Bohdan Zelinka

Čtvercové matice a jejich čtverce

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 3, 155–159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150996

ČTVERCOVÉ MATICE A JEJICH ČTVERCE

BOHDAN ZELINKA

Základní počítání s maticemi nám může sloužit k pocvičení v úpravách číselných rovností, a to nejen u žáků zájmových kroužků, ale i u nás samotných. Může nás přitom i pobavit, protože vyhovuje naší touze po poznání neznámého. Nebudeme se ovšem zabývat úmorným počítáním s maticemi o velkém počtu řádků a sloupců. Budou nám stačit čtvercové matice druhého řádu, to jest o dvou řádcích a dvou sloupcích. Vzhledem k tomu, že čtvercové matice prvního řádu jsou vlastně pouhá čísla, je docela zajímavé, kam se dostaneme postupem o jeden řád výše. Což si takhle všimnout čtverců takových matic? Docela můžeme být zvědavi, kdy se čtverec matice rovná nulové matici, či původní matici, či jednotkové matici, či minus jednotkové matici. A nebude tak těžké ukojit zvědavost (či lépe řečeno zvídavost) vlastní snahou. Základní poznatky o počítání s maticemi jsou popsány například v knize [1].

Matici, z níž budeme vycházet, budeme značit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ;$$

potom máme

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Obvyklým způsobem budeme značit *nulovou matici*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a *jednotkovou matici*

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Omezíme se pouze na matice s reálnými členy.

Zkusme napřed rovnici $\mathbf{M}^2 = \mathbf{0}$. Pro jednotlivé členy matice pak platí rovnosti:

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= 0\,, \\ b(a+d) &= 0\,, \\ c(a+d) &= 0\,, \\ bc + d^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Všimneme-li si druhé rovnosti, napadne nás, že bude asi vhodné rozlišovat případy $b \neq 0$ a $b = 0$. Nechť tedy $b \neq 0$. Potom z druhé rovnosti máme $d = -a$. Z první rovnosti pak dostáváme $c = -a^2b^{-1}$. Napíšeme-li si nyní matici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a^2b^{-1} & -a \end{pmatrix} \tag{1}$$

a umocníme-li ji na druhou, dostaneme matici $\mathbf{0}$. Řešením je tedy libovolná matice z dvouparametrické soustavy (1), kde a probíhá všechna reálná čísla a b všechna nenulová reálná čísla.

Nyní vezměme případ $b = 0$. Z první rovnosti dostáváme $a = 0$ a ze čtvrté $d = 0$. Přitom čtverec matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

při libovolném c je roven matici $\mathbf{0}$. Vlastnost $\mathbf{M}^2 = \mathbf{0}$ má tedy libovolná matice buď z dvouparametrické soustavy (1) pro libovolné a a libovolné nenulové b, nebo z jednoparametrické soustavy (2) pro libovolné c.

Hned tady vidíme zajímavou věc - v oboru matic existuje něco, co by se dalo nazvat „netriviální odmocninou z nuly“. Žádné nenulové číslo (ani reálné, ani komplexní) nemá druhou mocninu rovnou nule. Existují však matice, jejichž čtvercem je nulová matice, ale které samy nemusejí mít ani jeden nulový člen; pro $a = 2$, $b = 1$ je to matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

Nyní zkusme zjistit, které matice $\mathbf{M}$ splňují rovnost $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$; těm se říká *idempotentní*. Příslušné rovnosti lze upravit na tvar

$$\begin{aligned} a(a-1)+bc &= 0 \,, \\ b(a+d-1) &= 0 \,, \\ c(a+d-1) &= 0 \,, \\ bc+d(d-1) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Opět budeme rozlišovat $b \neq 0$ a $b = 0$. V prvním případě máme z druhé rovnosti $d = 1 - a$ a z první rovnosti $c = a(1-a)b^{-1}$. Máme opět dvouparametrickou soustavu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a(1-a)b^{-1} & 1-a \end{pmatrix}$$

pro libovolné a a libovolné nenulové b. V případě $b = 0$ dostáváme z první rovnosti, že buď $a = 0$, nebo $a = 1$; ze čtvrté rovnosti dotáváme totéž pro d. Rozlišujme ještě $c \neq 0$ a $c = 0$. Je-li $c \neq 0$, pak ze třetí rovnosti máme $d = 1 - a$ a dostáváme jednoparametrické soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

pro libovolné nenulové c. Konečně pro $c = 0$ máme čtyři možnosti

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Jak to bude s determinantem idempotentní matice? Jak víme, všechny čtvercové matice téhož řádu s nenulovým determinantem (tedy regulární) tvoří vzhledem k násobení grupu. V grupě je právě jeden idempotentní prvek, a to prvek neutrální - v našem případě $\mathbf{E}$. Ostatní idempotentní matice v našem případě musejí mít determinant nulový.

A teď zkusme $\mathbf{M}^2 = \mathbf{E}$. Příslušné rovnosti po úpravě jsou

$$\begin{aligned} a^2 + bc - 1 &= 0\,, \\ b(a+d) &= 0\,, \\ c(a+d) &= 0\,, \\ bc + d^2 - 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Pro $b \neq 0$ máme z druhé rovnosti $d = -a$ a z první rovnosti $c = (1-a^2)b^{-1}$. Máme dvouparametrickou soustavu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)b^{-1} & -a \end{pmatrix}$$

pro libovolné a a libovolné nenulové b. Pro $b = 0$ máme z první rovnosti $|a| = 1$, ze čtvrté $|d| = 1$. Je-li přitom $c \neq 0$, máme z třetí rovnosti $d = -a$ a dostáváme tedy jednoparametrické soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

pro libovolné nenulové c. Pro $c = 0$ pak máme ještě matice

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Samozřejmě možné determinanty jsou 1 a -1. U uvedené dvouparametrické soustavy se vyskytuje pouze determinant rovný jedné, u jednoparametrických soustav pouze rovný minus jedné.

A ještě bychom mohli zkusit rovnost $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{E}$, kde

$$-\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Víme, že neexistuje reálné číslo s druhou mocninou rovnou -1; jakpak to bude s maticemi? Odpovídající rovnosti jsou

$$\begin{aligned} a^2 + bc + 1 &= 0\,, \\ b(a+d) &= 0\,, \\ c(a+d) &= 0\,, \\ bc + d^2 + 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Pro $b \neq 0$ dostáváme z druhé rovnosti $d = -a$ a z první rovnosti $c = -(1+a^2)b^{-1}$. Máme dvouparametrickou soustavu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -(1+a^2)b^{-1} & -a \end{pmatrix}$$

pro libovolné a a libovolné nenulové b. Při $b = 0$ bychom měli z první rovnosti $a^2 + 1 = 0$. Poněvadž jsme se omezili na matice s reálnými členy, tento případ musíme vyloučit. Nicméně "odmocniny z $-\mathbf{E}$" zde máme. A poznamenejme, že je to tím, že bereme matice řádu druhého, tedy sudého. V tomto případě determinant matice $-\mathbf{E}$ je 1 a naše "odmocniny" mají tentýž determinant. V případě matic lichého řádu by matice $-\mathbf{E}$ měla determinant -1; determinant každé "odmocniny" z $-\mathbf{E}$ by musel být i nebo $-i$ a tato matice by obsahovala imaginární členy.

Snad toto cvičení nebylo tak docela nezajímavé. Přineslo nám zajímavé poznatky a přitom nám ukázalo, jak je důležité brát třeba v úvahu nulovost nebo nenulovost určité hodnoty. Teď byste mohli sami pokračovat třeba rovnostmi $\mathbf{M}^2 = k\mathbf{M}$ či $\mathbf{M}^2 = k\mathbf{E}$ pro dané číslo k. A jinak bych doporučoval vaší pozornosti dvouparametrickou soustavu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} .$$

Pohrajete-li si s ní, možná zjistíte, že souvisí s něčím, co jste už předtím znali v jiné souvislosti.

LITERATURA:

[1] Demlová, M., Nagy, J., *Algebra*, SNTL, Praha, 1985.