Daniela Bímová; Jiří Břehovský

Postupnými krůčky k rozvíjení rovinné představivosti

Učitel matematiky, Vol. 30 (2022), No. 4, 229–243

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151487`

POSTUPNÝMI KRŮČKY K ROZVÍJENÍ ROVINNÉ PŘEDSTAVIVOSTI

Daniela Bímová, Jiří Břehovský[1]

Úvod

O důležitosti geometrie ve výuce matematiky píše již profesor Čech, který ve své metodice věnované výuce geometrie v primě napsal: „Euklidovská geometrie je nejstarší a dosud nepředstižený vzor exaktního badání, takže její studium může přispět ke vzdělání také ve vyšším smyslu než pouhým získáním konkrétních vědomostí.“ (Čech, 1940–1941, s. D40). O téměř padesát let později, v roce 1989, upozorňuje profesor Kolář na skutečnost, že žáci mají velmi slabé vědomosti z geometrie, které dává mimo jiné do souvislosti se změnami jejích osnov. I v současné době pravděpodobně nikdo nepochybuje o důležitosti geometrie a jejím významu při rozvíjení komplexních matematických dovedností žáků. Jedním z aspektů myšlení, který se bez kvalitní výuky geometrie neobejde, je prostorová představivost. Tu můžeme považovat vedle čtení, psaní a počítání za jednu ze základních schopností jedince. Aniž by si to lidé uvědomovali, využívají prostorovou představivost ve svém každodenním životě, např. pokud potřebují najít cestu po městě či v parku, v přírodě, při čtení map a orientaci v mapách, při parkování automobilů, vkládání nádobí do myčky, aranžování dekorací v místnostech a v mnoha jiných případech. Samozřejmě také profesionálové jako architekti, astronomové, biochemici, biologové, chemici, kartografové, strojní inženýři, hudebníci aj. se neobejdou bez prostorových schopností. Nicméně každý člověk by měl být schopen rozpoznat vzájemnou polohu objektů (a to ať už

[1]Tento článek byl vytvořen díky projektu iTEM (Improve Teacher Education in Mathematics), EHP-CZ-ICP-2-018.

dvourozměrných či trojrozměrných objektů), určit vztahy mezi nimi a porozumět jejich transformacím v prostoru.

Prostorovou představivostí se zabývá mnoho prací, mj. jsou v nich také zmiňovány její důležité součásti. Například v publikacích Carroll (1993), Gardner (2011) a McGee (1985) je poukázáno na to, že schopnosti mentální manipulace, otáčení, ohýbání nebo převracení znázorněného objektu jsou jedny z důležitých aspektů inteligence. Olkun (2003) definuje prostorovou představivost jako schopnost vyvolat, otáčet a interpretovat dvou- a třídimenzionální objekty v mysli. Linn a Petersen (1985) popisují prostorovou představivost jako symbolickou a neverbální informaci používanou pro popisování, transformování, tvarování a zapamatování objektů. Vhodné použití vizuálně-prostorových zobrazení při řešení geometrických problémů také pozitivně koreluje s úspěšným výkonem při řešení problémů obecně, na což poukazují některé studie (např. Battista et al., 1982; van Garderen & Montague, 2003; McGee, 1985). S ohledem na zmíněné studie můžeme prostorovou představivost definovat jako schopnost provádět mentální transformace objektů v prostoru, představit si, jak objekt vypadá z různých úhlů pohledu, a rozumět tomu, jaký vztah mají objekty a jejich součásti k sobě navzájem.

Mnoho studií také poukazuje na skutečnost, že prostorovou představivost lze zdokonalovat a rozvíjet i prostřednictvím výuky geometrie (např. Baenninger & Newcombe, 1989; Baenninger & Newcombe, 1995; Battista et al., 1982; Ben-Chaim et al., 1989; Bishop, 1980; Braukmann & Pedras, 1993; Devon et al., 1994; Miller, 1996; Travis & Lennon, 1997; Ullman & Sorby, 1990). V souvislosti s výukou geometrie se využívá pojmu geometrická představivost. Tu ve své práci popisuje i Šarounová a uvádí tyto její složky:

- schopnost rozeznávat rovinné útvary,
- představy o některých vztazích mezi útvary v rovině,
- schopnost rozeznávat tělesa v prostoru,
- představy o vzájemné poloze těles a rovin v prostoru.

Právě první dvě složky hrají významnou roli při výuce geometrie na prvním stupni ZŠ, která je zaměřena především na rovinnou geometrii. V uvedeném období, tj. na prvním stupni ZŠ, může u žáků docházet k preciznějšímu rozvoji rovinné představivosti, která je nezbytná pro další rozvoj prostorového myšlení. Rovinnou představivost chápeme jako určitý typ uvědomělého vidění v rovině. Předpokládáme, že žák s rovinnými představami pracuje na myšlenkové úrovni, je schopen pojmenovat rovinné obrazce a uvědomuje si jejich vzájemné vztahy. V těchto souvislostech spatřujeme nebezpečí převážně v tom, že pokud si žák během svého studia na prvním stupni ZŠ vytvoří nesprávné představy o geometrických objektech v rovině, projeví se tyto skutečnosti negativně v jeho pozdějším studiu.

V následujícím textu představíme čtenáři několik ukázek úloh, které reprezentují celkový koncept, jenž vytváříme společně s dalšími kolegy, a to i zahraničními. Cílem celého konceptu je vytvořit ucelený systém podpory, který bude žákům pomáhat s rozvíjením jejich rovinné a následně též i prostorové představivosti. V rámci tohoto systému předpokládáme využívání různých počítačových platforem, programování, manipulativních činností a 3D tisku. Rádi bychom následně celý koncept, nebo alespoň jeho části, implementovali přímo do výuky na základních školách. Tyto a další úlohy by měly posloužit jako základ pro vytváření tzv. hroznů problémů, na kterých se, jak pevně věříme, budou aktivně podílet jak žáci, tak i jejich učitelé.

Všechny v tomto článku uváděné úlohy cílí k rozvoji rovinné představivosti žáků, a to za pomoci využití dvou binárních operací v rovině: sjednocení a průniku. K modelování zadaných situací i k ukázkám vzorových řešení budeme využívat tři nástroje – GeoGebru jako software dynamické geometrie, 3D tisk k vytváření pomůcek a vlastní papírové či foliové modely, které si mohou žáci vytvořit sami. U každé z úloh popíšeme jejich využití i tvorbu. Uvedené tři nástroje jsme jako didaktické pomůcky vybrali záměrně. Důvodem jejich výběru je ta skutečnost, že s jejich využitím chceme také pomoci i slabším žákům k progresu jejich znalostí a dovedností. Slabším žákem přitom rozumíme jedince, který v matematice dosahuje horších výsledků, není dostatečně motivován k lepším výkonům a ve svých znalostech a dovednostech zaostává za svými spolužáky. Nejde nám o kompenzaci specifických poruch učení, ale o vyšší míru zapojení žáků, kteří mají studijní problémy a mohou se tak cítit vyloučeni či handicapováni. Chtěli bychom tak těmto žákům pomoci k zažití úspěchu v oblasti, která pro ně může být náročná. Všechny popisované koncepty a pomůcky vznikají v rámci řešení projektu iTEM – Improve Teacher Education in Mathematics (Zlepšování výuky učitelů matematiky), na němž spolupracujeme s norskými kolegy z partnerské NORD University v Bodø.

Úlohy

Při vytváření předkládaných úloh jsme se zaměřili na několik cílů, které by měly tyto úlohy splňovat. Úlohy jsme koncipovali tak, aby žáci, i ti slabší, měli při jejich řešení šanci na úspěch. Proto jsou úlohy nebo jednotlivé úkoly v nich odstupňovány podle náročnosti od jednodušších po náročnější. Celá koncepce umožňuje také tvořit tzv. hrozny problémů, na nichž se mohou podílet i žáci. Jejich zapojení do tvorby dalších, nejen navazujících, ale i rozšiřujících úloh, považujeme za velmi žádoucí. Dalším požadavkem při tvorbě úloh byla možnost využívat při hledání jejich správných řešení různých pomůcek. My jsme se zabývali využitím softwaru dynamické geometrie GeoGebra a využitím 3D tisku, používáním dílků stavebnic, vytvářením papírových a foliových modelů (plných i průhledných) a použitím pracovních listů. Zaměřili jsme se také na to, aby se při řešení úloh žáci setkali i s takovými geometrickými obrazci, které se při výuce geometrie běžně nevyskytují, aby se tak s nimi mohli seznámit a uměli je správně pojmenovat. Jsme přesvědčeni, že s ohledem na ubývající počty hodin geometrie ve školách je nezbytné využít každé příležitosti k rozšiřování obzoru žáků. V neposlední řadě by měly mít zadávané úlohy potenciál k rozvoji rovinné představivosti žáků.

Náměty úloh pro sjednocení

Základní myšlenkou tohoto typu úloh je sjednocování rovinných obrazců jako množin bodů v rovině. Primární otázkou tedy je, jaký rovinný obrazec vznikne sjednocením dvou či více zadaných rovinných obrazců, přičemž obrazce budeme sjednocovat (seskládávat) tak, aby se přikládané sousední obrazce vždy dotýkaly po celých délkách svých shodných stran. Dva rovinné obrazce můžeme v tomto smyslu sjednotit jen tehdy, má-li jeden rovinný obrazec alespoň jednu stranu shodnou s nějakou stranou druhého rovinného obrazce. S ohledem na složky rovinné představivosti jsme vytvořili dvě základní skupiny těchto úloh:

1. Jsou dány různé rovinné obrazce, úkolem je sestavit z nich všechny možné rovinné obrazce tak, aby se k sobě přikládané obrazce navzájem dotýkaly po celých délkách svých splývajících/přikládaných stran. Například:
   Jsou dány:
   a) 2 (3, 4 atd.) shodné rovnostranné trojúhelníky,
   b) 2 shodné rovnostranné trojúhelníky a 1 rovnoramenný lichoběžník, jehož délky ramen a délka jedné základny jsou shodné s délkami stran daných dvou rovnostranných trojúhelníků,
   c) 4 shodné rovnostranné trojúhelníky a 2 shodné kosočtverce, jejichž délky stran jsou shodné s délkami stran daných čtyř rovnostranných trojúhelníků atp.

2. Je zadán základní rovinný obrazec, například čtverec, obdélník, kosodélník, pravidelný šestiúhelník apod. Úkolem je tento obrazec sestavit s využitím jiných geometrických obrazců, které má žák k dispozici. Takto zadanou sadu úloh lze gradovat hned dvojím způsobem:
   a) volbou jednodušších obrazců pro sestavení i skládání, například čtverec složený ze dvou pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků, či dvou různých nebo shodných obdélníků, anebo obdélník složený ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků či dvou shodných čtverců atp.,
   b) při volbě „náročnějšího“ základního rovinného obrazce lze pomoci žákům různým způsobem zadání tohoto rovinného obrazce:
      - zadáme pouze název rovinného obrazce,

- rovinný obrazec zadáme pomocí jeho obrysu, který však žákům nedáme,
- žákům poskytneme obrys rovinného obrazce zobrazený na pracovním listu, nebo jako stavebnici,
- v obrysu rovinného obrazce vyznačíme strany dílčích skládaných rovinných geometrických obrazců.

Další možností gradace úloh, kterou lze využít paralelně s ostatními, je poskytnutí žákům většího množství rovinných obrazců, než je k sestavení zadaného rovinného obrazce zapotřebí.

Příklad 1. Jaké rovinné geometrické obrazce lze poskládat ze dvou shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků? Každý nalezený rovinný obrazec zakresli a pojmenuj.

Řešení. Ze dvou shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků lze poskládat buď čtverec, pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, či kosodélník, viz obrázek 1.

Obr. 1: Vybraná řešení příkladu 1 s užitím modelů vytvořených pomocí 3D tisku

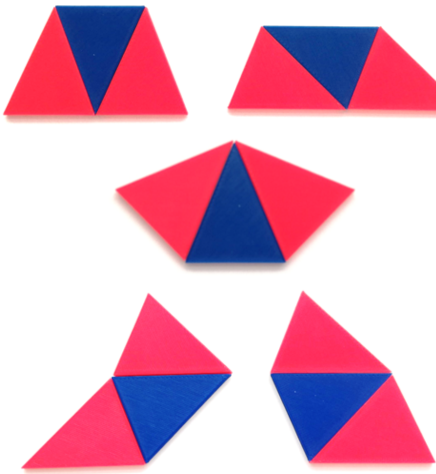
Příklad 2. Jaké rovinné geometrické obrazce lze poskládat ze dvou shodných rovnoramenných trojúhelníků? Každý nalezený rovinný obrazec zakresli a pojmenuj.

Řešení. Ze dvou shodných rovnoramenných trojúhelníků je možné poskládat buď kosočtverec, kosodélník, nebo deltoid, viz obrázek 2 (obrazce jsou pojmenovány zleva doprava).

Obr. 2: Vybraná řešení příkladu 2 s užitím modelů vytvořených pomocí 3D tisku

Příklad 3. Jaké rovinné geometrické obrazce lze poskládat ze tří shodných rovnoramenných trojúhelníků? Každý nalezený rovinný obrazec zakresli a pojmenuj.

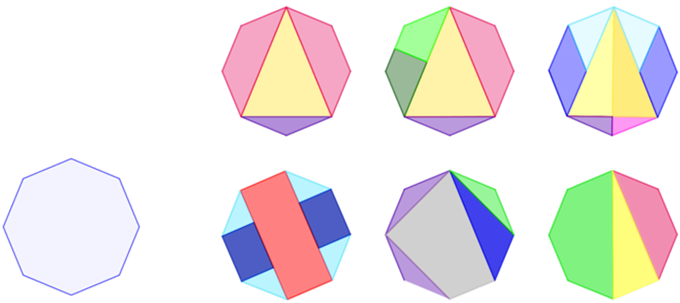
Řešení. Ze tří shodných rovnoramenných trojúhelníků můžeme poskládat rovnoramenný lichoběžník, obecný lichoběžník, konvexní nepravidelný pětiúhelník, nekonvexní nepravidelný pětiúhelník a konvexní nepravidelný pětiúhelník tvarově odlišný od již uvedeného konvexního nepravidelného pětiúhelníku, viz obrázek 3 (obrazce jsou pojmenovány postupně zleva doprava a shora dolů).



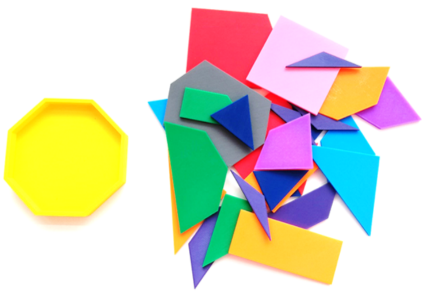
Obr. 3: Vybraná řešení příkladu 3 s užitím modelů vytvořených pomocí 3D tisku

Příklad 4. Pomocí zadaných rovinných geometrických obrazců poskládej pravidelný osmiúhelník. Každý ze zadaných rovinných obrazců také pojmenuj.

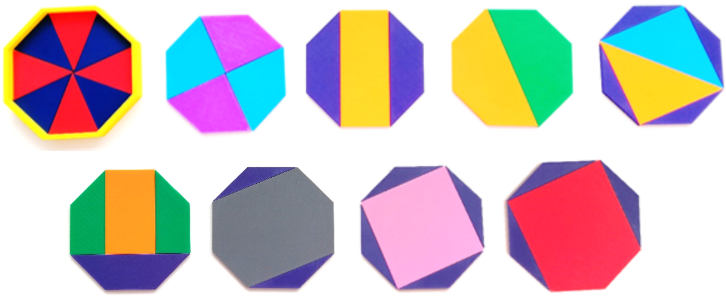
Řešení. Pravidelný osmiúhelník je možné poskládat kombinacemi různých rovinných geometrických obrazů. Příklady několika vybraných ukázek možných řešení jsou znázorněny pomocí softwaru GeoGebra na obrázku 4. Pojmenování využitých rovinných obrazců ponecháváme v tomto případě na čtenáři.



Obr. 4: Vybraná řešení příkladu 4 zobrazená v softwaru GeoGebra



Obr. 5: Dílky rovinných obrazců vytvořených pomocí 3D tisku pro řešení příkladu 4



Obr. 6: Vybraná řešení příkladu 4 znázorněná pomocí dílků vytvořených na 3D tiskárně

Náměty úloh pro průnik

Základní myšlenkou tohoto typu úloh je hledání možných průniků dvou rovinných geometrických obrazců, jejich zakreslování a pojmenovávání, přičemž možné vzniklé průniky nebudeme nijak omezovat. Cílíme tak nejen na užívání správné terminologie, ale také na další zpřesňování a ukotvení představ o základních geometrických pojmech jako jsou bod, úsečka, přímka atp. Obtížnost zadávaných úloh souvisí především s typem rovinného geometrického obrazce a úkolu, který žákům zadáme. Modifikací je značné množství, stejně jako možností k rozvoji geometrických představ. Zadat můžeme žákům například:

- dva shodné rovnostranné trojúhelníky,
- dva shodné pravoúhlé trojúhelníky,
- dva různé obecné trojúhelníky,
- dva shodné čtverce atd.

Žáci mohou v jednotlivých případech určovat, jaké geometrické objekty vzniknou průnikem zadaných rovinných obrazců. Zadání lze také modifikovat různými počátečními podmínkami. Můžeme se například zeptat:

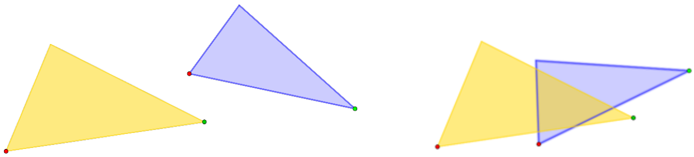
- jaké jednorozměrné průniky lze nalézt,
- jaké rovinné obrazce je zapotřebí překrýt, aby vznikl pravidelný/nepravidelný čtyřúhelník, čtverec, obdélník, pětiúhelník atp.,

- lze překrytím zadaných geometrických objektů vytvořit čtverec, obdélník, pětiúhelník atp.

Úlohy zaměřené na průnik rovinných geometrických obrazců budeme s ohledem na jejich variabilitu reprezentovat pouze jednou vzorovou úlohou. Půjde nám především o popis využití pomůcek a o popis práce s žáky.

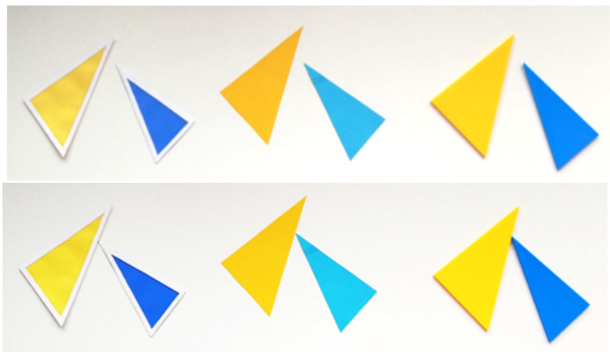
Příklad 5. Určete, jaké geometrické objekty mohou vzniknout průnikem dvou obecných trojúhelníků.

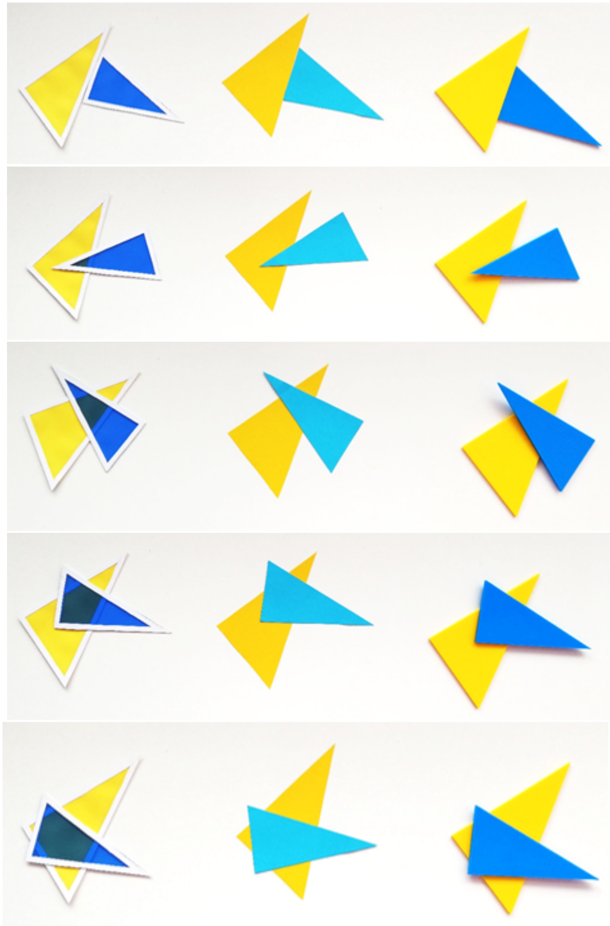
Řešení. Na obrázcích 7 a 8 jsou zobrazena některá řešení a použití různých didaktických pomůcek.



Obr. 7: Ukázka použití dynamického softwaru GeoGebra při řešení příkladu 5

Průnikem dvou obecných trojúhelníků mohou být prázdná množina, bod, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník (případně lze uvést vzniklý speciální typ, jakým je např. lichoběžník), pětiúhelník, šestiúhelník, získané průniky lze názorně vidět po řadě na obrázku 8 od shora dolů.





Obr. 8: Ukázka použití různých typů modelů trojúhelníků při řešení příkladu 5

Závěr

Všechny fyzicky vytvořené modely geometrických objektů využíváme jako manipulativní didaktické pomůcky. Jsme přesvědčeni, že manipulaci s objekty je třeba využívat všude tam, kde je to možné a účelné. Důvodem je propojování myšlení s ostatními smysly a nezanedbatelný rozvoj psychomotorických dovedností.

Hlavní přednosti modelů vytvořených pomocí 3D tisku jsou jejich dlouhá životnost a odolnost při manipulaci, relativně jednoduchá výroba a především neomezené možnosti týkající se tvarů, které lze vytvořit. Můžeme tisknout i ty modely rovinných obrazců, které se v dostupných průmyslově vyráběných stavebnicích nevyskytují, stejně jako vyrábět útvary, do kterých budeme dílky skládat. Jako tomu je v případě použitého pravidelného osmiúhelníku na obrázku 5. Pokud škola disponuje 3D tiskárnou, lze takovéto didaktické pomůcky tisknout přímo v hodinách pracovních činností společně s žáky, což pro ně může mít i motivační účinek. Používání modelů z papíru nebo fólie má stejné výhody, s výjimkou životnosti. Nabízí však ještě jeden benefit. Žáci si mohou takové modely vyrobit sami.

Na obrázku 8 jsou ukázky použití všech třech typů zmíněných modelů při řešení úlohy 5. Při hledání průniků geometrických objektů jsou vysoce efektivní modely z průhledných folií. Žáci díky nim ihned vidí vzniklý geometrický objekt. Právě slabším žákům usnadňují tyto modely situaci. Při použití neprůhledných modelů z papíru dochází k výraznému rozvoji schopnosti mentální manipulace. Žák si totiž musí vytvářet vzniklý průnik pouze ve své představě. I tady lze situaci napomoci například přikládáním pravítka tak, aby jeho hrana modelovala strany vzniklých objektů. K řešení těchto úloh lze využít i vytištěné modely. Ale při překládání těchto modelů přes sebe začíná hrát roli jejich nezanedbatelná výška. Výška každého modelu je cca 3 mm. Při naskládání i více modelů na sebe může být celková výška pro žáky matoucí.

V obou typech úloh lze při jejich řešení velmi efektivně využívat i dynamický geometrický software GeoGebra, a to nejen pro rychlé zobrazení grafického zadání, návodu či řešení úlohy jako na obrázku 4, ale především za účelem využití jeho dynamických nástrojů. Na obrázku 7 je ukázka právě takového využití. Pro žáky jsou připraveny applety se zadanými rovinnými obrazci. Žáci poté s virtuálními modely daných rovinných obrazců manipulují ve virtuálním prostředí a jejich přesouváním či otáčením po nákresně hledají požadovaná řešení. K tomuto účelu lze využít např. interaktivní tabule nebo tablety. Ve vyšších ročnících si žáci samozřejmě v GeoGebře mohou vytvářet potřebné virtuální modely rovinných obrazců, anebo dokonce i prostorových objektů sami. Domníváme se totiž, že je nezbytné využívat pro řešení úloh nejen reálných modelů geometrických objektů, ale i moderní technologie, se kterými jsou žáci v dnešní době v každodenním kontaktu.

Literatura

[1] Baenninger, M., & Newcombe, N. (1989). The role of experience in spatial last performance a meta-analysis. *Sex Roles, 20*, 327–344. `https://doi.org/10.1007/BF00287729`

[2] Baenninger, M., & Newcombe, N. (1995). Enviromental input to development of sex-related differences in spatial and mathematical ability. *Learning and Individual Differences, 7*(4), 363–379.

[3] Battista, M. T., Wheatley, G. H., & Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in pre-service elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(5), 332–340.

[4] Ben-Chaim, D., Lappan G., & Houang, R. T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: analysing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 124–146.

[5] Bishop, J. E. (1980). Developing students' spatial ability. *The Science Teacher, 45*(8), 20–23.

[6] Braukmann, J., & Pedras, M. (1993). Comparison of two methods of teaching visualization skills to college students. *Journal of Industrial Teacher Education, 30*(2), 65–80.

[7] Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies.* Cambridge University Press.

[8] Čech, E. (1940–1941). Jak vyučovati geometrii v primě. *Pěstování matematiky a fysiky, 70*, 40–58.

[9] Devon, R., Engel, R., Foster, S., Sathianathan, R. J., & Turner, D. (1994). The effect of solid modelling on 3d visualization skills. *The Engineering Design Graphics Journal, 22*(2), 4–11.

[10] van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(4), 246–254.

[11] Gardner, H. (2011). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences.* Basic books.

[12] Kolář, I. (1989). Geometrie v současné matematice a její úloha ve vyučování. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 34*, 41–54.

[13] Linn, M. C., & Peterson, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta analysis. *Child Development, 56*, 1479–1498.

[14] McGee, M. G. (1985). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin, 86*(5), 889–918.

[15] Miller, C. L. (1996). A historical review of applied and theoretical spatial visualization publications in engineering graphics. *The Engineering Design Graphics Journal, 3*, 12–33.

[16] Olkun, S. (2003). Making connections: Improving spatial abilities with engineering drawing activities. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning, 3*(1), 1–10.

[17] Šarounová, A. (1982). *Geometrická představivost.* [Disertační práce, Univerzita Karlova].

[18] Travis, B., & Lennon, E. (1997). Spatial skills and computer-enhanced instruction in calculus. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16*, 467–478.

[19] Ullman, K. M., & Sorby, S. A. (1990). Enhancing the visualization skills of engineering students through computer model-

ling. *Computer Applications in Engineering Education, 3*(4), 251–257.

Abstract

The contribution presents the ideas of several tasks to practice two types of geometric binary operations, more precisely, the unification and intersection of planar sets of points and the denotations of polygons of various shapes, which we consider to be those planar sets of points. To find the required solutions, we mention the possibilities of not only using pieces of industrially produced kits, created paper or foil models, but also using dynamic geometric software GeoGebra, or specially created planar shapes using 3D printing. The assigned tasks have the potential to develop planar and gradually also the spatial visualization of pupils.

Daniela Bímová, Jiří Břehovský
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2
461 17 Liberec 1
e-mail: daniela.bimova@tul.cz, jiri.brehovsky@tul.cz