Vojtěch Kloud
Rozšíření derivace pomocí teorie stability

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 67 (2022), No. 3, 133–-148

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151041`

Rozšíření derivace pomocí teorie stability

Vojtěch Kloud

Abstrakt. V článku představujeme nový způsob zavedení derivací neceločíselných řádů založený na použití Cauchyova vzorce. Teorie je ilustrována na konkrétních příkladech včetně modelu tlumeného oscilátoru.

Úvod

Zlomkové derivace spadají do odvětví zlomkového kalkulu, který se zabývá rozšiřováním standardních operátorů do jiných než celočíselných řádů. Například Cauchyův vzorec pro opakovanou integraci

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

kde $I_a^n f(x) = \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n)\,\mathrm{d}\sigma_n \dots \mathrm{d}\sigma_2\,\mathrm{d}\sigma_1$ značí opakovanou integraci funkce f, lze přirozeně rozšířit do reálných řádů použitím funkce gama:

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

K odpovídající zlomkové derivaci se dostaneme užitím předpokladu, že derivace je inverzní operací k integraci: $D^\alpha = I^{-\alpha}$. Operátor D^α zapíšeme ve tvaru $D^\alpha = D^1 D^{\alpha-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I^{1-\alpha}$. Dostáváme tak Riemannovo–Liouvilleovo rozšíření derivace pro řád $0 < \alpha < 1$:

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Se standardním zlomkovým kalkulem se může čtenář seznámit v [6], [8] nebo [2].

Předchozí úvahy ukazují, jak je možné definovat zlomkovou derivaci. V prvním kroku najdeme jistou vlastnost derivace celočíselného řádu (Cauchyův vzorec pro opakovanou integraci), kterou lze relativně jednoduše zobecnit pro neceločíselný případ (nahrazení faktoriálu funkcí gama). Poté řekneme, že chceme mít zachovány určité klíčové vlastnosti ($D^\alpha = I^{-\alpha}$), které poslouží k samotné definici zlomkové derivace.

V tomto článku zvolíme podobný postup. Pouze očekávaná vlastnost naší zlomkové derivace bude o něco exotičtější, neboť bude vycházet z relativně vzdálené problematiky, kterou probereme v následujících odstavcích.

Vojtěch Kloud, Drtinova 825/54b, 503 11 Hradec Králové,
e-mail: `vojtech.kloud@gmail.com`

1. Rekurentní posloupnosti

V celém článku pracujeme s množinou $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, tj. nulu považujeme za přirozené číslo. Nechť $f : I \to I$ je reálná funkce na intervalu I. Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zadanou počátečním členem a_0 a rekurentním vztahem $a_{n+1} = f(a_n) \in I$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Této posloupnosti říkáme *prostá iterace funkce f s počáteční podmínkou a_0*.

Pevný bod funkce f je bod α splňující $\alpha = f(\alpha)$.

Definice 1.1. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je prostá iterace funkce f s počáteční podmínkou a_0. Pevný bod α funkce f je *stabilní*, pokud pro dané $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že je-li $|a_0 - \alpha| < \delta$, pak $|a_n - \alpha| < \epsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Není-li pevný bod α stabilní, označíme ho za *nestabilní*.

Pevný bod α je *asymptoticky stabilní*, existuje-li $\mu > 0$ takové, že pro všechna a_0 splňující $|a_0 - \alpha| < \mu$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Jednoduchý test pro stabilitu pevného bodu poskytuje následující věta [3].

Věta 1.2. *Nechť α je pevným bodem funkce spojitě diferencovatelné funkce f. Pokud $|f'(\alpha)| < 1$, bod α je asymptoticky stabilní. Je-li $|f'(\alpha)| > 1$, pak α je nestabilní.*

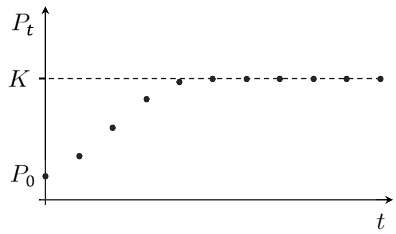
Nyní rozebereme dva zajímavé konkrétní příklady.

1.1. Logistická rovnice

V článku [4] je rozebráno modelování růstu populací pomocí logistické diferenční rovnice, která má tvar

$$P_{t+1} = \left(2 - \frac{P_t}{K}\right) P_t \tag{1.1}$$

s počáteční podmínkou P_0. Zde K je nosná kapacita daného prostředí a P_t je populace společenstva v roce t. (Časový interval nemusí být roční, záleží na rychlosti množení jedinců v populaci.)



Obr. 1. Řešení logistické rovnice pro $P_0 = 100$ a $K = 500$

Pevné body funkce $f(x) = \left(2 - \dfrac{x}{K}\right) x$ jsou dány řešením rovnice $\alpha = \left(2 - \dfrac{\alpha}{K}\right) \alpha$, odkud dostáváme $\alpha = K$ a $\alpha = 0$. Protože $f'(K) = 0$, bod $\alpha = K$ je stabilním pevným bodem podle věty 1.2. Je zjevné, že pokud $P_0 = 0$, pak $P_t = 0$ pro všechna t. Protože $f'(0) = 2$, bod $\alpha = 0$ je nestabilním pevným bodem podle věty 1.2. Při libovolně malém $P_0 > 0$ již P_t konverguje k hodnotě K.

1.2. Newtonova metoda tečen

Tato metoda slouží k nalezení kořenů rovnice $f(x) = 0$. Jedná se o speciální případ prosté iterace.

Základní myšlenka, která je popsána v učebnicích numerických metod, spočívá v tom, že aproximujeme graf funkce f jeho tečnou.

Věta 1.3 (Newtonova metoda)**.** *Nechť jsou funkce f, f', f'' spojité a α je kořenem f takovým, že $f'(\alpha) \neq 0$. Pak α je stabilní pevný bod funkce $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. K tomuto bodu konverguje každá posloupnost splňující*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n) \tag{1.2}$$

s počáteční podmínkou x_0 v dostatečné blízkosti α.

Protože $f(\alpha) = 0$, máme $g(\alpha) = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$, tedy α je pevný bod funkce g. Navíc $g'(\alpha) = 1 - \dfrac{f'(\alpha)f'(\alpha) - f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0$ a tedy α je asymptoticky stabilním bodem funkce g podle věty 1.2. Posloupnost (1.2) s počáteční podmínkou dostatečně blízko α konverguje k tomuto pevnému bodu.

Newtonova metoda tečen je užitečná primárně v tom, že obvykle konverguje rychleji, než prostá iterace.

2. Přepis rekurentních posloupností na ODR

Naším cílem je aproximovat členy rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ spojitou funkcí. Asi nejintuitivnější přístup je nahradit diskrétní $n \in \mathbb{N}$ spojitou veličinou $t \in \mathbb{R}_0^+$ a členy a_n spojitou funkcí g takovou, že pro každé $t \in \mathbb{N}$ platí $a_t = g(t)$. Z prosté iterace funkce f bychom tak dostali *funkcionální rovnici* ve tvaru $g(t+1) = f(g(t))$ s počáteční podmínkou $g(0) = a_0$. Neexistuje ovšem obecný postup, jak najít řešení takové funkcionální rovnice, což je pro nás nevýhodné. My hledáme obecněji uplatnitelnou metodu. Zvažme následující postup.

Nejprve nahradíme diskrétní veličinu n spojitou veličinou t a posloupnost $\{a_t\}_{t=0}^{\infty}$ funkcí g. Nyní aproximujeme derivaci funkce g vztahem $g'(t) \approx g(t+1) - g(t) = a_{t+1} - a_t$. Tato aproximace vychází z definice derivace $g'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h}$, kde volíme $h = 1$. Z prosté iterace funkce f, která je dána vztahem $a_{t+1} = f(a_t)$ neboli $a_{t+1} - a_t = f(a_t) - a_t$, dostáváme *diferenciální rovnici* ve tvaru $g'(t) = f(g(t)) - g(t)$ s počáteční podmínkou $g(0) = a_0$. Tento postup budeme značit symbolem $\rightsquigarrow$:

$$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n \rightsquigarrow g'(t) = f(g(t)) - g(t). \tag{2.1}$$

Všimněme si, že při našem přepisu v podstatě aplikujeme metodu konečných diferencí opačným směrem. Při standardní metodě konečných diferencí (někdy také Eulerově metodě) převádíme ODR na rekurentní rovnici. Poté numericky počítáme její členy, abychom dostali aproximaci řešení dané ODR. Aby tato aproximace byla co nejblíže skutečnému řešení dané ODR, volíme co nejmenší diferenci. V našem přepisu se ovšem dostáváme z rekurentní posloupnosti na ODR pomocí diference $h = 1$.

I s takto „velkou“ diferencí si ovšem rekurentní posloupnosti a jejich odpovídající ODR, respektive jejich řešení, zachovávají jednu klíčovou podobnost. Za jistých okolností je jejich limita v nekonečnu stejná. Toto tvrzení formulujeme v následující větě.

Věta 2.1 (Přepis prosté iterace)**.** *Nechť α je pevným bodem funkce f a platí $|f'(\alpha)| < 1$. Pak funkce $g(t) = \alpha$ je konstantním stacionárním řešením diferenciální rovnice $g'(t) = f(g(t)) - g(t)$. Toto řešení je asymptoticky stabilní, tedy pro všechny počáteční podmínky $g(0)$ dostatečně blízko α platí pro odpovídající řešení vztah $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \alpha$.*

Předpoklady na funkci f jsou zde stejné jako ve větě 1.2 a odpovídající ODR jsme dostali z prosté iterace právě přepisem (2.1). Důkaz věty 2.1 se standardně provádí linearizací dané ODR [9]. Alternativní důkaz je případně k nalezení v autorově práci [7]. Platnost této věty ilustrujeme na přepisu dvou již uvedených posloupností.

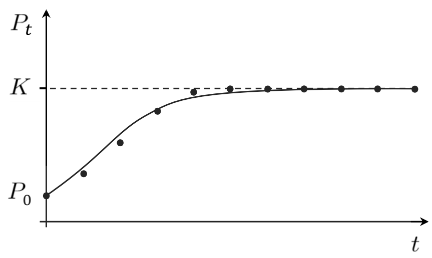
2.1. Z logistické rovnice na logistickou křivku

Uvedeným postupem přepišme logistickou rovnici z (1.1):

$$P_{t+1} - P_t = \left(2 - \frac{P_t}{K}\right) P_t - P_t \rightsquigarrow g'(t) = \left(2 - \frac{g(t)}{K}\right) g(t) - g(t).$$

Řešením této rovnice s počáteční podmínkou $P(0) = P_0$ je funkce

$$g(t) = \frac{K}{1 - (1 - K/P_0)\mathrm{e}^{-t}}. \tag{2.2}$$



Obr. 2. Diskrétní posloupnost P_t (1.1) a spojitá funkce $g(t)$ (2.2) pro $P_0 = 100$ a $K = 500$

Grafu funkce (2.2) říkáme *logistická křivka* [9]. I když nutně neprochází členy posloupnosti P_t, jejich limity v nekonečnu jsou stejné, což je pro nás hlavní:

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \lim_{t\to\infty} g(t) = K.$$

2.2. Přepis Newtonovy metody

Je zajímavé, že při přepisu Newtonovy metody jsme vždy schopni vyjádřit řešení dané ODR. Mějme funkci f splňující předpoklady věty 1.3. Nejprve aplikujeme námi uvedený postup přepisu

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightsquigarrow g'(t) = -\frac{f(g(t))}{f'(g(t))}. \tag{2.3}$$

Výraz upravme a integrujme podle t:

$$\int \frac{f'(g(t))}{f(g(t))} g'(t)\, \mathrm{d}t = \int -1\, \mathrm{d}t = -t + c.$$

Zavedeme-li substituci $f(g(t)) = u$, pak $f'(g(t))g'(t)\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ a dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| = -t + c,$$
$$u = f(g(t)) = \pm c_0 \mathrm{e}^{-t} = c_1 \mathrm{e}^{-t}.$$

Předpokládejme že $f'(\alpha) \neq 0$, tedy kolem α je f monotónní. Existuje tak zde inverzní funkce f^{-1}, pro kterou platí $f^{-1}(0) = \alpha$. Můžeme poté vyjádřit

$$g(t) = f^{-1}(f(x_0)\mathrm{e}^{-t}).$$

Tato funkce je řešením (2.3), splňuje $g(0) = x_0$ a platí pro ni $\lim_{t\to\infty} g(t) = f^{-1}(0) = \alpha$, což souhlasí s větou 2.1.

3. Podmínka pro rozšíření derivace

Nadále budeme chtít, aby si i jinak zadané rekurentní posloupnosti při obdobném přepisu zachovaly vlastnost, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{t\to\infty} g(t). \tag{3.1}$$

Ta nás při dobře zvolené posloupnosti dostane k naší podmínce rozšíření. Tato posloupnost bude vycházet z Taylorova rozvoje funkce.

Věta 3.1 (Taylorův rozvoj [5])**.** *Je-li funkce f analytická pro $|z - z_0| < \rho$, pak pro všechna taková z platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

kde $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Tato řada navíc konverguje absolutně.

Mějme funkci f analytickou pro $|z - z_0| < \rho$. Definujeme-li posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ s počáteční podmínkou $a_0 = 0$ a dalšími členy

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k,$$

pak podle Taylorovy věty platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = f(z)$. Nechť $n = t$. Aplikováním uvedeného přepisu na tuto posloupnost dostáváme ODR v nestandardním tvaru

$$a_{t+1} - a_t = \frac{f^{(t)}(z_0)}{t!}(z-z_0)^t \rightsquigarrow g'(t) = \frac{f^{(t)}(z_0)}{t!}(z-z_0)^t \tag{3.2}$$

s počáteční podmínkou $g(0) = a_0 = 0$. Zde nahradíme funkci faktoriál funkcí gama, pro niž platí $t! = \Gamma(t+1)$. Předpokládejme, že výraz $f^{(t)}(z_0)$ má smysl pro všechna $t \geqq 0$ a pravá strana rovnice je integrovatelná. Integrujme obě strany (3.2) od 0 do τ:

$$g(\tau) = \int_0^\tau \frac{f^{(t)}(z_0)}{\Gamma(t+1)}(z-z_0)^t \,\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Rozšíření derivace nadále bude moct záviset na volbě z a budeme tedy označovat $f^{(t)}(z_0) = D_z^t f(z_0)$. Chceme mít zachovanou vlastnost (3.1). Provedeme-li limitní přechod $\tau \to \infty$, pak kýžená podmínka, kterou naše zlomková derivace $D_z^t f(z_0)$ musí splňovat, je ve tvaru

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{D_z^t f(z_0)}{\Gamma(t+1)}(z-z_0)^t \,\mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

4. Návrh rozšíření derivace

Pro návrh derivace splňující podmínku (3.4) využijeme následující větu.

Věta 4.1 (Cauchyův vzorec [5]). *Nechť funkce f je analytická pro $|z-z_0| < \rho$ a C je kružnice se středem v z_0 a poloměrem $r < \rho$. Pak v bodě z_0 existují derivace funkce f všech řádů a platí*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z. \tag{4.1}$$

Začněme s Cauchyovým vzorcem (4.1). V něm nahraďme $n = t$ a $t! = \Gamma(t+1)$, čímž formálně dostaneme

$$f^{(t)}(z_0) = \frac{\Gamma(t+1)}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{t+1}} \,\mathrm{d}z.$$

Parametrizujme kružnici $|z-z_0| = r$ pomocí vztahu $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + z_0$ pro $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Pak $\mathrm{d}z = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$, čímž dostáváme

$$f^{(t)}(z_0) = \frac{\Gamma(t+1)}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+z_0)}{r^{t+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+1)\theta}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma(t+1)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+z_0)}{r^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta}}\,\mathrm{d}\theta.$$

Protože f je pro $|z-z_0| < \rho$ analytická a $r < \rho$, můžeme v čitateli integrandu zapsat funkci f jako $\sum_{n=0}^\infty c_n(z-z_0)^n$, kde $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$:

$$f^{(t)}(z_0) = \frac{\Gamma(t+1)}{2\pi r^t} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{n=0}^\infty c_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma(t+1)}{2\pi r^t} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^\infty c_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-t)\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Zaměňme pořadí sumy a integrálu:

$$f^{(t)}(z_0) = \frac{\Gamma(t+1)}{r^t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-t)\theta}}{2\pi}\, \mathrm{d}\theta. \tag{4.2}$$

Samotný integrál je roven

$$\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-t)\theta}}{2\pi\mathrm{i}(n-t)}\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n-t)}}{2\pi\mathrm{i}(n-t)} - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(n-t)} = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t}-1}{2\pi\mathrm{i}(n-t)}.$$

Klíčová vlastnost této funkce je ta, že její limita pro $t \to n$ je 1. Toto lze ověřit například využitím l'Hospitalova pravidla. Jedná se tedy o bod odstranitelné nespojitosti. Pro všechna ostatní přirozená čísla je funkce nulová.

Označme $\lambda_n(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t}-1}{2\pi\mathrm{i}(n-t)}$. Funkci λ_n dodefinujeme v bodě $t = n$, kde položíme $\lambda_n(n) = 1$. Zároveň platí $\lambda_n(k) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$.

Ve (4.2) značí r poloměr integrace, na kterém celočíselné derivace funkce nejsou závislé. Můžeme ho tedy nahradit libovolným nenulovým číslem a rovnost pro všechna $t \in \mathbb{N}$ bude zachována. Například ho nahradíme číslem $z - z_0 \neq 0$. Zde se neceločíselná derivace stává závislou na parametru z a budeme ji tedy značit $D_z^t f(z_0)$. Konečně tak dostáváme možné rozšíření derivace

$$D_z^t f(z_0) = \frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \lambda_n(t).$$

5. Rozšíření derivace

Konstrukci funkcí λ_n z předchozí kapitoly zobecníme a budeme uvažovat libovolnou posloupnost funkcí λ_n splňující $\lambda_n(n) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a zároveň $\lambda_n(k) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Ze všech takových posloupností funkcí vybereme ty, které zajistí platnost všech požadovaných náležitostí. Uveďme je v následující klíčové větě. Symbol $D_z^t f(z_0)$ značí derivaci funkce f řádu t v bodě z_0 s parametrem z. Roli parametru z ukážeme v nadcházejících kapitolách.

Věta 5.1 (Rozšíření derivace). *Nechť funkce f je analytická pro $|z - z_0| < \rho$. Pro všechna $t \geqq 0$ a $z \neq z_0$ označme*

$$D_z^t f(z_0) = \frac{\Gamma(t+1)}{(z-z_0)^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \lambda_n(t), \tag{5.1}$$

kde λ_n splňuje následující podmínky:

1. $\lambda_n(n) = 1$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a zároveň* $\lambda_n(k) = 0$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$.
2. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce λ_n spojité a platí $|\lambda_n(t)| < M$ a $\int_0^\infty |\lambda_n(t)| \mathrm{d}t < C$, kde M, C nezávisejí na n.*
3. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\int_0^\infty \lambda_n(t)\, \mathrm{d}t = 1$.*

Pak $D_z^t f(z_0)$ je rozšíření derivace funkce f v bodě z_0 v tom smyslu, že pro všechna $m \in \mathbb{N}$ platí $D_z^m f(z_0) = f^{(m)}(z_0)$. Dále platí

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{D_z^t f(z_0)}{\Gamma(t+1)} (z - z_0)^t \, \mathrm{d}t. \tag{5.2}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že se jedná o rozšíření derivace. Mějme $m \in \mathbb{N}$. Dosazením $t = m$ do (5.1) dostáváme

$$D_z^m f(z_0) = \frac{m!}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \lambda_n(m).$$

Podle první podmínky na λ_n se všechny členy řady s $n \neq m$ vynulují a zbude pouze člen s $n = m$, pro který platí $\lambda_m(m) = 1$. Z řady tedy zbude pouze

$$D_z^m f(z_0) = \frac{m!}{(z - z_0)^m} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m = f^{(m)}(z_0),$$

což dokazuje, že uvedený vzorec je vskutku rozšířením derivace. Dále dokážeme, že splňuje podmínku (5.2). Dosazením (5.1) do (5.2) dostáváme

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1)} \frac{(z - z_0)^t}{(z - z_0)^t} \sum_{n=0}^\infty c_n (z - z_0)^n \lambda_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty c_n (z - z_0)^n \lambda_n(t) \, \mathrm{d}t,$$

kde $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Nyní chceme zaměnit pořadí sumy a integrálu. Uvědomme si, že výraz

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty |c_n (z - z_0)^n \lambda_n(t)| \, \mathrm{d}t$$

konverguje díky druhé podmínce na λ_n a tomu, že Taylorova řada funkce f konverguje absolutně. Jsou tedy splněny předpoklady Lebesgueovy věty a záměnou pořadí sumy a integrálu dostáváme

$$\sum_{n=0}^\infty c_n (z - z_0)^n \int_0^\infty \lambda_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

Díky třetí podmínce na λ_n a Taylorově větě je tento výraz roven $f(z)$, což jsme chtěli dokázat. □

5.1. Vlastnosti rozšíření

Kromě klíčové podmínky (5.2), která sama o sobě může být považována za vlastnost, má námi uvedené rozšíření další vlastnosti.

Věta 5.2 (Linearita rozšíření). *Operátor rozšíření derivace $f \mapsto D_z^t f(z_0)$ je lineárním operátorem. Tedy pro všechna α, $\beta \in \mathbb{C}$ platí*

$$D_z^t (\alpha f(z_0) + \beta g(z_0)) = \alpha D_z^t f(z_0) + \beta D_z^t g(z_0).$$

Důkaz tohoto tvrzení je přímým důsledkem definice (5.1) a linearity standardní celočíselné derivace.

Věta 5.3 (Spojitost rozšíření)**.** *Pro funkci f analytickou pro $|z - z_0| < \rho$ je pro pevně dané $z \neq z_0$ z této oblasti funkce $D_z^t f(z_0)$ spojitá v proměnné t pro všechna $t \geqq 0$.*

Uveďme ještě, že funkce g, která měla *spojitě* aproximovat původní posloupnost (viz kapitolu 3), je vskutku spojitá.

Věta 5.4 (Spojitost funkce g)**.** *Pro pevně danou funkci f a body z, z_0 je funkce*

$$g(\tau) = \int_0^\tau \frac{D_z^t f(z_0)}{\Gamma(t+1)} (z - z_0)^t \, \mathrm{d}t$$

spojitá funkce proměnné τ pro všechna $\tau \geqq 0$.

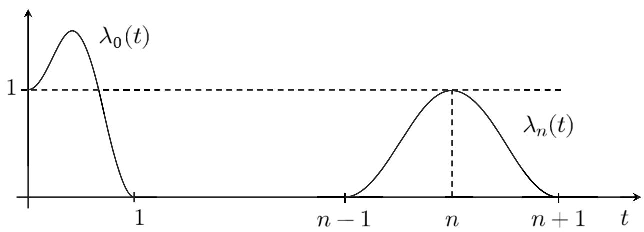
Platnost těchto tvrzení o spojitosti vyplývá z druhé podmínky na λ_n ve větě 5.1. Při důkazu také využíváme vlastnosti stejnoměrné konvergence a Weierstrassovo kritérium. Důkazy těchto tvrzení jsou v plném znění k nalezení v autorově práci [7].

5.2. Příklady funkcí λ_n

Konkrétní posloupnosti funkcí λ_n, splňující dané podmínky, není nijak zvlášť složité najít. Spokojíme-li se s tím, že daná funkce je zadaná po částech, pak jednou takovou posloupností může být například

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \sin^2(\pi t), & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in (1, \infty), \end{cases} \\ \lambda_n(t) &= \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}(t - n)\right), & t \in (n-1, n+1), \\ 0, & [0, n-1] \cup [n+1, \infty), \end{cases} \end{aligned} \tag{5.3}$$

kde $n = 1, 2, \ldots$



Obr. 3. Funkce λ_n z (5.3)

Fakt, že funkce (5.3) splňují všechny podmínky věty 5.1, je snadno ověřitelný.

K dalšímu příkladu posloupnosti funkcí, které mají uvedené vlastnosti, se můžeme dostat přes jejich primitivní funkce. Zvažme funkci

$$f_n(t) = \frac{\sin(2\pi t)(1 - \cos(2\pi t))}{4\pi^3 (t-n)^2} + \frac{\cos(2\pi t) - 1}{2\pi^2 t^2}, \tag{5.4}$$

kterou dodefinujeme bodech $t = 0$ a $t = n$ odpovídajícími limitami. Tvrdíme, že posloupnost funkcí $\lambda_n(t) = (f_n(t))'$ má všechny náležité vlastnosti.

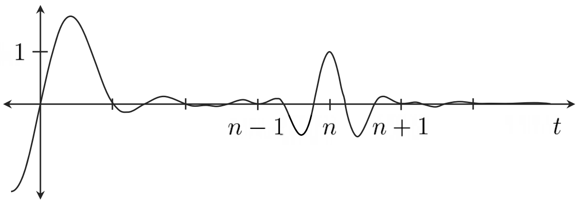
Platí $\lim_{t \to 0}(f_n(t))' = 0$ a $\lim_{t \to n}(f_n(t))' = 1$. To lze ukázat například Taylorovým rozvojem funkce kolem těchto bodů. Pro všechna $k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ platí $(f_n(t))' = \lambda_n(k) = 0$, což je první podmínka pro λ_n.

Druhou podmínku lze ověřit derivováním f_n. Platnost prvních dvou podmínek je podrobněji rozebrána v autorově práci [7].

Nejpřímočařejší je v tomto případě ověření třetí podmínky. Zde máme totiž rovnou $\int_0^\infty \lambda_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (f_n(t))'\,\mathrm{d}t = \lim_{t \to \infty} f_n(t) - \lim_{t \to 0} f_n(t) = 1$. Derivováním (5.4) dostáváme

$$\begin{aligned}\lambda_n(t) = {} & \frac{\cos(2\pi t)}{2\pi^2(t-n)^2} - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi^3(t-n)^3} - \frac{\cos(4\pi t)}{2\pi^2(t-n)^2} + \\ & + \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi^3(t-n)^3} - \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t^2} - \frac{\cos(2\pi t) - 1}{\pi^2 t^3}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

V krajních bodech $t = 0$ a $t = n$ pak funkci dodefinujeme odpovídajícími limitami, které mají hodnoty 0 a 1.



Obr. 4. Funkce λ_n z (5.5)

Takto zadaná funkce sice má komplikovaný předpis, její výhodou je však to, že není zadaná po částech (kromě dodefinování v bodech 0 a n).

6. Příklady rozšíření

Prozkoumejme například zlomkové derivace funkce sinus v bodě $x = 0$. V tomto bodě mají derivace celočíselných řádů hodnoty $0, 1, 0, -1, 0, \ldots$ Všimněme si, že námi definovanou zlomkovou derivaci (5.1) lze jednoduše vyjádřit, známe-li Taylorův rozvoj dané funkce v požadovaném bodě:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

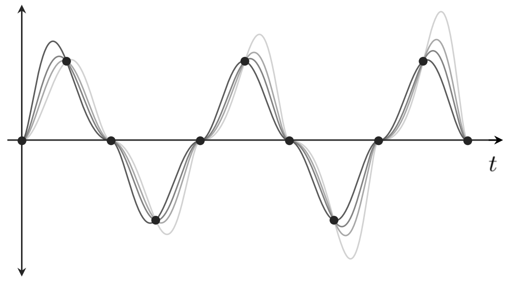
Podle (5.1) má pro $x = 0$ zlomková derivace funkce sinus s parametrem z tvar

$$D_z^t \sin(x)|_{x=0} = \frac{\Gamma(t+1)}{z^t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \lambda_{2n+1}(t). \tag{6.1}$$

Využijme nejprve funkce λ_n definované v (5.3), přičemž funkci λ_0 nebudeme potřebovat:

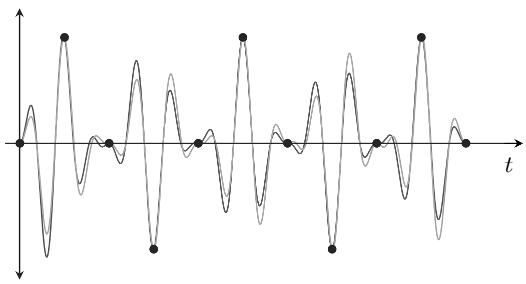
$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}(t-n)\right), & t \in (n-1, n+1), \\ 0, & t \in [0, n-1] \cup [n+1, \infty). \end{cases} \tag{6.2}$$

Zvolme čtyři různé hodnoty parametru: $z = 1, 2, \pi, 2\pi$. Na obrázku 5 je graf funkce (6.1) s parametrem $z = 1$ nejsvětlejší a s rostoucím parametrem křivka tmavne.



Obr. 5. Graf funkce (6.1) s parametry $z = 1, 2, \pi, 2\pi$ pro $t \in [0, 10]$ a λ_n z (6.2)

Zvolme ještě trigonometrickou verzi λ_n definovanou v (5.5) a mějme dva parametry $z = \pi, 2\pi$. V grafu na obrázku 6 je funkce (6.1) s parametrem $z = \pi$ světlejší.



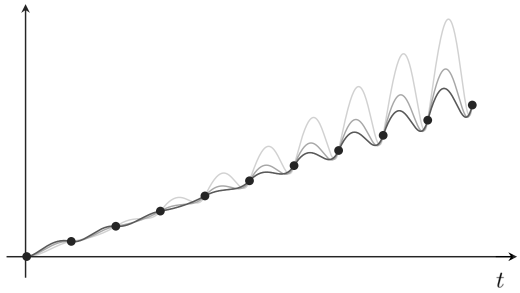
Obr. 6. Graf funkce (6.1) s parametry $z = \pi, 2\pi$ pro $t \in [0, 10]$ a λ_n z (5.5)

Jako druhý příklad vezměme funkci $f(x) = x\mathrm{e}^x$ a počítejme derivaci v bodě $x = 0$. V tomto bodě má funkce Taylorův rozvoj

$$x\mathrm{e}^x = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n.$$

Odsud je zjevné, že $f^{(n)}(0) = n$, tedy derivace roste s jejím řádem lineárně. Zlomková derivace této funkce s parametrem z má podle (5.1) tvar

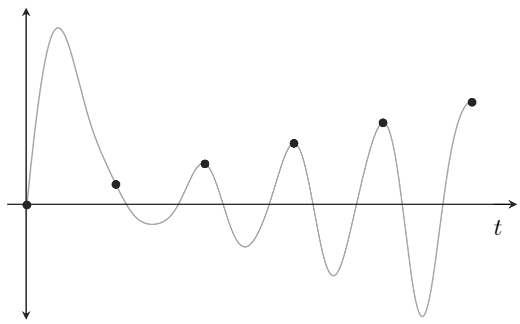
$$D_z^t \mathrm{e}^x|_{x=0} = \frac{\Gamma(t+1)}{z^t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}z^n\lambda_n(t). \tag{6.3}$$



Obr. 7. Graf funkce (6.3) s parametry $z = 1, 2, 3$ pro $t \in [0, 10]$ a λ_n z (5.3)

Využijme funkci λ_n z (5.3) pro hodnoty parametru $z = 1, 2, 3$, viz obrázek 7. Znovu zde s rostoucím parametrem křivka tmavne.

Pro trigonometrickou verzi λ_n z (5.5) zvolme jeden parametr $z = \frac{3}{2}$, viz obrázek 8.



Obr. 8. Graf funkce (6.3) s parametrem $z = \frac{3}{2}$ pro $t \in [0, 5]$ a λ_n z (5.5)

Rozebereme ještě rozšíření derivace funkce na celých intervalech. Mějme funkci $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, jejíž derivace celočíselných řádů jsou $f^{(0)}(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f^{(1)}(x) = x$, $f^{(2)}(x) = 1$, $f^{(3)}(x) = 0$ pro všechna x. Zajímají nás nyní derivace neceločíselných řádů, řekněme na intervalu $[-1, 1]$. Podle (5.1) je rozšíření derivace v bodě x s parametrem z ve tvaru

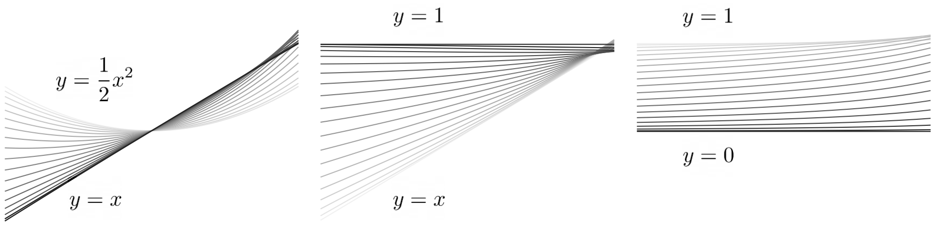
$$D_z^t f(x) = \frac{\Gamma(t+1)}{(z-x)^t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-x)^n \lambda_n(t),$$

kde $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}$. Aby tato rozšíření byla reálná na zvoleném intervalu, stačí vybrat z tak, aby $z > x$. Vyberme například $z = 2$. Protože všechny celočíselné derivace funkce pro $n \geqq 3$ jsou nulové, stačí vzít pouze první tři členy řady. Rozšíření má tedy tvar

$$D_2^t \left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{\Gamma(t+1)}{(2-x)^t} \left(\frac{1}{2}x^2\lambda_0(t) + x(2-x)\lambda_1(t) + \frac{(2-x)^2}{2}\lambda_2(t)\right), \tag{6.4}$$

kde funkce λ_n jsou dány vztahem (5.3).

Ve třech grafech na obrázku 9 je vždy zobrazena hodnota derivace $D_2^t\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ pro t z intervalu [0, 1], [1, 2] a [2, 3]. S rostoucím t křivka tmavne. Poznamenejme, že osy grafů nejsou v poměru 1 : 1.

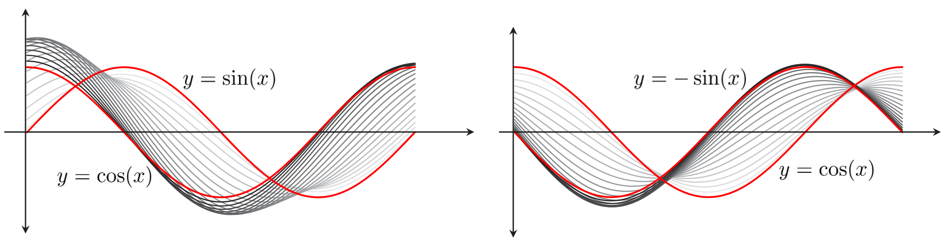


Obr. 9. Zlomkové derivace funkce $\frac{1}{2}x^2$ podle (6.4) pro $x \in [-1, 1]$ a t v intervalech [0, 1], [1, 2] a [2, 3] s parametrem $z = 2$.

Jako druhý příklad zvažme rozšíření derivace funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$. Zvolme například parametr $z = 3\pi$. Celočíselné derivace jsou $f^{(0)}(x) = \sin x$, $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\sin x$ pro všechna x. Bude nás zajímat rozšíření derivace pro řád $t \in [0, 2]$. Pokud použijeme λ_n z (5.3), můžeme z nekonečného součtu vynechat členy s $\lambda_3, \lambda_4, \ldots$, protože jsou nulové pro $t \in [0, 2]$. Zlomková derivace funkce sinus má tedy podle (5.1) tvar

$$
\begin{aligned}
D_{3\pi}^t \sin(x) = {} & \frac{\Gamma(t+1)}{(3\pi - x)^t} \times \\
& \times \left(\sin(x)\lambda_0(t) + \cos(x)(3\pi - x)\lambda_1(t) - \frac{\sin(x)}{2}(3\pi - x)^2\lambda_2(t)\right), \quad (6.5)
\end{aligned}
$$

viz obrázek 10.



Obr. 10. Zlomkové derivace funkce sinus podle (6.5) pro $x \in [0, 2\pi]$ a t v intervalech [0, 1] a [1, 2] s parametrem $z = 3\pi$

7. Aplikace zlomkové derivace

Zlomkový kalkulus nachází své uplatnění ve fyzice primárně při řešení zlomkových diferenciálních rovnic. Výhodou zlomkových derivací je, že jsou často závislé na dalším parametru (v našem případě z), který nám dává další kontrolu nad zkoumaným systémem. Takovým derivacím říkáme *nelokální zlomkové derivace*.

V této kapitole se zaměříme na modelování tlumeného oscilátoru pomocí zlomkových derivací. Použijeme námi zavedenou zlomkovou derivaci v odpovídající zlomkové diferenciální rovnici a budeme zkoumat její řešení.

V článku [1] je modelován tlumený oscilátor pomocí zlomkové diferenciální rovnice ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha u}{\mathrm{d}t^\alpha} + \omega^\alpha u(t) = 0, \tag{7.1}$$

kde $1 < \alpha \leqq 2$, $\omega > 0$ s počáteční podmínkou $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Obdobný model můžeme najít i v knize [6]. V obou případech je pro modelování využita Caputova derivace. My využijeme námi zavedenou derivaci $D_z^\alpha u$.

V první řadě ukážeme, jak rovnice (7.1) může modelovat tlumený oscilátor. Pro $\alpha = 1$ má rovnice tvar

$$u'(t) + \omega u(t) = 0.$$

Podmínku $u'(0) = 0$ zde zanedbáváme. Řešením této rovnice je funkce $u(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}$, která představuje exponenciální pokles konvergující k nule. Pro $\alpha = 2$ má rovnice tvar

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0.$$

Řešením této rovnice je $u(t) = \cos(\omega t)$, tedy kosinusoida s periodou $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Pro $\alpha \in (1, 2)$ můžeme tedy očekávat, že řešením rovnice bude jakási kombinace těchto funkcí, tedy klesající exponenciální funkce s určitou periodou, která modeluje právě tlumené oscilátory.

Pro zlomkovou diferenciální rovnici

$$D_z^\alpha u(t) + \omega^\alpha u(t) = 0 \tag{7.2}$$

zvolme funkce λ_n z (5.3). Rozepsáním tak dostáváme ODR druhého řádu

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(z-t)^\alpha}\left(u'(t)(z-t)\lambda_1(\alpha) + \frac{u''(t)}{2}(z-t)^2\lambda_2(\alpha)\right) + \omega^\alpha u(t) = 0.$$

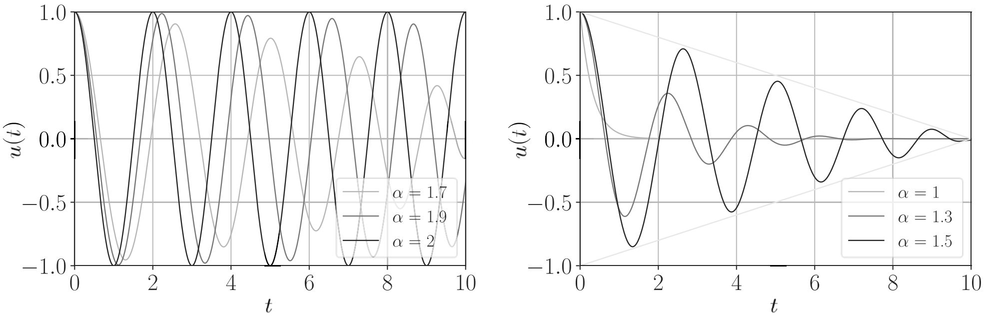
Poznamenejme, že při volbě λ_n z (5.5) bychom dostali diferenciální rovnici, kde by se objevovaly derivace funkce u všech řádů, což není žádoucí.

Rovnici budeme řešit numericky na intervalu $t \in [0, 10)$. Zvolme tedy $z = 10$. Později ukážeme, jaký vliv má výběr tohoto parametru na řešení rovnice.

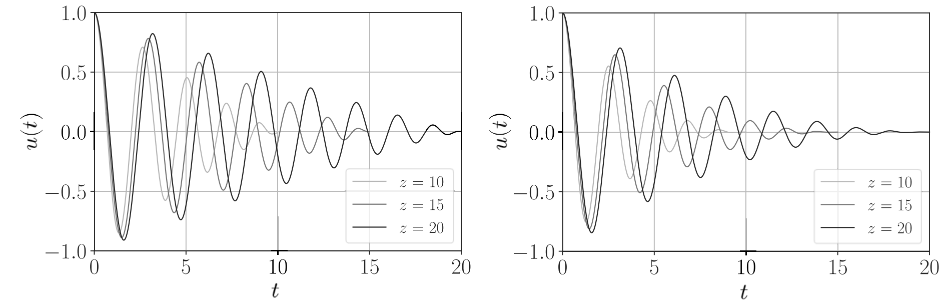
Z obrázku 11 je patrné, že řád α zlomkové diferenciální rovnice určuje, jak moc je daný oscilátor tlumený. Pro $\alpha = 2$ je oscilátor harmonický a bez jakékoliv ztráty energie, což odpovídá našemu analytickému výpočtu. Pro $2 > \alpha > 1{,}5$ je toto tlumení malé. Pro $\alpha = 1{,}5$ amplituda oscilátoru lineárně klesá. To je výhodou oproti standardním modelům, které pracují pouze s exponenciálním úbytkem, který v našem modelu nastává pro $\alpha < 1{,}5$.

Zaměřme se na případ $\alpha \geqq 1{,}5$ a měňme nelokální parametr z v diferenciální rovnici (7.2).

Pro $\alpha \leqq 1{,}5$ je z obrázku 12 zjevný význam parametru z. V tomto případě z reguluje okamžik, kdy oscilátor ztratí téměř veškerou svojí energii. Toto je velmi užitečné oproti standardním modelům, neboť je jednodušší změřit nebo zadat, kdy oscilátor dospěje do klidu, než složitě modelovat odporové síly prostředí. Tlumení oscilátoru tak lze charakterizovat kombinací parametrů α, z.



Obr. 11. Řešení u rovnice (7.2) pro $z = 10$, $\omega = \pi$ a vybrané hodnoty $\alpha \in [1, 2]$



Obr. 12. Řešení u rovnice (7.2) pro $\alpha = 1{,}5$, $\alpha = 1{,}4$, $\omega = \pi$ a vybrané hodnoty z

8. Závěr

V článku jsme představili podmínku pro nelokální rozšíření derivace analytické funkce do všech nezáporných reálných řádů. Tato podmínka vycházela z určitých paralel mezi rekurentně zadanými posloupnostmi a odpovídajícími diferenciálními rovnicemi. Uvedená podmínka se markantně liší od podmínek na standardní zlomkové derivace, s nimiž se může čtenář seznámit v [6] a [8].

Rozšíření derivace splňující danou podmínku jsme odvodili pomocí Cauchyova vzorce a Taylorova rozvoje. Uvedené rozšíření je oproti standardně užívaným rozšířením jednodušší na výpočet, což jsme demonstrovali na konkrétních příkladech. Zlomkovou derivaci jsme využili k modelování tlumeného oscilátoru.

Poděkování. Rád bych poděkoval svému konzultantovi RNDr. Danielu Cameron Campbellovi, Ph.D., a doc. RNDr. Radku Kučerovi, Ph.D., za cennou zpětnou vazbu a svému dobrému kamarádovi Martinu Dolákovi za cenné rady a podporu při psaní práce SOČ [7], z které tento článek vychází.

L i t e r a t u r a

[1] Al-Rabtah Adel, E., Vedat, S., Momani, S.: *Solutions of a fractional oscillator by using differential transform method.* Comput. Math. Appl. 59 (2010), 1356–1362.

[2] ČERMÁK, J., KISELA, T., NECHVÁTAL, L.: *Několik poznámek ke zlomkovému kalkulu.* PMFA 65 (2020), 157–174.

[3] ELAYDI, S.: *An introduction to difference equations.* Springer, New York, 2006.

[4] ERBAN, R.: *Matematická biologie: Populační modely, dynamika a chaos.* Rozhledy matematicko-fyzikální 95 (2020), 1–10.

[5] GAMELIN, T. W.: *Complex analysis.* Springer, New York, 2001.

[6] HERRMANN, R.: *Fractional calculus: An introduction for physicists.* World Scientific, 2011.

[7] KLOUD, V.: *Rozšíření derivace pomocí teorie stability. Středoškolská odborná činnost.* Hradec Králové, 2020. Dostupné z: `http://soc.nidv.cz/archiv/rocnik43/obor/1`

[8] PODLUBNY, I.: *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.* Elsevier, 1998.

[9] STROGATZ, S.: *Nonlinear dynamics and chaos.* Levant Books, 2007.