Rozhledy matematicko-fyzikální

Viera Čerňanová

Nepárne čísla v zlomkoch

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 2, 1–6

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151708`

Nepárne čísla v zlomkoch

Viera Čerňanová, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity, Trnava

Predložený príspevok patrí k tým, ktoré potvrdzujú význam jedného zo základných rysov matematiky: *Schopnosť zovšeobecňovať a nezastavovať sa pri konkrétnych prípadoch. Všeobecné riešenie je totiž často názornejšie, prináša hlbšie porozumenie a vysvetľuje špeciálne prípady.*[1]

Nepárne čísla ako generátor

Pozrime sa na racionálne číslo $\frac{1}{3}$. Vieme, že ho môžeme napísať tiež v tvare ekvivalentného zlomku, napríklad:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \cdots$$

Toto číslo však môžeme vyjadriť aj iným, prekvapivým spôsobom (1), ako sme sa dozvedeli na stránke [2]. Tak vznikol podnet k napísaniu tohto článku.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \cdots \tag{1}$$

Vo všeobecnosti pre každé prirodzené číslo n platí

$$\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(2n+(2n-1))} = \frac{1}{3}, \tag{2}$$

skrátene

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{2n}(2k-1)} = \frac{1}{3},$$

čo sformulujeme nasledovne.

Tvrdenie 1. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak je čitateľ zlomku súčtom prvých n nepárnych prirodzených čísel a menovateľ súčtom n bezprostredne za nimi nasledujúcich nepárnych čísel, tak hodnota zlomku je $\frac{1}{3}$.*

V dôkaze využijeme pomocné tvrdenie, ktoré je v učebniciach zvyčajne uvádzané pri metóde matematickej indukcie. Štandardný algebrický dôkaz dopĺňame kvôli názornosti geometrickým dôkazom bez slov.

Lemma 1. *Nech $n \in \mathbb{N}$. Súčet prvých n po sebe nasledujúcich nepárnych prirodzených čísel je n^2, čiže*

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \tag{3}$$

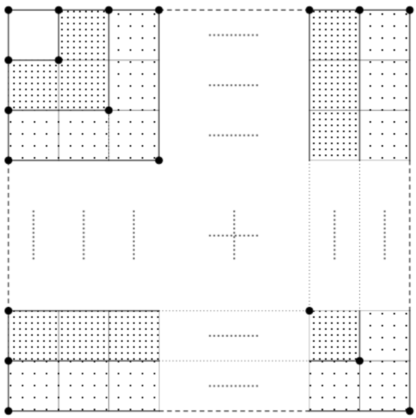
Dôkaz.

1. Pre $n = 1$ sa ľavá strana v identite (3) rovná 1, pravá je 1^2, čo je tiež 1. Pre $n = 1$ je teda rovnosť overená.
2. Predpokladajme, že (3) platí pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathbf{1} + \mathbf{3} + \cdots + (\mathbf{2n} - \mathbf{1}) + (2n + 1) = \mathbf{n^2} + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

   Teda z indukčného predpokladu vyplýva rovnosť ľavej a pravej strany (3) aj pre $n + 1$.

Overili sme platnosť identity (3) pre najmenšie prirodzené číslo, a z platnosti pre n sme odvodili platnosť identity pre $n+1$. Lemma je dokázaná.



Obr. 1: Dôkaz identity (3)

Dôkaz tvrdenia 1. V ľavej strane vzťahu (2) použijeme (3), dostaneme

$$\frac{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}{(\underline{2n} + 1) + (\underline{2n} + 3) + \cdots + (\underline{2n} + (2n - 1))} = \frac{n^2}{\underline{2n} \cdot n + n^2} = \frac{1}{3}.$$

S použitím nerovnakého počtu sčítancov v čitateli a v menovateli je možné získať podobné výsledky.

Príklad 1.

$$\frac{1}{3+5} = \frac{1+3}{5+7+9+11} = \frac{1+3+5}{7+9+11+13+15+17} = \frac{1}{8}.$$

Všimnime si, že nepárne čísla zapisujeme v každom zlomku systematicky od 1, pričom v menovateli ich je dvakrát toľko ako v čitateli. Dokážme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{3n}(2k-1)} = \frac{1}{8}.$$

Ľavú stranu upravíme, využijeme (3) a dostaneme

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{3n}(2k-1)} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{3n}(2k-1) - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)} = \frac{n^2}{(3n)^2-(n)^2} = \frac{1}{8}.$$

Príklad 2.

$$\frac{1}{3+5+7} = \frac{1+3}{5+7+9+11+13+15} = \frac{1+3+5}{7+9+\cdots+21+23} = \frac{1}{15}.$$

Tentokrát je v menovateli trikrát toľko sčítancov ako v čitateli. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{4n}(2k-1)} = \frac{n^2}{(4n)^2-n^2} = \frac{1}{15}.$$

Hĺbavý čítateľ nepochybne postrehol, že identita (2), ako aj tie v príkladoch 1 a 2, sú špeciálne prípady všeobecnejšieho tvrdenia, ktoré sformulujeme ako vetu. Princíp dôkazu je rovnaký ako v uvedených príkladoch, preto ho ponecháme pre čitateľa ako cvičenie.

Veta 1. *Pre každé dve prirodzené čísla $n \geq 1$, $m \geq 2$ platí*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{mn}(2k-1)} = \frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(2mn-1)} = \frac{1}{m^2-1}.$$

Veta 1 upresňuje jednu triedu racionálnych čísel, ktoré je možné generovať ako podiely istých konečných súčtov po sebe nasledujúcich nepárnych čísel. Vďaka dodatočným požiadavkám na použité konečné postupnosti nepárnych čísel môžeme nájsť ďalšie triedy. Pre čitateľov predkladáme ako otvorený problém otázku: *Ktoré kladné racionálne čísla je/nie je možné generovať takýmto spôsobom?* Ako inšpiráciu a na povzbudenie uvádzame nasledujúce príklady.

Príklad 3.

$$\frac{1+3}{5}=\frac{1+3+5+7}{9+11}=\frac{1+3+5+7+9+11}{13+15+17}=\frac{4}{5}.$$

Nepárne čísla zapisujeme od jednotky, pričom v čitateli ich je dvakrát toľko ako v menovateli. Všeobecne

$$\frac{\sum_{k=1}^{2n}(2k-1)}{\sum_{k=2n+1}^{3n}(2k-1)}=\frac{(2n)^2}{(3n)^2-(2n)^2}=\frac{4}{5}.$$

Je možné vytvoriť aj racionálne číslo väčšie ako 1. Prirodzene, v čitateli bude musieť byť ešte viac členov než v menovateli.

Príklad 4. Zvoľme pomer počtu členov v čitateli a v menovateli 5 : 2, začnime od jednotky:

$$\frac{1+3+5+7+9}{11+13}=\frac{1+3+\cdots+19}{21+23+25+27}=\frac{25}{24}.$$

Všeobecný zlomok bude mať tvar

$$\frac{\sum_{k=1}^{5n}(2k-1)}{\sum_{k=5n+1}^{7n}(2k-1)}=\frac{(5n)^2}{(7n)^2-(5n)^2}=\frac{25}{24}.$$

Príklad 5. Tentokrát nebudeme začínať od jednotky. Budeme však dodržiavať isté pravidlá, ktoré vyjadríme aj všeobecne.

$$\frac{3}{5+7}=\frac{5+7}{9+11+13+15}=\frac{7+9+11}{13+15+17+19+21+23}=\frac{1}{4}.$$

Nepárne čísla naďalej zapisujeme vzostupne, v menovateli ich je dvakrát toľko ako v čitateli. Všimnime si, že druhé nepárne číslo 3 je v čitateli zlomku samo. V zlomku, kde začíname tretím nepárnym číslom 5, sú v čitateli dva sčítance. Analogicky je tomu pri sedmičke (7 je štvrté nepárne číslo, prvé tri v zlomku nepoužijeme, v čitateli sú tri sčítance) a pri každom ďalšom nepárnom čísle. Pre $n \geq 2$ dostávame

$$\frac{\sum_{k=n}^{2n-2}(2k-1)}{\sum_{k=2n-1}^{4n-4}(2k-1)}=\frac{(2n-2)^2-(n-1)^2}{(4n-4)^2-(2n-2)^2}=\frac{3(n-1)^2}{12(n-1)^2}=\frac{1}{4}.$$

Aritmetický priemer, aritmetická postupnosť

Cieľom všeobecných zápisov v príkladoch bolo pochopiť princíp, precvičiť si prácu s formálnymi výrazmi a potvrdiť platnosť výsledku.

Pozrime sa ešte na jedno zjednodušenie, ktoré sa nám v prípade po sebe nasledujúcich nepárnych čísel ponúka.

1. Najskôr si uvedomme, že súčet ľubovoľného konečného počtu čísel je ich aritmetickým priemerom, ktorý je vynásobený počtom týchto čísel. Preto je súčet v každom čitateli i menovateli hociktorého zo zlomkov z predchádzajúcej časti príslušným násobkom ich aritmetického priemeru.
2. V čitateli aj v menovateli každého zlomku je súčet konečnej aritmetickej postupnosti so spoločnou diferenciou 2. Preto je aritmetický priemer sčítancov v čitateli (aj v menovateli) aritmetickým priemerom prvého a posledného čísla v súčte.

Pre názornosť využime uvedené skutočnosti na alternatívny dôkaz vzťahu (2) a na rýchly výpočet "najrozťahanejších" zlomkov z jednotlivých príkladov, prípadne priamo vo všeobecnom tvare.

Alternatívny dôkaz vzťahu (2).

$$\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+\cdots+(4n-1)} = \frac{n\cdot(1+2n-1)/2}{n\cdot(2n+1+4n-1)/2} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}.$$

Príklady

1.
$$\frac{1+3+5}{7+9+11+13+15+17} = \frac{3\cdot(1+5)/2}{6\cdot(7+17)/2} = \frac{3\cdot 3}{6\cdot 12} = \frac{1}{8}$$

2.
$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{4n}(2k-1)} = \frac{n\cdot(1+2n-1)/2}{3n\cdot(2n+1+8n-1)/2} = \frac{n^2}{15n^2} = \frac{1}{15}$$

3.
$$\frac{1+3+5+7+9+11}{13+15+17} = \frac{6\cdot(1+11)/2}{3\cdot(13+17)/2} = \frac{6\cdot 6}{3\cdot 15} = \frac{4}{5}$$

4.
$$\frac{1+3+\cdots+19}{21+23+25+27} = \frac{10\cdot(1+19)/2}{4\cdot(21+27)/2} = \frac{10\cdot 10}{4\cdot 24} = \frac{25}{24}$$

5.

$$\frac{7+9+11}{13+15+17+19+21+23}=\frac{3\cdot(7+11)/2}{6\cdot(13+23)/2}=\frac{3\cdot 9}{6\cdot 18}=\frac{1}{4}$$

Poďakovanie

Ďakujem anonymnému recenzentovi za pozorné prečítanie rukopisu a konštruktívne pripomienky, ktoré prispeli ku zvýšeniu kvality článku. Tento príspevok vznikol s podporou grantu KEGA 001UMB-4/2023.

Literatúra

[1] Dlab, V.: Pravoúhlý trojúhelník v pravoúhlém trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 97 (2022), č. 4, s. 24–31.

[2] `https://math1089.in/fractions-are-beautiful/16/`.

Problém s potrubím

Šárka Gergelitsová, Tomáš Holan, MFF UK, Praha

V tomto textu bychom chtěli představit jeden problém a ukázat různé možnosti jeho řešení.

Představte si, že v domě nebo na zahradě máme otvor, ze kterého bude vytékat voda, a někde jinde druhý otvor, do kterého bychom chtěli vodu přivést. Oba otvory mají svoji polohu a svůj směr (ten si můžeme představovat jako směr, kterým poteče voda) a k vedení vody máme neomezenou zásobu kolen – trubek zahnutých uprostřed o 90 stupňů.

Předpokládejme, že délka každého ramene zahnuté trubky je 1, že trubky povedou vždy ve směru osy x nebo osy y nebo osy z a že voda vytéká z otvoru (profilu) na souřadnicích (0,0,0) ve směru osy y.

Otázka: Do jakých souřadnic a z jakých všech směrů dokážeme vodu potrubím složeným z kolen dopravit?

Tento text bude o hledání odpovědi: pokud se nechcete připravit o zábavu, tak ho teď odložte a zkuste odpověď najít sami!