Vlastimil Dlab

Kouzlo Sierpińského trojúhelníku – The Magic of the Sierpiński Triangle

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 2, 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151069

Kouzlo Sierpińského trojúhelníku
The Magic of the Sierpiński Triangle

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

S pojmem nekonečna, naprosto podstatným v celé řadě pojmů současné matematiky, se setkáváme už v raném stádiu výuky matematiky. Občas vede k závěrům, které nás mohou překvapit. Pojem limity a konstrukce Sierpiǹského spolu s konstrukcemi, které z ní mohou být snadno odvozeny, slouží jako takové příklady. Vyjadřují obsahy geometrických útvarů jako nekonečný součet obsahů jejich „izolovaných“ částí.

Příklad (Trojúhelník Sierpińského). V rovnostranném trojúhelníku ABC sestrojme posloupnost trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_{2t}B_{2t}C_{2t}$ pro $t = 1, 2, 3$, $A_{3t}B_{3t}C_{3t}$ pro $t = 1, 2, \dots, 3^2$, $A_{4t}B_{4t}C_{4t}$ pro $t = 1, 2, \dots, 3^3$, atd., jak je naznačeno na obr. 1. Do jaké míry vyplní tyto trojúhelníky původní trojúhelník ABC?

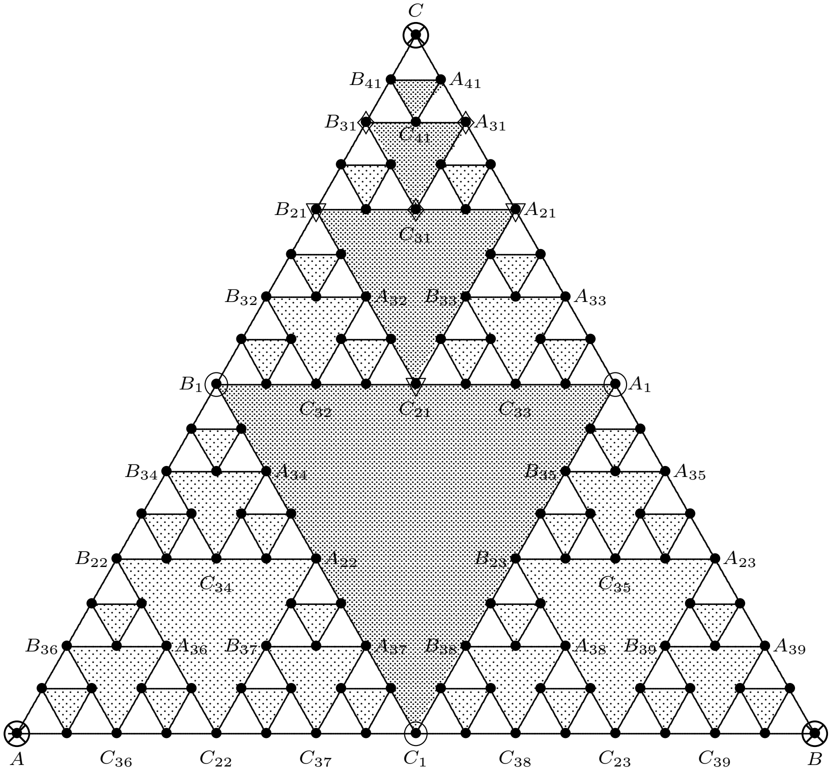
Označíme-li délku strany daného trojúhelníku a, tj. $|AB| = |BC| = |CA| = a$, celková plocha sestrojených (šrafovaných) trojúhelníků je součet geometrické řady:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2^2}\right)^2 + 3^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2^3}\right)^2 + 3^3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2^4}\right)^2 + \cdots =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{1}{4}\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

což je obsah původního trojúhelníku. Tedy, vyšrafovaná plocha nakonec vyplní celý původní trojúhelník (až na křivku, kterou obdržíme sjednocením stran všech vepsaných trojúhelníků).

The concept of infinity is unquestionably essential in contemporary mathematics. It already appears in the early stages of mathematics education and occasionally leads to conclusions that may surprise us. The concept of a limit, the Sierpiński construction and its simple derivations can serve as such examples. They express the areas of geometric objects as an infinite sum of the areas of their “isolated” parts.

Example (The Sierpiński triangle). Given an equilateral triangle ABC construct a sequence of triangles $A_1B_1C_1$, $A_{2t}B_{2t}C_{2t}$ for $t = 1, 2, 3$, $A_{3t}B_{3t}C_{3t}$ foor $t = 1, 2, \ldots, 3^2$, $A_{4t}B_{4t}C_{4t}$ pro $t = 1, 2, \ldots, 3^3$, etc., as indicated in Fig. 1.



Obr. 1 Trojúhelník Sierpińského

Fig. 1 The Sierpiński triangle

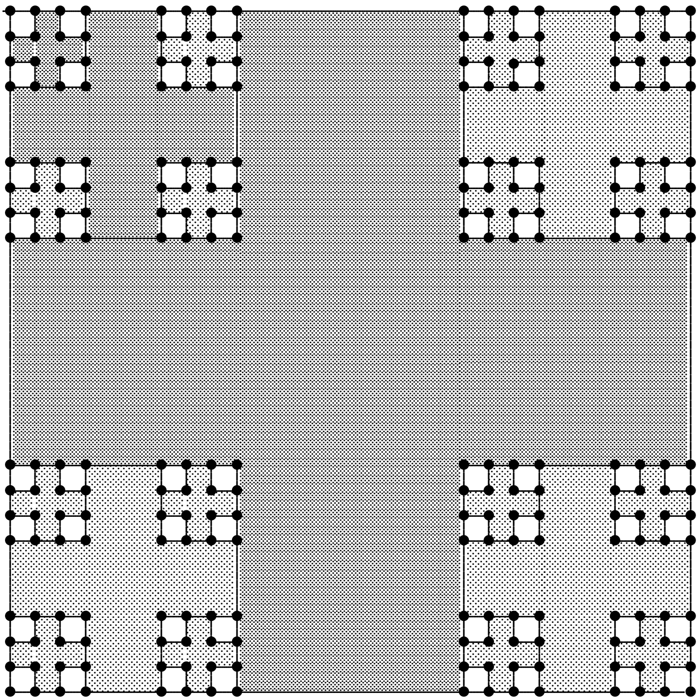
Denoting the length of the side of the given triangle by a, i.e. $|AB| = |BC| = |CA| = a$, the total area of the constructed (hatched) triangles is the sum of the geometric progression

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2^2}\right)^2 + 3^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2^3}\right)^2 + 3^3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2^4}\right)^2 + \cdots$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{1}{4}\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

representing the area of the original triangle. Hence, the hatched area fills the entire original triangle (up to the curve that represents the union of all sides of the inscribed triangles).

Cvičení. Ukažte, že stejnou konstrukci můžeme provést pro zcela libovolný trojúhelník.

Není nutné se omezit na trojúhelníky. Obrázky 2 a 3 imitují ideu Sierpiňského trojúhelníku na čtverci. Poznamenejme, že libovolný rovnoběžník poskytuje stejné možnosti.



Obr. 2 Čtverec à la Sierpiński (a)

Fig. 2 Square à la Sierpiński (a)

Exercise. Show that a similar construction can be performed for an arbitrary triangle.

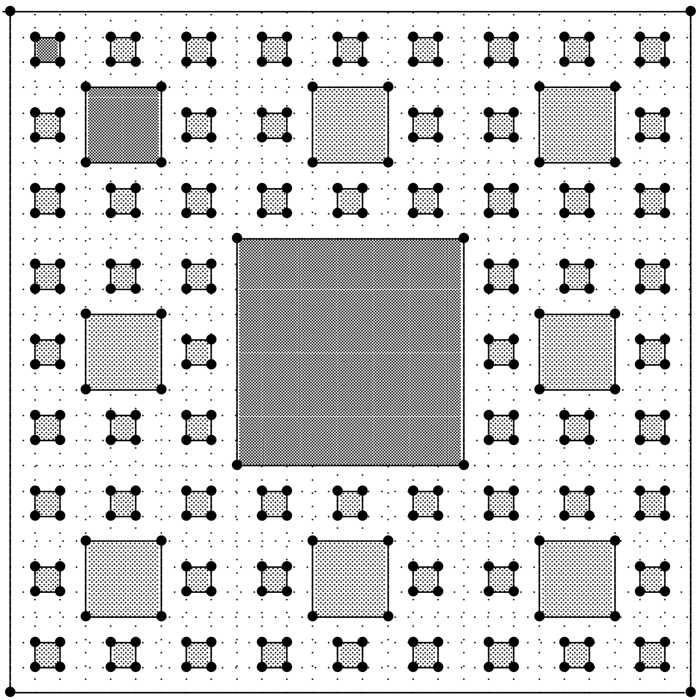
There is no need to restrict the construction to triangles. Figures 2 and 3 repeat the idea of the Sierpiński triangle, this time with a square.

Let us remark that an arbitrary parallelogram provides equal possibilities.

Označíme-li délku strany čtverce a, obsah vyšrafované plochy ve čtverci na obrázku 2 dostaneme součtem geometrické řady

$$5\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4\cdot 5\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 + 4^2\cdot 5\left(\frac{a}{3^3}\right)^2 + 4^3\cdot 5\left(\frac{a}{3^4}\right)^2 + \cdots =$$
$$= \frac{5a^2}{9}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots\right] = \frac{5a^2}{9}\cdot\frac{9}{5} = a^2,$$

což je obsah původního čtverce. Tedy, vyšrafovaná plocha opět vyplní celý čtverec, což už sám obrázek naznačuje. Zajímavější je obr. 3.



Obr. 3 Čtverec à la Sierpiński (b)

Fig. 3 Square à la Sierpiński (b)

Denoting the length of the side of the square by a, the hatched area in the square of Fig. 2 is the sum of the geometric progression given by

$$5\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4\cdot 5\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 + 4^2\cdot 5\left(\frac{a}{3^3}\right)^2 + 4^3\cdot 5\left(\frac{a}{3^4}\right)^2 + \cdots$$
$$= \frac{5a^2}{9}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots\right] = \frac{5a^2}{9}\cdot\frac{9}{5} = a^2,$$

which is the area of the original square. Hence, the hatched area again fills the entire square. In fact, Fig. 2 illustrates this fact rather well. Fig. 3 is even more interesting.

Plocha, kterou dostaneme sjednocením všech vepsaných čtverců, vyplní (až na křivku, kterou obdržíme sjednocením všech stran vepsaných čtverců) opět celý původní čtverec. Zde se jedná o součet geometrické řady:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 + 8^2\left(\frac{a}{3^3}\right)^2 + \cdots = \frac{a^2}{9}\left[1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{a^2}{9}9 = a^2.$$

Podrobnější informace týkající se trojúhelníku Sierpiňského nalezneme mimo jiné na stránkách Wikipedie `https://cs.wikipedia.org/wiki/Sierpi%C5%84sk%C3%A9ho_troj%C3%BAheln%C3%ADk` či v historickém dokumentu [1].

The area obtained by summing up all the inscribed squares fills up again the entire original square (up to the curve that is the union of the sides of the inscribed squares). Here, we deal with the sum of the geometric progression

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 + 8^2\left(\frac{a}{3^3}\right)^2 + \cdots = \frac{a^2}{9}\left[1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{a^2}{9}9 = a^2.$$

You can find more detailed information relating to the Sierpiński triangle on Wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpi%C5%84ski_triangle` or in the article [1].

L i t e r a t u r a

[1] Conversano, E., Tedeschini-Lalli, L.: Sierpinsky triangles in stone on medieval floors in Rome. *Aplimat – Journal of Applied Mathematics*, 4 (2011), č. 4, s. 113–122.