Učitel matematiky

Martina Ernestová

Elementární soustavy algebraických rovnic - příklad z historie

Učitel matematiky, Vol. 13 (2005), No. 3, 137–147

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150772

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2005

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ELEMENTÁRNÍ SOUSTAVY ALGEBRAICKÝCH ROVNIC – příklad z historie

Martina Ernestová

První soustavy rovnic v dějinách matematiky

Vezmeme-li k ruce obsáhlejší knihu věnovanou dějinám matematiky, najdeme mezi prvními problémy, které lze zapsat soustavou algebraických rovnic, následující úlohu:

> „Je dán součet délky a šířky obdélníkového pole a jeho plocha. Vypočtěte jeho délku a šířku.“

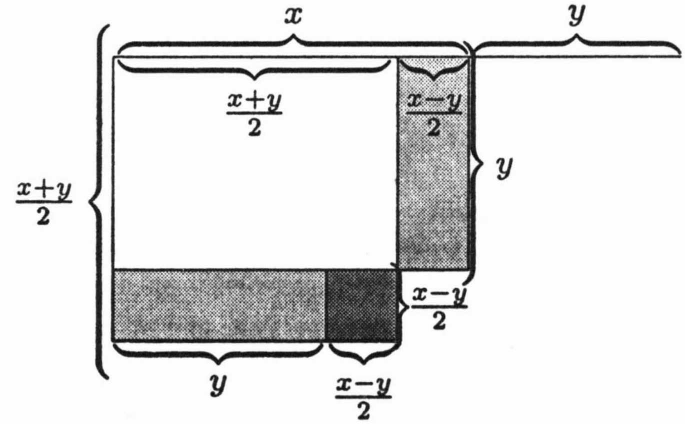
Označíme-li délku pole x, šířku y, pak úloha vede na jednoduchou soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ xy &= b. \end{aligned} \tag{1}$$

Stovky mezopotámských úloh lze zapsat právě touto soustavou rovnic (viz [1]). V postupu řešení se zpravidla využívala identita

$$\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{x-y}{2}\right)^2 = xy, \quad \text{resp.} \quad (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy \tag{2}$$

jejíž platnost je možno nahlédnout z obrázku:



Ze známého součtu a součinu délky a šířky se pomocí identity (2) určí jejich rozdíl $x - y$. Rozměry obdélníkového pole byly pak pravděpodobně vypočteny takto:[1]

$$x = \tfrac{1}{2}[(x+y) + (x-y)], \qquad y = \tfrac{1}{2}[(x+y) - (x-y)] \tag{3}$$

Nad smyslem takových úloh se zamýšlí např. autor práce [6] – snad byly porovnávány obdélníky se stejným obvodem a různými obsahy či naopak se stejným obsahem a různými obvody.

Úloha o dvou obdélnících

Právě porovnávání dvou obdélníků prostřednictvím jejich obvodů a obsahů je věnována jedna úloha práce *Geometrica*, kterou někdy v 1. století n. l. napsal Heron.[2] Obecnější úlohy o dvou obdélnících řeší Mahávíra[3] v *Krátkém kurzu početní vědy*. Lze je zformulovat takto: Najděte celočíselné rozměry dvou obdélníků, jestliže jejich obvody a obsahy jsou v daném poměru, tj.

$$\begin{aligned} ao_1 &= bo_2, \\ cS_1 &= dS_2, \end{aligned}$$

přičemž a, b, c, d jsou přirozená čísla. Taková úloha je neurčitá a vede na řešení soustavy dvou rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned} a \cdot 2(x_1 + y_1) &= b \cdot 2(x_2 + y_2), \\ cx_1y_1 &= dx_2y_2, \end{aligned} \tag{4}$$

kde x_1, y_1, x_2, y_2 jsou neznámé rozměry obdélníků a čísla a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ vyjadřují poměry jejich obvodů a obsahů.

---

[1] Dnešními zápisy vyjadřujeme to, co bylo dříve jako stručný návod řešení popsáno slovy.

[2] Heron Alexandrijský, význačný geometr počátku našeho letopočtu, sepsal řadu prací zasahujících do oblasti fyziky a matematiky. Úlohy, které dnes zapíšeme soustavou rovnic obsahující vyšší mocniny neznámých, se objevují v jeho pracích *Metrica* a *Geometrica*.

[3] Nejvýznačnější indický matematik 9. stol. n. l.

Heronovo řešení

Heron řeší speciální případ soustavy (4) pro $a = b = d = 1$, $c = 4$, tj. hledá rozměry dvou obdélníků se stejným obvodem, přičemž obsah jednoho je čtyřnásobkem obsahu druhého. Uveďme úryvek z jeho práce obsahující zadání úlohy i výpočet stran obou obdélníků.

Najít oblast, jejíž obvod je roven obvodu jiné oblasti, která má však čtyřikrát větší obsah.

$$\left[\begin{array}{c} 2(x_1 + y_1) = 2(x_2 + y_2), \\ 4x_1y_1 = x_2y_2. \end{array}\right]$$

Postupuji takto:
4 umocněno na třetí dává 64 stop. Odeber jedničku, zbylé dává 63 stop. Tolik je každý z obvodů[4] *sestavený ze dvou rovnoběžných stran.*

$[o_1,\ o_2 : \quad 4^3 = 64,\ 64 - 1 = 63 = o_1 = o_2]$

Pak se mají rozlišit strany. Udělám to takto: od 4 odečtu jedničku, zbudou 3. Jedna strana je tedy rovna 3 stopám.

$[y_1 : \quad 4 - 1 = 3 = y_1]$

Druhá strana takto: 63 bez 3. Zbude 60 stop.

$[x_1 : \quad 63 - 3 = 60 = x_1]$

U druhé oblasti postupuj takto: 4 umocněno dává 16 stop. To bez jedničky dává zbytek 15 stop. Tolik budiž první strana, 15 stop.

$[y_2 : \quad 4^2 = 16,\ 16 - 1 = 15 = y_2]$

Druhá strana tudíž takto: odečti těch 15 od 63, zbude 48 stop. Nechť je druhá strana rovna 48 stopám.

$[x_2 : \quad 63 - 15 = 48 = x_2]$

Obsah plochy druhé oblasti je tedy 720 stop a první 180 stop.[5]

$[S_1,\ S_2 : \quad 15 \cdot 48 = 720 = S_2;\ 3 \cdot 60 = 180 = S_1]$

---

[4] Nejde přímo o obvody obdélníků, ale o jejich polovinu, tj. součet délky a šířky.

[5] Podle [4], str. 417, a [3], str. 8. 1 *stopa* = 4 *palce*, podle [4], str. 185.

Heron zvolil jako polovinu obvodu, který je pro oba obdélníky stejný, c^3-1, kde c je poměr obsahů obdélníků. (V úloze je $c=4$.) Tento výraz lze vhodně rozložit dvěma způsoby na součet dvou sčítanců

$$c^3-1=[c-1]+[c(c^2-1)],$$
$$c^3-1=[c^2-1]+[c^2(c-1)],$$

a sice tak, že podíl součinu sčítanců ve druhém rozkladu čísla c^3-1 a součinu sčítanců v prvním rozkladu čísla c^3-1 je roven právě c:

$$\frac{(c^2-1)\cdot(c^2(c-1))}{(c-1)\cdot c(c^2-1)}=c.$$

Pokud se zvolí

$$x_1=c-1, \qquad x_2=c^2-1,$$
$$y_1=c(c^2-1), \qquad y_2=c^2(c-1),$$

jsou splněny obě podmínky úlohy a jedno řešení je nalezeno. Zůstává otázkou, jak na postup výpočtu stran obdélníků Heron přišel a zda se jeho úvahy vůbec opíraly o předchozí vztahy.

Mahávírovo řešení

Mahávíra uvádí v jednom pravidle *Krátkého kurzu početní vědy* postup řešení soustavy (4) pro následující tři úlohy:

$$\begin{array}{lll} o_1=o_2, & 2o_1=o_2, & 2o_1=o_2, \\ S_1=2S_2, & S_1=S_2, & S_1=2S_2. \end{array} \qquad (5)$$

Kvůli řešitelnosti úlohy v oboru přirozených čísel a jednoznačnosti řešení se navíc předpokládá, že je vedle a, b, c, d dáno ještě jisté přirozené číslo λ (*zvolený násobitel*), které počtáře podle prezentovaného algoritmu vede k jednomu řešení.

Na ukázce z Mahávírovy práce si všimněme, že uvedené pravidlo je mnohem obecnější než Heronovo, navíc lze použít i na jiné příklady než jsou úlohy (5):[6]

[6] V tom případě nemusí být řešení celočíselné, ale může vycházet v oboru kladných racionálních čísel. V následujícím byl text v závorkách přidán pro lepší srozumitelnost.

Pravidlo pro získání náležité dvojice podlouhlých čtyřúhelníkových útvarů ... (jejichž strany vyhovují některé dvojici podmínek uvedených v (5))...
(Větší násobky) *obvodů a také* (násobky) *ploch* (vztahujících se ke dvěma hledaným obdélníkům) *jsou vyděleny menšími* (násobky), *které jim odpovídají.* (Podíly) *jsou vynásobeny* (mezi sebou) *a* (potom) *umocněny.* (Toto množství) *vynásobené zvoleným násobitelem dá vznik hodnotě kolmé strany.*

$[y_1,\ (a \geq b, d \geq c): \quad (\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c})^2 \cdot \lambda = y_1]$

V případě, že jsou plochy (dvou obdélníků považovány) *za sobě rovné,* (velikost) *kolmé strany zmenšená o jedničku se stane velikostí základny.*

$[x_1,\ (d = c): \quad y_1 - 1 = x_1]$

Ale v jiném případě (kdy nejsou obsahy obdélníků stejné), *větší* (násobek) *vztahující se k obsahům* (vydělený menším násobkem) *je vynásoben zvoleným násobitelem a* (výsledný součin je) *zmenšen o jedničku. Velikost kolmé strany* (už získané) *je zmenšena o množství* (takto vypočtené) *a je* (potom) *vynásobena třemi: tedy velikost základny* (je získána).

$[x_1,\ (d > c): \quad 3[y_1 - (\frac{d}{c}\lambda - 1)] = x_1]$

Potom pro nalezení dalšího (obdélníku) *je jeho základna a výška získána pomocí* (nyní již známých) *velikostí jeho plochy a obvodu podle pravidla uvedeného* (ve sloce $129\,\frac{1}{2}$).[7]

$[x_2, y_2: \quad x_2 + y_2 = \frac{a}{b}(x_1 + y_1);\ x_2 y_2 = \frac{c}{d} x_1 y_1]$

Předchozí Mahávírovo pravidlo budeme nyní komentovat. Uvažujme obecněji, že se úloha řeší v množině kladných racionálních čísel, tj. x_1, x_2, y_1, y_2 mohou být i zlomky, čtveřice přirozených čísel (a, b, c, d) není nutně jednou ze čtveřic $(1,1,1,2)$, $(2,1,1,1)$, $(2,1,1,2)$, které odpovídají Mahávírovovým úlohám (5), a zvolený násobitel λ je racionální číslo.

A. Pokud jsou obsahy obou obdélníků stejné, tj. $d = c$, a obvod druhého obdélníka je větší než obvod prvního, tj. $a \geq b$, volí

[7] **Podle [7], str. 225–226. Rozměry druhého obdélníku se najdou jako řešení soustavy typu (1).**

Mahávíra

$$y_1 = (\tfrac{a}{b})^2 \cdot \lambda, \qquad x_1 = (\tfrac{a}{b})^2 \cdot \lambda - 1.$$

Rozměry x_2, y_2 druhého obdélníka jsou potom dopočteny ze soustavy typu (1):

$$x_2 + y_2 = \tfrac{a}{b} \cdot \left[2(\tfrac{a}{b})^2\lambda - 1\right],$$
$$x_2 y_2 = \left(\tfrac{a}{b}\right)^2 \lambda \cdot \left[\left(\tfrac{a}{b}\right)^2 \lambda - 1\right].$$

Aby byla soustava řešitelná v racionálních číslech,[8] musí být hodnota výrazu $(x_2 - y_2)^2 = (x_2 + y_2)^2 - 4x_2y_2$, tj.

$$(\tfrac{a}{b})^2 \left\{[2(\tfrac{a}{b})^2\lambda - 1]^2 - 4(\tfrac{a}{b})^2\lambda^2 + 4\lambda\right\} =$$
$$= (\tfrac{a}{b})^2\{[2(\tfrac{a}{b})^2\lambda - \lambda - 1]^2 - \lambda(\lambda - 2)\},$$

druhou mocninou racionálního čísla. To zřejmě nastane pro $\lambda = 2$. (Mahávíra v ilustračním příkladě $2o_1 = o_2$, $S_1 = S_2$ skutečně volí $\lambda = 2$.) Podle (3) jsou pak vypočteny rozměry druhého obdélníku

$$x_2 = \tfrac{a}{b}[4(\tfrac{a}{b})^2 - 2], \qquad y_2 = \tfrac{a}{b}. \tag{6}$$

První obdélník má pro $\lambda = 2$ délku a šířku

$$x_1 = 2(\tfrac{a}{b})^2 - 1, \qquad y_1 = 2(\tfrac{a}{b})^2. \tag{7}$$

B. Pokud jsou obsahy obdélníků různé ($a \geq b, d > c$), položí se podle pravidla

$$y_1 = (\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2\lambda, \qquad x_1 = 3[(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2\lambda - (\tfrac{d}{c}\lambda - 1)].$$

Pro délku a šířku druhého obdélníka potom platí:

$$x_2 + y_2 = \tfrac{a}{b}\,[4(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2\lambda - 3\tfrac{d}{c}\lambda + 3],$$
$$x_2 y_2 = 3(\tfrac{a}{b})^2 \tfrac{d}{c}\lambda\,[(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2\lambda - \tfrac{d}{c}\lambda + 1]$$

[8] Ve speciálních příkladech uvedených Mahávírou jde o řešitelnost v přirozených číslech, neboť $\frac{a}{b} = 1$, resp. $\frac{a}{b} = 2$, tj. $\frac{a}{b}$ je vždy přirozené číslo.

Tato soustava má racionální řešení, pokud lze v $\mathbb{Q}$ odmocnit výraz

$$(\tfrac{a}{b})^2\left\{[4(\tfrac{a}{b}\cdot\tfrac{d}{c})^2\lambda-3\tfrac{d}{c}\lambda+3]^2-12\tfrac{d}{c}\lambda[(\tfrac{a}{b}\cdot\tfrac{d}{c})^2\lambda-\tfrac{d}{c}\lambda+1]\right\}=$$
$$=(\tfrac{a}{b})^2\{[4(\tfrac{a}{b}\cdot\tfrac{d}{c})^2\lambda-\tfrac{9}{2}\tfrac{d}{c}\lambda+3]^2+\tfrac{3}{4}\tfrac{d}{c}\lambda(\tfrac{d}{c}\lambda-4)\}$$

odpovídající $(x_2-y_2)^2$. Jestliže se „zvolený násobitel λ" vybere tak, aby $\frac{d}{c}\lambda-4=0$,[9] bude

$$x_2-y_2=\tfrac{a}{b}[4(\tfrac{a}{b})^2(\tfrac{d}{c})^2\lambda-\tfrac{9}{2}\tfrac{d}{c}\lambda+3]=\tfrac{a}{b}[16(\tfrac{a}{b})^2\tfrac{d}{c}-15].$$

Odtud se podle (3) vypočtou rozměry

$$x_2=4\tfrac{a}{b}[4(\tfrac{a}{b})^2\cdot\tfrac{d}{c}-3],\qquad y_2=3\tfrac{a}{b},\tag{8}$$

druhého obdélníka, první obdélník má pro $\lambda=4\frac{c}{d}$ strany

$$x_1=3[4(\tfrac{a}{b})^2\tfrac{d}{c}-3],\qquad y_1=4(\tfrac{a}{b})^2\tfrac{d}{c}.\tag{9}$$

Opět není jasné, jak na uvedený postup Mahávíra přišel a zda rozměry y_1, x_1 a násobitel λ byly popsaným způsobem zvoleny jen proto, aby soustava typu (1) v neznámých x_2, y_2, a tedy i soustavy (5) byly řešitelné v $\mathbb{N}$, resp. obecnější typy soustav (4) v $\mathbb{Q}^+$.

Další postup řešení

Podle Mahávírova pravidla jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned}2(x_1+y_1)&=2(x_2+y_2),\\ x_1y_1&=2x_2y_2,\end{aligned}\tag{10}$$

čísla $x_1=15$, $y_1=8$ a $x_2=20$, $y_2=3$ představující rozměry dvou obdélníků pro zvolené číslo $\lambda=2$. Použijeme-li na úlohu (10) Heronův postup, dostaneme obdélníky s rozměry $x_2=6$, $y_2=1$ a $x_1=4$, $y_1=3$. Oba postupy tedy vedou k různým výsledkům.

Jak je to s řešitelností a počtem řešení úlohy v množině přirozených čísel? Na první pohled je zřejmé, že pokud má úloha jedno

---

[9] V soustavách (5) je $\lambda=4\frac{c}{d}$ vždy přirozené číslo, neboť $\frac{c}{d}=\frac{1}{2}$.

řešení, má jich nekonečně mnoho. Splňuje-li totiž čtveřice x_1, y_1, x_2, y_2 podmínky úlohy, pak jim také vyhovuje čtveřice kx_1, ky_1, kx_2, ky_2, $k \in \mathbb{N}$. Zdaleka to však nejsou všechna řešení, jak je patrné z Heronova a Mahávírova řešení; nenajdeme žádné číslo k takové, aby se Heronem vypočtené strany obdélníků 6×1, 4×3 po vynásobení číslem k přeměnily ve strany obdélníků 20×3, 15×8, ke kterým dospěl Mahávíra. Jejich řešení se tedy podstatně liší.

Pokusme se vymyslet jiné řešení soustavy (10), které by zahrnovalo výsledky obou matematiků. Neznámými jsou v úloze rozměry obdélníků, tedy kladná čísla, lze proto předpokládat, že

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x_2, \\ y_1 &= \beta y_2, \end{aligned} \tag{11}$$

kde α, $\beta > 0$. Z podmínky na poměr obsahů obdélníků plyne

$$\alpha\beta = 2.$$

Obvody obdélníků jsou stejné, proto

$$\alpha x_2 + \beta y_2 = x_2 + y_2,$$

odkud

$$y_2 = x_2 \cdot \tfrac{1-\alpha}{\beta-1}.$$

Pro násobky α, β musí platit $\alpha < 1$ a $\beta > 1$ nebo $\alpha > 1$ a $\beta < 1$, aby y_2 bylo kladné. (Je to ostatně jasné už ze zadání úlohy.) Protože x_2 značí délku a y_2 šířku obdélníka, mělo by být $x_2 > y_2$, tj. $\frac{x_2}{y_2} = \frac{\beta-1}{1-\alpha} > 1$. Vzhledem k tomu, že $\alpha\beta = 2$, bude nerovnost vždy splněna pouze pro $\alpha < 1$, $\beta > 1$, jak se snadno odvodí. Zvolíme-li $\alpha = \frac{1}{2}$, bude $\beta = 4$. Šířka druhého obdélníka je potom $y_2 = x_2 \frac{1-\frac{1}{2}}{4-1} = \frac{1}{6} x_2$. Pro délku $x_2 = 6$ dostaneme celočíselnou šířku $y_2 = 1$. Z (11) se vypočtou rozměry prvního obdélníka $x_1 = \frac{1}{2} x_2 = 3$, $y_1 = 4y_2 = 4$. To je řešení, které by našel Heron.

Pokud zvolíme $\alpha = \frac{3}{4}$, bude $\beta = \frac{8}{3}$ a $y_2 = \frac{3}{20} x_2$. Pro $x_2 = 20$ bude $y_2 = 3$ a snadno se dopočte $x_1 = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15$, $y_1 = \frac{8}{3} \cdot 3 = 8$, tedy řešení, které vyšlo Mahávírovi.

Obecná úloha

Lze ověřit, že Mahávírovo pravidlo vede k řešení soustavy (4) vždy, když $\frac{a}{b} \geq 1$ a $\frac{c}{d} \leq 1$ nebo $\frac{a}{b} \leq 1$ a $\frac{c}{d} \geq 1$.[10] Obecně to však není celočíselné řešení, tj. jako strany obdélníků mohou vycházet i zlomky. Pokud jsou oba poměry zároveň větší než jedna, resp. menší než jedna, tj. $\frac{a}{b} \geq 1$, $\frac{c}{d} \geq 1$, resp. $\frac{a}{b} \leq 1$, $\frac{c}{d} \leq 1$, můžeme obdobným způsobem odvodit, že obsah druhého obdélníka je

$$x_2y_2 = 3(\tfrac{a}{b})^2(\tfrac{c}{d})^3\lambda\,[(\tfrac{a}{b}\cdot\tfrac{c}{d})^2\lambda - \tfrac{c}{d}\lambda + 1],$$

resp.

$$x_2y_2 = 3(\tfrac{b}{a})^2(\tfrac{d}{c})^3\lambda\,[(\tfrac{b}{a}\cdot\tfrac{d}{c})^2\lambda - \tfrac{d}{c}\lambda + 1].$$

Tyto vzorce však obsahují pátou a nikoli třetí mocninu poměru obsahů. Podmínka $\lambda = 4\frac{c}{d}$ pro to, aby bylo možno hodnotu výrazu $(x_2 - y_2)^2 = (x_2 + y_2)^2 - 4x_2y_2$ odmocnit, se tudíž změní.

Postup, ve kterém jsme využili vztahy (11), lze zobecnit pro libovolnou soustavu (4). Za předpokladu $x_1 = \alpha x_2$, $y_1 = \beta y_2$ dostáváme z druhé rovnice soustavy $\alpha\beta = \frac{d}{c}$, z první rovnice po jednoduchých úpravách

$$y_2 = x_2 \cdot \frac{a\alpha - b}{b - a\beta}. \tag{12}$$

Podíl v (12) musí být kladné číslo. To nastane pro $\alpha > \frac{b}{a}$ a zároveň $\beta < \frac{b}{a}$, (tj. pro $\alpha > \frac{b}{a}$ a $\alpha > \frac{ad}{bc}$, jestliže použijeme vztah $\alpha\beta = \frac{d}{c}$) nebo pro $\alpha < \min(\frac{b}{a}, \frac{ad}{bc})$. Pokud se zvolí $\alpha > \max(\frac{b}{a}, \frac{ad}{bc})$ a $x_2 = b - a\beta = b - \frac{ad}{c}\frac{1}{\alpha}$, budou zbývající strany:

$$y_2 = a\alpha - b,$$
$$x_1 = \alpha b - \frac{ad}{c},$$
$$y_1 = \frac{ad}{c} - \frac{bd}{c}\frac{1}{\alpha}.$$

[10] Pokud je $\frac{a}{b} \geq 1$ a $\frac{c}{d} \leq 1$, dospěli jsme v textu za Mahávírovým pravidlem k obecným předpisům (6), (7), resp. (8), (9) pro výpočet stran obdélníků. Dosazením do (4) se přesvědčíme, že jsou takto popsané čtveřice řešením soustavy (4). Případ, kdy $\frac{a}{b} \leq 1$ a $\frac{c}{d} \geq 1$, převedeme na předchozí tak, že změníme pořadí obdélníků.

V práci [2] je na str. 221 uvedeno následující obecné řešení soustavy (4) – bez ohledu na vztahy koeficientů a, b, c, d:

$$x_1 = \tfrac{\alpha}{\beta}(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2 \left[\alpha(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2 - \alpha\tfrac{d}{c} + \beta\right],$$
$$y_1 = \alpha(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2 + \beta,$$
$$x_2 = \tfrac{1}{\beta}\tfrac{a}{b} \left[\alpha(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2 + \beta\right] \cdot \left[\alpha(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2 - \alpha\tfrac{d}{c} + \beta\right],$$
$$y_2 = \alpha \cdot \tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c},$$

kde čísla α, β jsou libovolná kladná racionální čísla. Aby výrazy x_1, x_2 nabývaly kladných hodnot, musíme přidat podmínku

$$\beta > \alpha \left[\tfrac{d}{c} - (\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{d}{c})^2\right].$$

Na závěr

Poznamenejme ještě, že na jiném místě *Krátkého kurzu početní vědy* hledá Mahávíra rozměry dvou rovnoramenných trojúhelníků, jejichž obvody a obsahy jsou v daném poměru.

Úloha o dvou trojúhelnících s obvody a obsahy v daném poměru byla řešena i v pozdější době, ať už indickými matematiky (např. Nryaṇa r. 1356) nebo matematiky evropskými (Frans van Schooten r. 1657, Johann Heinrich Rahn r. 1697 a další).

Literatura

[1] Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H., *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, Prometheus, Praha, 2003.

[2] Datta, B., Singh, A. N., *History of Hindu Mathematics*, Vol. II. Algebra, Allahabad Law Journal Press, Lahore, 1938.

[3] Diofantos, *Arifmetika i Kniga ob mnogougolnych čislach*, Nauka, Moskva, 1974.

[4] Heron Alexandrijský, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, IV. Heronis definitiones cum variis collectionibus Heronis quae feruntur Geometrica, B. G. Teubneri, Lipsko, 1912. Dostupné též [online] z http://gallica.bnf.fr.

[5] Karpinski, L. Ch., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, The Macmillan Company, New York, 1974.

[6] Katz, V. J., *A History of Mathematics*, Addison Wesley Higher, Amsterdam, 1998.

[7] O'Connor, J., Robertson, E., *The MacTutor History of Mathematics archive - Heron of Alexandria*, [online]. April 1999 [cit. 2004-11-11]. Dostupné z adresy http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/.

[8] Raṅgācārya, M., *The Gaṇita-sāra-sangraha of Mahāvīrācārya with English Translation and Notes*, Government Press, Madras, 1912.

Martina Ernestová
Katedra matematiky FPE ZČU
Klatovská 51
306 14 Plzeň
e-mail: mernesto@kmt.zcu.cz