *lze kmenový zlomek* $\frac{1}{q}$ *vyjádřit alespoň jedním způsobem součtem dvou různých kmenových zlomků.*

Pro každé přirozené číslo q platí

$$\frac{1}{q} = \frac{q+1}{q \cdot (q+1)} = \frac{q}{q \cdot (q+1)} + \frac{1}{q \cdot (q+1)} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q \cdot (q+1)}.$$

Neurčitá rovnice $\frac{1}{q} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ má pro $x < y$ jediné řešení právě tehdy, když je q prvočíslo. Je-li totiž $q = s \cdot t$, kde $1 < s \leq t$, pak platí $\frac{1}{q} = \frac{s+1}{s \cdot (s+1) \cdot t} = \frac{1}{(s+1) \cdot t} + \frac{1}{s(s+1)t}$. Proto má rovnice $\frac{1}{w} + \frac{1}{z} =$ $= \frac{1}{q}$ alespoň dvě různá řešení.

Příklad 1. *Ukažte, že existují alespoň tři různé způsoby, kterými lze zlomek* $\frac{1}{6}$ *vyjádřit jako součet dvou různých kmenových zlomků.*

Řešení: Číslo 6 má právě čtyři různé dělitele 1, 2, 3, 6. Po rozšíření zlomku $\frac{1}{6}$ číslem 3 platí:

(i) $\frac{1}{6} = \frac{2+1}{6 \cdot 3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$. Podobně po rozšíření zlomku $\frac{1}{6}$ číslem 4 nebo číslem 7 dostáváme:

(ii) $\frac{1}{6} = \frac{3+1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$;

(iii) $\frac{1}{6} = \frac{6+1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$.

Proto uspořádané dvojice $(9, 18)$, $(8, 24)$ a $(7, 42)$ představují tři různá egyptská vyjádření zlomku $\frac{1}{6}$.

Protože každý kmenový zlomek lze vyjádřit součtem dvou různých kmenových zlomků, je zřejmé, že platí následující věta:

Věta 2. *Pro každá dvě přirozená čísla $1 < q$, $1 < n$ lze kmenový zlomek $\frac{1}{q}$ vyjádřit alespoň jedním způsobem součtem n po dvou různých kmenových zlomků.*

Každý kmenový zlomek $\frac{1}{q}$ lze proto vyjádřit ve tvaru $\frac{1}{q} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q^2+q}$. Podobným způsobem lze vyjádřit kmenový zlomek $\frac{1}{q\cdot(q+1)}$. Po dosazení do první rovnosti dostaneme rovnost:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q+1} + \frac{(q+2)}{q(q+1)(q+2)} = \frac{1}{q+1} + \left(\frac{1}{q(q+2)} + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}\right).$$

Zlomek $\frac{1}{q}$ lze tedy určitě zapsat alespoň jedním způsobem součtem tří po dvou různých kmenových zlomků. Tento postup je možné vždy znovu opakovat v každém z egyptských zápisů pro kmenový zlomek, který má ze všech nejmenší hodnotu.

Proto je možné $\frac{1}{q}$ vyjádřit součtem libovolně velikého počtu po dvou různých kmenových zlomků. Z toho plynou následující tři poznatky o egyptských zápisech zlomků:

Důsledek 3. *Je-li $V_k(\frac{p}{q})$ neprázdná množina, pak je neprázdná také množina $V_{k+1}((\frac{p}{q})$ a tato množina má alespoň tolik prvků jako množina $V_k(\frac{p}{q})$.*

Důsledek 4. *Je-li $V_k(\frac{p}{q})$ neprázdná množina, potom má množina $V_{k+2}((\frac{p}{q})$ více prvků než má množina $V_k(\frac{p}{q})$.*

Důsledek 5. (iii) *Je-li $V_k(\frac{p}{q})$ neprázdná množina, má množina $V(\frac{p}{q})$ nekonečně mnoho prvků.*

Egyptské zápisy zlomků a řešení neurčitých rovnic

Nejjednodušší způsob, kterým lze najít egyptské zápisy zlomků, je systematické řešení neurčitých rovnic a jejich postupné zjednodušování dosazováním přípustných hodnot za proměnné. Přesto, že je metoda v podstatě velmi jednoduchá, je pro svou početní náročnost jen obtížně použitelná. Postup, který přiblížíme řešením dvou jednoduchých úloh, je možné použít pro libovolný kladný zlomek. Ukazuje se však, že pro každé přirozené číslo k a kterýkoliv kladný zlomek $\frac{p}{q}$ je vždy každá množina $V_k(\frac{p}{q})$ konečná.

Příklad 2. *Vyjádřete zlomek $\frac{1}{2}$ součtem dvou různých kmenových zlomků.*

Řešení: Po rozšíření zlomku $\frac{1}{2}$ číslem 3 platí: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2+1}{2\cdot 3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Je-li (a, b) libovolné řešení egyptského typu neurčité rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, potom musí pro číslo a zřejmě platit následující dvě nerovnosti $\frac{1}{a} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ a $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$. Proto $2 < a < 4$ a tedy nutně $a = 3$. Zároveň musí platit $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Uspořádaná dvojice $(3, 6)$ jediným řešením egyptského typu neurčité rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Příklad 3. *Kolika různými způsoby lze zapsat zlomek $\frac{1}{2}$ součtem tří po dvou různých kmenových zlomků?*

Řešení: Je-li (a, b, c) nějaké řešení egyptského typu neurčité rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ o třech neznámých x, y, z, potom musí platit (podobně jako v příkladě 1) dvě nerovnosti $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ a $\frac{3}{x} > \frac{1}{2}$. Odtud ihned plynou pro a dvě podmínky $2 < a$ a $a < 6$. Pokud má daná neurčitá rovnice alespoň jedno řešení (r, s, t) egyptského typu pro $r = 3$, potom musí být uspořádaná dvojice (s, t) řešením neurčité rovnice $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$ s redukovanou pravou stranou, protože $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Podobně jako v předchozím případě musí pro číslo s platit dvě podmínky $3 < s$ a $\frac{2}{s} > \frac{1}{6}$. Proto musí platit $3 < s < 12$.

Každou z přípustných hodnot lze dosadit do zkoumané rovnice za proměnnou y a dopočítat hodnotu zbývající proměnné z. Bude-li vypočtená hodnota t v oboru přirozených čísel, bude uspořádaná trojice $(3, s, t)$ jedním z egyptských řešení výchozí neurčité rovnice. Protože existuje jen konečný počet možných případů, lze postupným dosazováním zvolených hodnot najít všechna požadovaná řešení zadané úlohy:

Pro $r = 3$ a $s = 4$ dostáváme pro t podmínku $\frac{1}{t} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$. Pro $r = 3$ a $s = 5$ dostáváme pro t podmínku $\frac{1}{t} = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}$. Pro $r = 3$ a $s = 6$ dostáváme pro t podmínku $\frac{1}{t} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$. To znamená, že v těchto případech neexistuje přirozené číslo t, které by vyhovovalo podmínkám úlohy. Pro $r = 3$ a $s = 7$ musí pro číslo t platit $\frac{1}{t} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. Pro $r = 3$ a $s = 8$ musí pro číslo t platit $\frac{1}{t} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$. Pro $r = 3$ a $s = 9$ musí pro číslo t platit $\frac{1}{t} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$. Pro $r = 3$ a $s = 10$ musí pro číslo t platit $\frac{1}{t} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$. To znamená, že uspořádané trojice $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$ a $(3, 10, 15)$ představují všechna hledaná řešení egyptského typu zkoumané neurčité rovnice, která mají první složku 3.

Pokud má daná neurčitá rovnice alespoň jedno řešení (r, s, t) egyptského typu pro $r = 4$, potom musí být uspořádaná dvojice (s, t) řešením neurčité rovnice $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ s redukovanou pravou stranou, protože $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Pro číslo s pak musí platit dvě podmínky: $4 < s$ a $\frac{2}{s} > \frac{1}{4}$, a proto musí pro s platit podmínka $4 < s < 8$. Bude-li $r = 4$ a $s = 5$ musí pro číslo t platit $\frac{1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Bude-li $r = 4$ a $s = 6$ musí pro číslo t platit $\frac{1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Bude-li $r = 4$ a $s = 7$ musí pro číslo t platit $\frac{1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$. To znamená, že uspořádané trojice $(4, 5, 20)$ a $(4, 6, 12)$ představují všechna hledaná řešení egyptského typu zkoumané neurčité rovnice, která mají první složku 4.

Pokud má daná neurčitá rovnice alespoň jedno řešení (r, s, t) egyptského typu pro $r = 5$, potom musí být uspořádaná dvojice (s, t) řešením neurčité rovnice $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$ s redukovanou pravou stranou, protože $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$. Pro číslo s pak musí platit dvě podmínky: $5 < s$ a $\frac{2}{s} > \frac{1}{4}$, a proto musí pro s platit podmínka $4 < s < 8$. Bude-li $r = 5$ a $s = 6$, musí pro číslo t platit

$\frac{1}{t} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$. Bude-li $r = 5$ a $s = 7$, musí pro číslo t platit $\frac{1}{t} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$. Proto pouze uspořádané trojice $(5, 6, 30)$ představuje jediné řešení egyptského typu, které mají první složku 5.

Existuje tedy právě sedm různých zápisů zlomku $\frac{1}{2}$ součtem tří po dvou různých kmenových zlomků. Tyto zápisy jsou jednoznačně určeny uspořádanými trojicemi $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(4, 5, 20)$, $(4, 6, 12)$ a $(5, 6, 30)$.

Závěr

Metodu založenou na postupném dosazování přípustných hodnot do neurčitých rovnic je teoreticky možné použít pro libovolný zlomek $\frac{p}{q}$. S rostoucími hodnotami čitatele, jmenovatele a počtu neznámých však bude rychle narůstat počet možností a obtížnost výpočtů. Proto bude při větším počtu neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ čím dál tím obtížnější a v reálném čase téměř nemožné najít všechna řešení neurčité rovnice $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n} = \frac{p}{q}$ pro většinu zlomků $\frac{p}{q}$.

Metoda však na druhé straně zaručuje, že pro každé přirozené číslo $1 < n$ a dvě nesoudělná přirozená čísla p, q má neurčitá rovnice $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n} = \frac{p}{q}$ vždy konečný počet řešení egyptského typu. Proto je možné zlomek $\frac{p}{q}$ zapsat pro libovolně ale pevně dané přirozené číslo $1 < n$ součtem n po dvou různých kmenových zlomků jen konečně mnoha způsoby.

Je tedy zřejmé, že pokud má zlomek $\frac{p}{q}$ alespoň jeden egyptský zápis, potom takových zápisů existuje nekonečně mnoho. Množina všech egyptských vyjádření takového zlomku $\frac{p}{q}$ je jednoznačně dána sjednocením nekonečně mnoha po dvou disjunktních konečných množin $V_1(\frac{p}{q}), V_2(\frac{p}{q}), \ldots, V_k(\frac{p}{q}), \ldots$.

Zůstává však otevřená otázka, zda lze každý zlomek $\frac{p}{q}$ pro nesoudělná přirozená čísla p, q vyjádřit alespoň jedním způsobem součtem po dvou různých kmenových zlomků. Ale tomuto problému se budeme věnovat podrobněji v dalším článku.

Literatura

[1] Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Publishing, New York, 1990

[2] Hejný, M., Zlomky, (Kapitola 20), In: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, editoři Hejný M., Novotná J., Stehlíková N., Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta, str. 343–356, Praha, 2004

[3] Konforovič A.G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989

[4] Van Der Waerden, B.,L., *Probužďajuščajasa nauka*, (Matěmatika drevněvo Egypta, Vavilona i Greciji – ruský překlad), Gos.izd. fiz.-mat. litěratury, Moskva, 1959.

Doc. RNDr. Ladislav Beran, DrSc.
Doc. RNDr. Milan Trch, CSc., Ph.D.
Katedra matematiky České zemědělské univerzity
Kamýcká 129, 165 21 Praha 6
e-mail: trch@tf.czu.cz