Dag Hrubý

Tečny a polotečny

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 4, 222–230

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150957

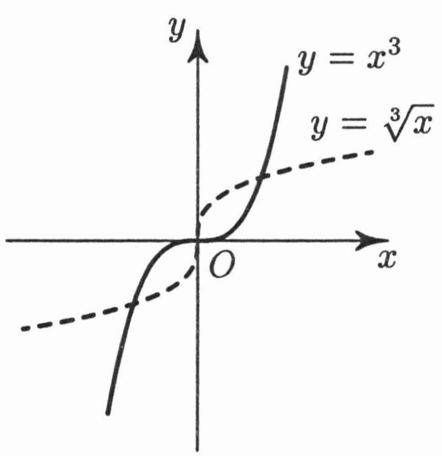
TEČNY A POLOTEČNY

DAG HRUBÝ

Pojem tečny patří k základním matematickým pojmům. Podobně jako jiné pojmy prodělává také pojem tečny při výuce matematiky na osmiletém gymnáziu svůj vlastní vývoj. Od elementární představy jako přímky, která má s kružnicí právě jeden společný bod, až po charakteristiku tečny pomocí derivace funkce. Cílem tohoto sdělení není ale popis toho, jak je pojem tečny zpřesňován v průběhu osmi let studia na gymnáziu. Záměrem autora je upozornit na jisté rozšíření pojmu derivace funkce v bodě.

Následující text o tečnách je určen spíše učitelům matematiky, než jejich žákům. Na výklad níže uvedenených pojmů není zřejmě ve výuce matematiky na střední škole prostor a čas.

Důvodem k napsání tohoto článku byla diskuze kolem funkce $f\colon y = x^3$. Graf této funkce má v bodě $T[0,0]$ tečnu o rovnici $y = 0$. Tečnou je tedy osa x, směrnice této tečny je $f'(0) = 0$. K funkci $y = x^3$ existuje funkce inverzní $\varphi\colon y = \sqrt[3]{x}$. Nabízí se otázka, jak je to s tečnou grafu funkce φ v bodě $T[0,0]$. Logická odpověď je, že touto tečnou je osa y. Jak se to má ale „vypočítat“? Pro funkci φ zřejmě platí:



$$\varphi'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Výraz $\varphi'(0)$ není definován. Znamená to tedy, že funkce φ nemá v bodě 0 derivaci? Zde se dostáváme do diskuze týkající se míry přesnosti našeho vyjadřování při výuce matematiky. Možná si položíme otázku, zda jsme pojem derivace svým studentům vyložili správně. Vypočtěme nyní derivaci funkce φ v bodě 0 podle definice derivace:

$$\varphi'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Funkce φ derivaci v bodě 0 má, je to však derivace nevlastní.

Podobným způsobem můžeme pracovat s funkcí $g\colon y = \sin|x|$. Na rozdíl od předcházejícího případu nemá funkce g v bodě 0 derivaci vlastní ani nevlastní, a její graf nemá v bodě $T[0,0]$ tečnu. Pokud bychom se však rozhodli pro výpočet jednostranných derivací funkce g v bodě 0, dostali bychom

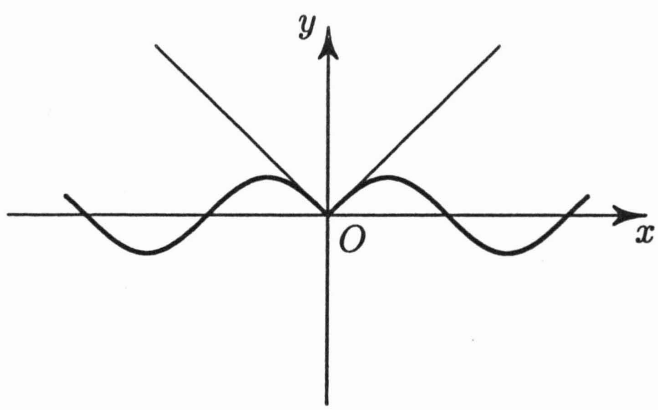
$$g'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin|x|-\sin 0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

a podobně

$$g'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin|x|-\sin 0}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(-x)}{x} = -1.$$

Otázkou je, jaká je geometrická interpretace čísel $g'_+(0)$, $g'_-(0)$. Zdá se, že by bylo možné zavést takové pojmy jako ***tečna v bodě zprava***, resp. ***tečna v bodě zleva***. Takové tečny by byly polopřímky a v našem případě by měly rovnice

$$y = x,\ y \geq 0 \quad \text{resp.} \quad y = -x,\ y \geq 0.$$



V předcházejícím textu bylo naznačeno, že pojem derivace funkce v bodě a s tím související pojem tečny grafu funkce v tomto bodě je poněkud širší, než by se na první pohled zdálo.

Nyní bude vysloveno několik tvrzení týkajících se derivace funkce v bodě a na závěr si vypočteme několik příkladů.

Vlastní derivace funkce

Definice 1. Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je-li f definována v okolí bodu x_0 a existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Geometrická interpretace: Číslo $f'(x_0)$ je směrnice tečny grafu funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$.

Definice 2. Nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$. Tečna grafu funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$ je přímka procházející bodem $T[x_0, f(x_0)]$ se směrnicí $f'(x_0)$. Tato tečna má rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Věta 1. *Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.*

Obrácená věta neplatí. Funkce $f : y = |x|$ je spojitá v bodě 0, vlastní derivaci však v tomto bodě nemá.

Při běžné výuce se důraz na slovo „vlastní“ neklade. Je to celkem pochopitelné, protože s jinými derivacemi než vlastními se studenti gymnázia zpravidla nesetkají. Při náročnějším způsobu diskuze o pojmu derivace se ovšem bez pojmu vlastní a nevlastní derivace neobejdeme.

Definice 3. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci zleva, je-li f definována v jistém levém okolí bodu x_0 a existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0).$$

Definice 4. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci zprava, je-li f definována v jistém pravém okolí bodu x_0 a existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0).$$

Geometrická interpretace jednostranné derivace:
Číslo $f'_-(x_0)$ je směrnice tzv. *levé polotečny* a číslo $f'_+(x_0)$ je směrnice tzv. *pravé polotečny* grafu funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$. Tyto polotečny jsou polopřímky o rovnicích

$$y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0), \qquad y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0)$$

s uvedením podmínky pro y. Zřejmě je buď $y \geq f(x_0)$ nebo $y \leq f(x_0)$.

Věta 2. *Funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$ právě tehdy, když má v bodě x_0 derivaci zleva $f'_-(x_0)$, derivaci zprava $f'_+(x_0)$ a platí-li*

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Jsou-li jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 navzájem různé, $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, pak neexistuje derivace $f'(x_0)$ a v důsledku toho neexistuje ani tečna grafu funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$. Jsou-li derivace $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ vlastní, má graf funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$ dvě navzájem různé polotečny.

Nevlastní derivace

Definice 5. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 nevlastní derivaci $+\infty$, existuje-li limita

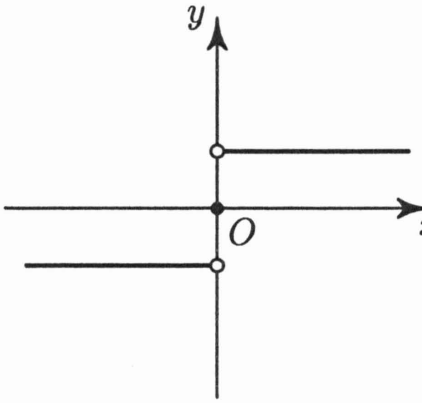
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty.$$

Definice 6. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 nevlastní derivaci $-\infty$, existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty.$$

Geometrická interpretace nevlastní derivace:
Je-li derivace $f'(x_0)$ nevlastní a je-li funkce f spojitá v bodě x_0, považujeme za tečnu grafu funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$ přímku, která prochází bodem T a je rovnoběžná s osou y. Rovnice této tečny je $x = x_0$.

Nabízí se otázka, zda i v případě nevlastní derivace platí věta obdobná větě 1. Odpověď je v tomto případě záporná. Má-li funkce v bodě nevlastní derivaci, nemusí být v tomto bodě spojitá. Příkladem takové funkce je funkce $f\colon y = \operatorname{sgn} x$. Pro derivaci této funkce v bodě 0 dostáváme



$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = +\infty.$$

Funkce $f\colon y = \operatorname{sgn} x$ má tedy v bodě 0 nevlastní derivaci $+\infty$, ale v bodě 0 spojitá není.

Definice 7. Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nevlastní derivaci zprava, je-li f definována v jistem pravém okolí bodu x_0 a existuje-li nevlastní limita

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty, \text{ resp. } \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty.$$

Geometrická interpretace:

Je-li derivace funkce f v bodě x_0 zprava nevlastní a je-li funkce f spojitá v bodě x_0 zprava, pak graf funkce f má v bodě $T[x_0, f(x_0)]$ polotečnu. Tato polotečna je rovnoběžná s osou y a má rovnici $x = x_0$ s uvedením podmínky pro y. Zřejmě je buď $y \geq f(x_0)$ nebo $y \leq f(x_0)$.

Definice 8. Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nevlastní derivaci zleva, je-li f definována v jistém levém okolí bodu x_0 a existuje-li nevlastní limita

$$\lim_{x\to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty, \text{ resp. } \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty.$$

Geometrická interpretace:

Je-li derivace funkce f v bodě x_0 zleva nevlastní a je-li funkce f spojitá v bodě x_0 zleva, pak graf funkce f má v bodě $T[x_0, f(x_0)]$ polotečnu. Tato polotečna je rovnoběžná s osou y a má rovnici $x = x_0$ s uvedením podmínky pro y. Zřejmě je buď $y \geq f(x_0)$ nebo $y \leq f(x_0)$.

V literatuře jsou zpravidla uváděny čtyři nejvýznamnější případy tečen grafu funkce, které jsou rovnoběžné s osou y. Tyto případy si ukážeme na následujících funkcích. Ve všech případech budeme hledat rovnici tečny grafu funkce v bodě $T[2, 1]$.

- $f_1 : y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$

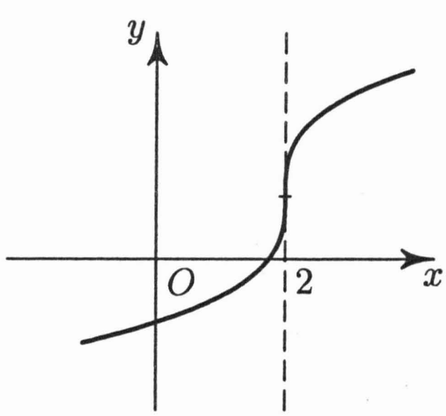
$$\lim_{x\to 2} \frac{1+\sqrt[3]{x-2}-1-\sqrt[3]{2-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = +\infty.$$

Graf funkce f_1 má v bodě $T[2, 1]$ tečnu o rovnici $x = 2$.

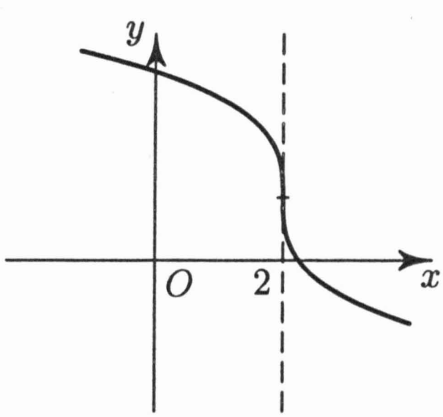
- $f_2 : y = 1 - \sqrt[3]{x-2}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt[3]{x-2}-1+\sqrt[3]{2-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-\sqrt[3]{x-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = -\infty.$$

Graf funkce f_2 má v bodě $T[2, 1]$ tečnu o rovnici $x = 2$.



Funkce $f_1 : y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$



Funkce $f_2 : y = 1 - \sqrt[3]{x-2}$

- $f_3 : y = 1 + \sqrt[3]{|x-2|}$.

Funkce f_3 nemá v bodě 2 derivaci, má však derivaci v bodě 2 zprava a zleva.

$$\lim_{x\to 2+} \frac{1+\sqrt[3]{|x-2|}-1-\sqrt[3]{|2-2|}}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{\sqrt[3]{|x-2|}}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{1}{\sqrt[3]{|x-2|^2}} = +$$
$+\infty$;

$\lim\limits_{x\to 2-} \frac{1+\sqrt[3]{|x-2|}-1-\sqrt[3]{|2-2|}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-} \frac{\sqrt[3]{|x-2|}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-} \frac{-1}{\sqrt[3]{|x-2|^2}} = -\infty$.

Graf funkce f_3 má v bodě $T[2,1]$ dvě polotečny. Obě polotečny jsou totožné a mají rovnici $x = 2$, $y \geq 1$.

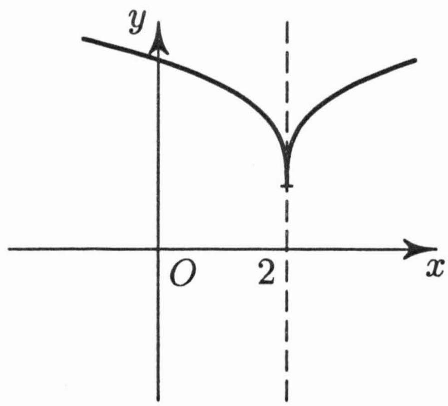
- $f_4 \colon y = 1 - \sqrt[3]{|x-2|}$.

Funkce f_4 nemá v bodě 2 derivaci, má však derivaci v bodě 2 zprava a zleva.

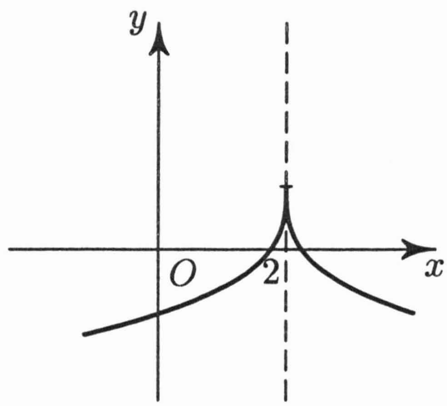
$\lim\limits_{x\to 2+} \frac{1-\sqrt[3]{|x-2|}-1+\sqrt[3]{|2-2|}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} \frac{-\sqrt[3]{|x-2|}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+} \frac{-1}{\sqrt[3]{|x-2|^2}} = -\infty;$

$\lim\limits_{x\to 2-} \frac{1-\sqrt[3]{|x-2|}-1+\sqrt[3]{|2-2|}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-} \frac{-\sqrt[3]{|x-2|}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2-} \frac{1}{\sqrt[3]{|x-2|^2}} = +\infty.$

Graf funkce f_4 má v bodě $T[2,1]$ dvě polotečny. Obě polotečny jsou totožné a mají rovnici $x = 2$, $y \leq 1$.



Funkce $f_3 \colon y = 1+\sqrt[3]{|x-2|}$

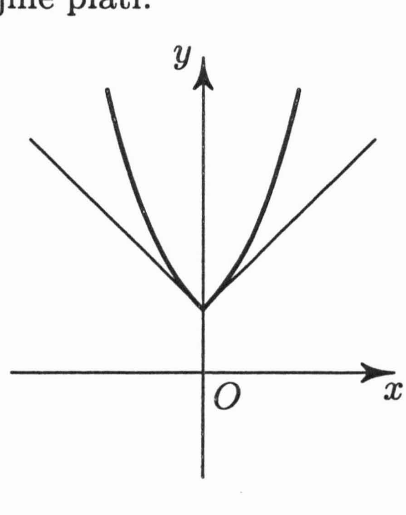


Funkce $f_4 \colon y = 1-\sqrt[3]{|x-2|}$

Příklad 1. Pro funkci $f \colon y = \mathrm{e}^{|x|}$ zřejmě platí:

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x} = -1,$

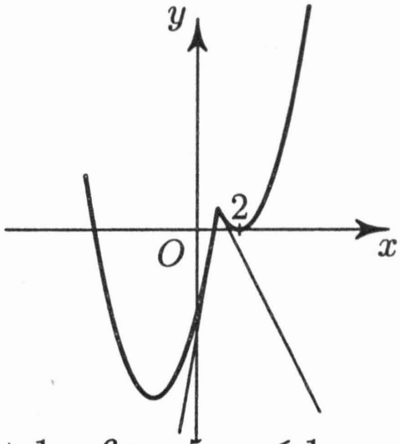
$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = 1.$



Vzhledem k $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ nemá funkce $y = \mathrm{e}^{|x|}$ v bodě 0 derivaci a tedy neexistuje v bodě $T[0,1]$ ani tečna grafu funkce f. Existují však dvě různé polotečny. Levá polotečna grafu funkce f v bodě $T[0,1]$ má rovnici

$y = f'_-(0)(x - x_0) + f(x_0) = -x + 1,\ y \geq 1$
a pravá polotečna má rovnici
$y = f'_+(0)(x - x_0) + f(x_0) = x + 1,\ y \geq 1.$

Příklad 2. Funkce $f\colon y = x^2 - 4|x - 1|$ nemá derivaci v bodě 1. Platí

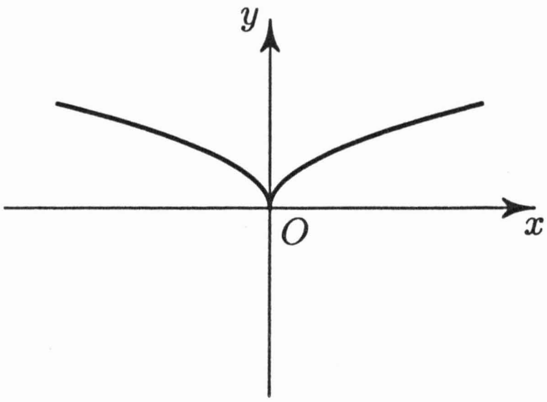


$f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1-} \frac{x^2-4|x-1|-1}{x-1} =$
$= \lim\limits_{x\to 1-} \frac{x^2+4x-5}{x-1} = 6;$
$f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{x^2-4|x-1|-1}{x-1} =$
$= \lim\limits_{x\to 1+} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = -2.$

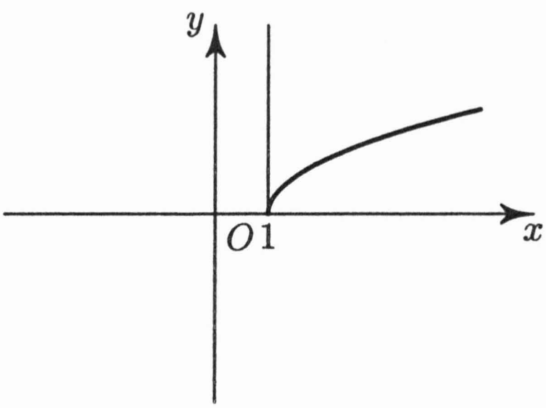
Podobně jako v předcházejícím příkladu dostáváme dvě polotečny. Levá polotečna grafu funkce f v bodě $T[1,1]$ má rovnici
$y = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 6(x - 1) + 1 = 6x - 5,\ y \leq 1$
a pravá polotečna má rovnici
$y = f'_+(0)(x - x_0) + f(x_0) = -2(x - 1) + 1 = -2x + 3,\ y \leq 1.$

Příklad 3. Funkce $f\colon y = \sqrt{|x|}$ má následující jednostranné derivace v bodě 0:
$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = -\infty;$
$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$

V tomto případě jsou obě polotečny grafu funkce f v bodě $T[0,0]$ totožné. Je to polopřímka $x = 0, y \geq 0$.



Funkce $f\colon y = \sqrt{|x|}$



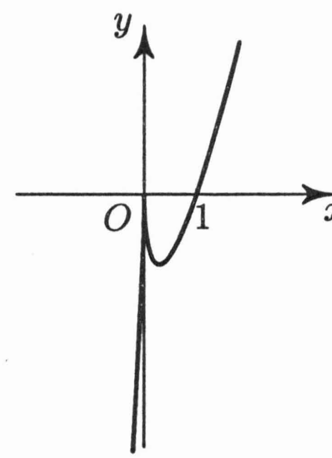
Funkce $f\colon y = \sqrt{x-1}$

Příklad 4. Funkce $f\colon y = \sqrt{x-1}$ má v bodě 1 pouze jednostrannou derivaci zprava $f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$. Graf funkce f má v bodě 1 právě jednu polotečnu o rovnici $x = 1, y \geq 0$.

Příklad 5. Funkce $f\colon y = 27(x - \sqrt[3]{x^2})$ má v bodě 0 následující jednostranné derivace:

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{27(x-\sqrt[3]{x^2})}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} 27\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) =$
$= -\infty;$

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{27(x-\sqrt[3]{x^2})}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} 27\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) =$
$= +\infty.$



Graf funkce f má v bodě 0 polotečnu o rovnici $x = 0$, $y \leq 0$.

Na závěr můžeme shrnout, že v případě derivace funkce v bodě x_0 mohou nastat tyto situace:

a) funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci;
b) funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci zprava;
c) funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci zleva;
d) funkce má v bodě x_0 nevlastní derivaci;
e) funkce má v bodě x_0 nevlastní derivaci zprava;
f) funkce má v bodě x_0 nevlastní derivaci zleva.

Úlohy:

1. Sestrojte graf funkce $f\colon y = |x^2 - 4|x-1||$ a vypočtěte derivace ve všech nulových bodech funkce f.
2. Sestrojte graf funkce $f\colon y = 8 - |x^2 - 4x|$ a napište rovnice polotečen grafu funkce f v bodech $P[0,8]$, $Q[4,8]$.
3. Sestrojte graf funkce $f\colon y = \arctan|x|$ a napište rovnice polotečen grafu funkce f v bodě $T[0,0]$.
4. Sestrojte graf funkce $f\colon y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ a napište rovnice polotečen grafu funkce f v bodě $T[0,1]$.
5. Jsou dány funkce $f(x) = x^n \sin\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$. Vyšetřete derivace a spojitost funkcí v bodě 0 pro $n = 1, 2, 3$.