Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Martina Škorpilová; Katka Urbánková

Soddyho kružnice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 68 (2023), No. 2, 105–127

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151748`

Soddyho kružnice

Martina Škorpilová, Katka Urbánková

Abstrakt. Soddyho kružnice, které jsou řešením speciálního případu Apollóniových úloh, upoutaly pozornost matematické komunity především poté, co byly roku 1936 některé jejich vlastnosti publikovány Frederickem Soddym ve formě básně. Studovány však byly již v 17. století. Kromě historie popíšeme jejich konstrukci, vyjádříme jejich poloměry a představíme některé s nimi související geometrické útvary.

Podstatná část článku vznikla na základě bakalářské práce [24], ve které lze dohledat další informace.

1. Definice, příslušné značení a příbuzné pojmy

Definice 1. Nechť k_A, k_B, k_C jsou kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk. Kružnice, která má se všemi kružnicemi k_A, k_B, k_C vnější, resp. vnitřní dotyk, se nazývá *vnitřní*, resp. *vnější Soddyho kružnice* (viz obr. 1).

V dalším textu budeme vnitřní, resp. vnější Soddyho kružnici značit s_1, resp. s_2 a její střed budeme značit S_1, resp. S_2. Kružnice k_A, k_B, k_C budeme nazývat *určující* a jejich středy budeme značit po řadě A, B, C (viz obr. 1).

Na vnitřní Soddyho kružnici (přesněji řečeno na tuto kružnici spolu s její vnitřní oblastí) lze pohlížet jako na řešení tzv. *problému čtyř mincí* (*Four Coins Problem*), který spočívá v hledání mince, která se dotýká tří pevně zvolených, na rovné ploše ležících a vzájemně se dotýkajících mincí.[1]

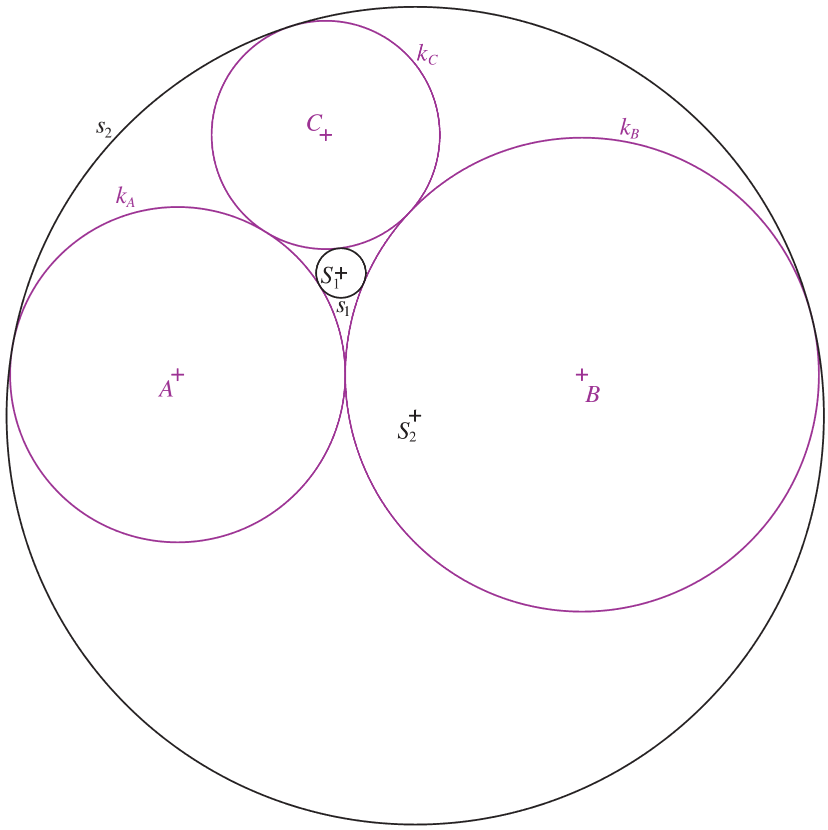
Soddyho kružnice jsou řešením speciálního případu tzv. *Apollóniových úloh.* Jejich podstatou je ke třem daným různým kružnicím v rovině nalézt takovou kružnici, která se jich dotýká. Pro tři dané kružnice, jejichž poloměry nejsou ani nulové, ani nekonečně velké, existuje obecně osm různých kružnic, které se jich dotýkají. Pokud však mají tři dané kružnice po dvou vnější dotyk, existují pouze dvě řešení, kterými jsou Soddyho kružnice.[2]

Apollóniovy úlohy jsou pojmenovány podle starořeckého geometra, matematika a astronoma Apollónia z Pergy (asi 262 př. n. l. – asi 190 př. n. l.), který se těmto

[1] Není nám známo, zda v reálných podmínkách taková mince existuje, neboť by musela mít velmi malý poloměr.

[2] Způsobů, jak vyřešit Apollóniovy úlohy, je mnoho. Některé z postupů lze nalézt například v práci [14] či v textu [12]. Zmíněných osm řešení lze nalézt na obrázku v práci [24], str. 5. Lze studovat rovněž zobecnění Apollóniovy úlohy, v němž mají některé ze tří daných kružnic nulový, resp. nekonečně velký poloměr, tj. jedná se o body, resp. o přímky. Hledá se tedy kružnice, která prochází daným bodem (danými body), dotýká se dané přímky (daných přímek) a dané kružnice (daných kružnic). Tím vzniká deset různých variant, které mají různý počet řešení. Jednotlivé případy jsou znázorněny opět v textu [24], str. 6.

RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D., Katka Urbánková, Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: stepanov@karlin.mff.cuni.cz, urbankovaka@gmail.com



Obr. 1. Soddyho kružnice

úlohám věnoval v knize *O dotycích* ($E\pi\alpha\phi\alpha\iota$, *Epafaí*). Tato práce se bohužel nedochovala, avšak svědectví o Apollóniově studiu kružnic dokládá text od Pappa z Alexandrie (290–350).

2. Historie[3]

2.1. René Descartes

Významný posun ve studiu Soddyho kružnic učinil francouzský filozof a matematik René Descartes (1596–1650), který se snažil analyticky vyřešit Apollóniovu úlohu. Tento problém diskutoval i v rámci vzájemné dlouholeté korespondence s princeznou Alžbětou Falckou (1618–1680, též zvaná Anežka Česká či Alžběta z Herfordu).[4] Po několika dopisech, v nichž si sdělili své nápady, ale současně i nepřekonatelné problémy s řešením, nakonec Descartes navrhl studovat pouze případ, v němž se tři dané kružnice

[3]Při zpracování této kapitoly byly využity texty [2], [3], [8], [13], [7], [18], [19], [22] a [9].

[4]Více o takřka šedesáti dopisech s filozofickou a matematickou tematikou, které si René Descartes s Alžbětou Falckou poslali, viz [3] či [7].

dotýkají, a to vně, tj. omezit se pouze – v dnešní terminologii – na hledání Soddyho kružnic. Roku 1643 dospěl ke vztahu pro poloměry čtyř takto se dotýkajících kružnic. Přestože vztah nikdy nepublikoval, je dnes označován jako *Descartesova věta*.[5] Důkaz věty lze nalézt např. v článku [23].

Věta 1 (Descartesova věta)**.** *Nechť jsou dány čtyři kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk a každá kružnice má křivost k_i, kde křivosti k_i jsou převrácené hodnoty poloměrů r_i jednotlivých kružnic, tj. $k_i = \frac{1}{r_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Potom platí*

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2),$$

tj.

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_4}\right)^2\right]. \tag{1}$$

Stejné téma studoval v roce 1826 rovněž Švýcar Jakob Steiner (1796–1863) v článku [22] a v roce 1842 na něj navázal Angličan Phillip Beecroft (1818–1862) v práci [2]. Kružnice však nejvíce proslavil ve druhé polovině třicátých let 20. století Frederick Soddy (1877–1956), a to především díky skutečnosti, že své výsledky publikoval netypicky ve formě básně (viz níže), což přitáhlo pozornost matematické komunity.

2.2. Frederick Soddy

Frederick Soddy[6] byl anglický radiochemik, který se narodil jako poslední dítě ze sedmi sourozenců 2. září roku 1877 v Eastbournu do rodiny obchodníka s kukuřicí. V roce 1898 promoval s vyznamenáním z chemie na Merton College v Oxfordu. Na zdejší univerzitě poté mezi lety 1898 a 1900 působil jako výzkumný pracovník. Roku 1900 odešel na dva roky do Kanady, kde působil na katedře chemie na McGill University v Montrealu. Na výzkumu zde spolupracoval s britským fyzikem a chemikem novozélandského původu Ernestem Rutherfordem (1871–1937), držitelem Nobelovy ceny za chemii z roku 1908. Spolu publikovali několik článků o radioaktivitě a izotopech. Rovněž Frederick Soddy se později, konkrétně roku 1921, stal držitelem Nobelovy ceny za chemii.

Po návratu z Kanady vystřídal řadu institucí. Nejprve pracoval na University College v Londýně, v letech 1904 až 1914 učil na University of Glasgow, poté působil na univerzitě ve skotském Aberdeenu a od roku 1919 až do svého penzionování v roce 1937 zastával pozici profesora chemie na Oxfordské univerzitě.

V roce 1908 se oženil s Winifred Moller Beilby (1885–1936), dcerou průmyslového chemika. Pár spolupracoval i odborně a v roce 1910 společně publikoval článek o absorpci gama záření z radia.

Soddyho objevy z oboru radioaktivity mimo jiné inspirovaly anglického spisovatele Herberta Georga Wellse (1860–1946) k napsání válečného románu *Osvobození světa*

[5] Dnes víme, že platí obdobný vztah i pro kružnice, které nemusí mít nutně vnější dotyk. V tomto obecnějším případě se musí ošetřit znaménka u křivostí, tj. uvažovat *znaménkové křivosti* (více viz 6. kapitola).

[6] Fotografie Fredericka Soddyho viz např. `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frederick_Soddy.jpg`

(1914)[7], jehož děj se odehrává v budoucnosti a v němž se – v předstihu přibližně třiceti let – správně předpovídá vynalezení atomové bomby.

Mezi lety 1914 až 1934 se Frederick Soddy věnoval také ekonomii. Napsal sérii knih, v nichž nabízel pohled na ekonomii s využitím fyziky, zejména termodynamiky. V několika knihách vyšly i jeho výsledky o radioaktivitě.

O kružnicích dnes nesoucích jeho jméno napsal Soddy báseň nazvanou *The Kiss Precise*, která vyšla v časopise Nature v roce 1936 [18]. Podle názvu básně jsou Soddyho kružnice někdy označovány jako tzv. *líbající se kružnice*.

The Kiss Precise

For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
This not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of pairs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.

[7]V originálu *The World Set Free*, Macmillan & Co., London, rovněž E. P. Dutton, New York, 1914. V českém překladu Přemysla Bohuslava: *Osvobození světa*, M. Rošický, Praha, 1919.

V roce 1937 v článku [19] Frederick Soddy svoji teorii o kružnicích rozšířil do třírozměrného prostoru. Vytvořil tzv. *Soddyho hexlet*, tj. šestici koulí, které se dotýkají tří daných koulí majících po dvou vnější dotyk (více viz dále).

Frederick Soddy zemřel 22. září 1956, tj. nedlouho po svých sedmdesátých devátých narozeninách, v anglickém Brightonu.

Jsou po něm (kromě geometrických útvarů) pojmenovány např. kráter na odvrácené straně Měsíce či radioaktivní uranový minerál *soddyit* s jantarově žlutými krystaly.[8]

3. Konstrukce Soddyho kružnic[9]

Při konstrukci Soddyho kružnic a rovněž při některých dále uvedených výpočtech bude hrát podstatnou roli kruhová inverze. Uveďme proto nyní definici tohoto zobrazení a jeho vlastnosti.

Definice 2. Nechť je v tzv. Möbiově rovině, tj. v Eukleidově rovině rozšířené o jeden nevlastní bod M^∞, dána kružnice ω o středu R a poloměru r_ω. *Kruhová inverze určená kružnicí* $\omega(R, r_\omega)$ je zobrazení v Möbiově rovině, které

(i) bodu R přiřadí bod M^∞ a naopak bodu M^∞ přiřadí bod R,

(ii) každému bodu $X \neq R$, $X \neq M^\infty$ přiřadí bod X', který náleží polopřímce RX a platí $|RX| \cdot |RX'| = r_\omega^2$.

Kružnice ω se nazývá *řídicí.*

Z definice snadno plyne, že kruhová inverze je *involutorní zobrazení*, tj. je-li bod X' obrazem bodu X, potom je bod X obrazem bodu X'.

Dále je evidentní, že bod ležící ve vnější, resp. vnitřní oblasti řídicí kružnice se zobrazí na bod ležící ve vnitřní, resp. vnější oblasti řídicí kružnice a že bod řídicí kružnice je samodružný.

Přímky a kružnice se v kruhové inverzi zobrazují na přímky, nebo kružnice. Záleží, zda geometrický útvar prochází, či neprochází středem R kruhové inverze, tj. zda obraz útvaru bude, či nebude obsahovat nevlastní bod M^∞.

Nyní bez důkazů[10] uvedeme další, níže využívané základní vlastnosti kruhové inverze.

Věta 2. *Je-li kruhová inverze určena kružnicí* $\omega(R, r_\omega)$, *potom platí:*

(i) *Přímka procházející bodem R se zobrazí na tutéž přímku. Přímka neprocházející bodem R se zobrazí na kružnici procházející bodem R.*

(ii) *Kružnice procházející bodem R se zobrazí na přímku neprocházející bodem R. Kružnice neprocházející bodem R se zobrazí na kružnici neprocházející bodem R. (Střed jedné kružnice se přitom nemusí zobrazit na střed kružnice druhé.)*

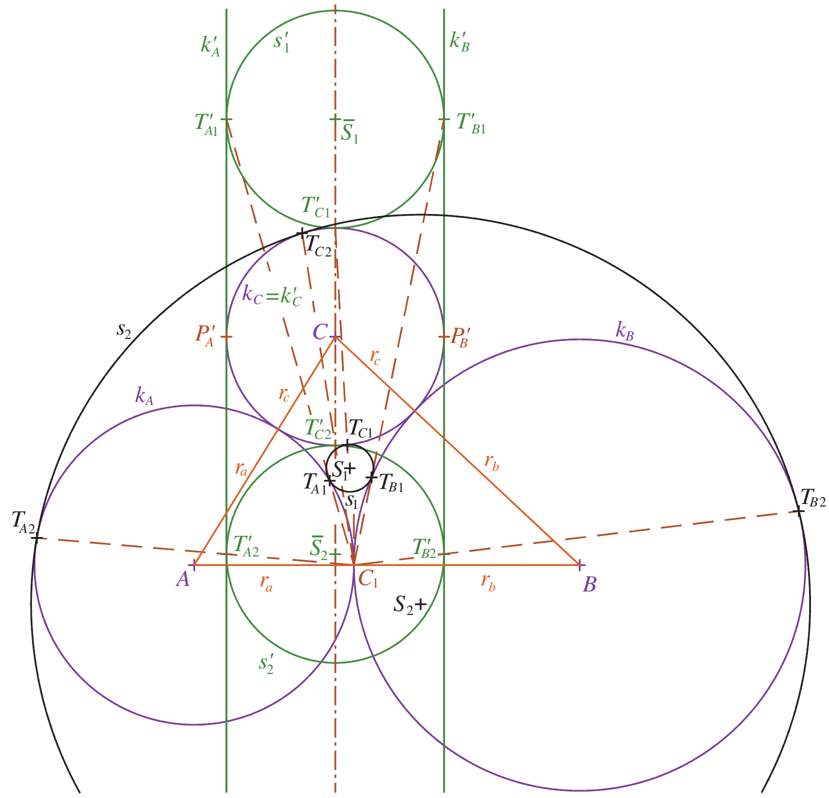
(iii) *Dvě kružnice, které se dotýkají v bodě R, se zobrazí na dvě rovnoběžné přímky, které jsou kolmé na spojnici středů kružnic.*

(iv) *Je-li T bod dotyku dvou rovinných geometrických útvarů, potom je jeho obraz T' bodem dotyku obrazů těchto útvarů.*

[8] Více o minerálu viz např. `https://www.mindat.org/min-3702.html`

[9] Při zpracování této kapitoly byl využit text [6].

[10] Více o kruhové inverzi viz např. [5] či [11].



Obr. 2. Konstrukce Soddyho kružnic

(v) *Slabě samodružnými útvary*[11] *jsou přímky procházející bodem R a kružnice, které protínají ortogonálně řídicí kružnici (dvě kružnice se protínají ortogonálně, jestliže tečny této dvojice kružnic v každém z jejich společných průsečíků jsou na sebe kolmé).*

Při konstrukci Soddyho kružnic využijeme takovou kruhovou inverzi, ve které se dvě z určujících kružnic zobrazí na dvě rovnoběžné přímky a zbývající určující kružnice je slabě samodružná. K těmto obrazům určujících kružnic nalezneme takovou kružnici, která má s každým z obrazů právě jeden společný bod (hledáme tedy kružnici dotýkající se dvou rovnoběžek a jedné kružnice). Takové kružnice existují dvě a jsou to obrazy Soddyho kružnic ve zvolené kruhové inverzi.

Konkrétně uvažujme kruhovou inverzi určenou kružnicí ω, která zobrazuje kružnice k_A, k_B na dvě rovnoběžné přímky k'_A, k'_B kolmé na stranu AB trojúhelníku ABC a kružnici k_C zobrazí na tutéž kružnici (viz obr. 2). Střed této kruhové inverze je C_1 a kružnice $k_C = k'_C$ protíná kružnici ω ortogonálně (konkrétní hodnotu poloměru r_ω

[11]Slabě samodružným útvarem rozumíme útvar, který se zobrazí sám na sebe, avšak existuje alespoň jeden jeho bod, který se na sebe nezobrazí.

řídicí kružnice ke konstrukci překvapivě nemusíme znát). Přímky k'_A, k'_B jsou tečny kružnice $k_C = k'_C$. Jejich body dotyku s kružnicí k'_C označme P'_A a P'_B.

Obrazy s'_1, s'_2 Soddyho kružnic s_1, s_2 v kruhové inverzi určené kružnicí ω jsou kružnice, které se zároveň dotýkají přímek k'_A a k'_B a kružnice k'_C. Body dotyku kružnice s'_1 s přímkami k'_A, k'_B a s kružnicí k'_C označme po řadě T'_{A1}, T'_{B1}, T'_{C1} a body dotyku kružnice s'_2 s přímkami k'_A, k'_B a s kružnicí k'_C označme po řadě T'_{A2}, T'_{B2}, T'_{C2}.

Upozorněme, že středy kružnic s_1, s_2 neodpovídají v uvažované kruhové inverzi středům kružnic s'_1, s'_2. Z tohoto důvodu nejsou středy kružnic s'_1, s'_2 značeny S'_1, S'_2, ale $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$.

Nalezneme vzory $T_{A1}, T_{B1}, T_{C1}, T_{A2}, T_{B2}, T_{C2}$ bodů $T'_{A1}, T'_{B1}, T'_{C1}, T'_{A2}, T'_{B2}, T'_{C2}$. Jedná se o průsečíky přímek $C_1T'_{A1}, C_1T'_{B1}, C_1T'_{C1}, C_1T'_{A2}, C_1T'_{B2}, C_1T'_{C2}$ s kružnicemi k_A, k_B, k_C různé od bodů T'_{C1}, T'_{C2} a C_1. Tyto nalezené body jsou body dotyku vnitřní, resp. vnější Soddyho kružnice s určujícími kružnicemi k_A, k_B a k_C. Vnitřní, resp. vnější Soddyho kružnici sestrojíme jako kružnici opsanou trojúhelníku $T_{A1}T_{B1}T_{C1}$, resp. $T_{A2}T_{B2}T_{C2}$. Právě popsaná konstrukce je eukleidovská.

Podotkněme, že Soddyho kružnice lze sestrojit rovněž pomocí tzv. Soddyho hyperbol (viz dále).

4. Poloměry Soddyho kružnic[12]

V této části vyjádříme poloměry Soddyho kružnic v závislosti na poloměrech kružnic určujících. Ke vztahům bychom mohli dospět úpravami Descartesovy věty. Pokud bychom uvažovali, že r_1, r_2, r_3 jsou poloměry určujících kružnic, potom bychom po umocnění rovnosti (1) získali kvadratickou rovnici s neznámou $\frac{1}{r_4}$ s dvěma kořeny, z nichž jsou zřejmé dva různé poloměry r_4 Soddyho kružnic.

Naším cílem je však tyto poloměry vyjádřit bez znalosti Descartesovy věty, pouze na základě vlastností geometrických útvarů, které jsou známé širší matematické komunitě. Předkládáme postup, který by měl být pochopitelný i pro šikovné středoškolské studenty a který současně ukazuje další využití ve 3. kapitole uvažované kruhové inverze.

V níže uvedených výpočtech a úvahách využijeme některé vzorce týkající se trojúhelníku a také tzv. *mocnost bodu ke kružnici.* Připomeňme si proto nejprve několik vztahů, definujme mocnost bodu ke kružnici a uveďme její základní vlastnosti.

Pro trojúhelník ABC označme podle zvyklostí a, b, c jeho strany (či jejich délky), v_a, v_b, v_c délky jeho výšek kolmých na uvedené strany a s polovinu jeho obvodu, tj. $s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$.

Obsah $S_\triangle$ trojúhelníku ABC můžeme vypočítat několika způsoby. Zřejmě nejčastějším je využití vztahu $S_\triangle = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Jinou možností je výpočet pomocí tzv. *Heronova vzorce*:

$$S_\triangle = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}. \tag{2}$$

Budeme pracovat rovněž se vzorcem pro výpočet poloměru r_v kružnice v vepsané trojúhelníku v závislosti na délkách stran trojúhelníku:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{s}}. \tag{3}$$

[12] Při zpracování této kapitoly byly využity texty [6] a [4].

Nyní pomocí uvedených vzorců vyjádříme poloměr r_v kružnice v v závislosti na poloměrech r_a, r_b, r_c určujících kružnic, resp. v závislosti na těchto poloměrech a na obsahu $S_\triangle$ trojúhelníku ABC.

Mějme trojúhelník ABC, jehož vrcholy jsou středy určujících kružnic $k_A(A,\, r_a)$, $k_B(B,\, r_b)$, $k_C(C,\, r_c)$, ke kterým hledáme Soddyho kružnice. Délky a, b, c stran trojúhelníku ABC se rovnají součtům poloměrů určujících kružnic (viz obr. 2), tj.

$$a = r_b + r_c, \qquad b = r_a + r_c, \qquad c = r_a + r_b, \tag{4}$$

a zřejmě také platí

$$s = r_a + r_b + r_c. \tag{5}$$

Pomocí vztahů (4) a (5) vyjádříme poloměry určujících kružnic:

$$r_a = s - a, \qquad r_b = s - b, \qquad r_c = s - c. \tag{6}$$

Dosazením rovností (5) a (6) do Heronova vzorce (2) můžeme vypočítat obsah $S_\triangle$ trojúhelníku ABC následovně:

$$S_\triangle = \sqrt{(r_a + r_b + r_c) \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}. \tag{7}$$

Vyjádření poloměru r_v kružnice v vepsané trojúhelníku ABC v závislosti na poloměrech určujících kružnic získáme pomocí vztahů (3), (5) a (6):

$$r_v = \sqrt{\frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b + r_c}}. \tag{8}$$

Pokud bychom chtěli vyjádřit poloměr r_v v závislosti nejen na poloměrech r_a, r_b, r_c, ale i na obsahu $S_\triangle$ trojúhelníku ABC, využijeme vzorců (8) a (7):

$$r_v = \sqrt{\frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b + r_c} \cdot \frac{r_a + r_b + r_c}{r_a + r_b + r_c}} = \frac{S_\triangle}{r_a + r_b + r_c}. \tag{9}$$

Dále připomeneme pojem *mocnost bodu ke kružnici* a uvedeme její níže využívané vlastnosti.[13]

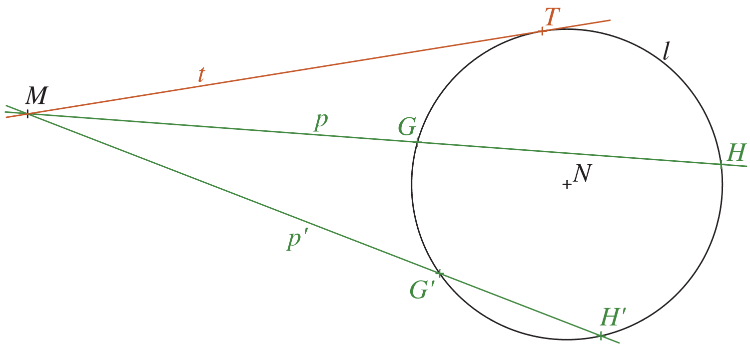
Definice 3. Je dán bod M a kružnice $l(N,\, q)$. Číslo $m = |MN|^2 - q^2$ nazýváme *mocností bodu M ke kružnici l.*

Věta 3. *Je dána kružnice $l(N,\, q)$ a bod M, který leží v její vnější oblasti (viz obr. 3). Nechť p a p' jsou sečny kružnice l procházející bodem M, které kružnici l protínají v bodech G, H a G', H', a dále nechť t je tečna kružnice l vedená bodem M, jejímž bodem dotyku je bod T. Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici l platí*

$$m = |MG| \cdot |MH| = |MG'| \cdot |MH'| = |MT|^2.$$

Nyní se vraťme k zobrazení určujících kružnic k_A, k_B, k_C v uvažované kruhové inverzi s řídicí kružnicí ω o středu C_1 (viz kapitola 3) a vyjádřeme poloměr r_ω kružnice ω v závislosti na poloměrech r_a, r_b, r_c určujících kružnic.

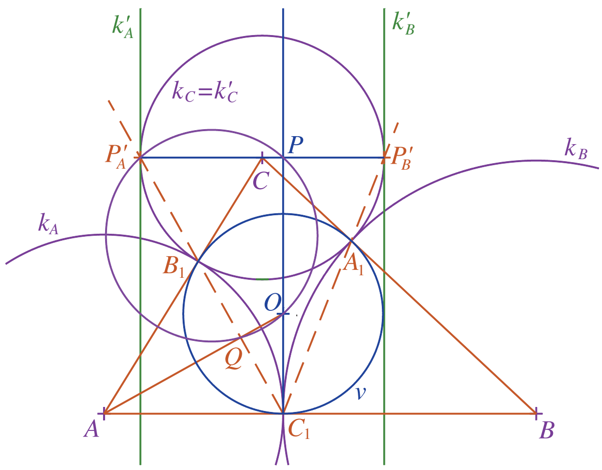
[13] Více o mocnosti bodu ke kružnici viz např. [5].



Obr. 3. Mocnost bodu ke kružnici

Označme B_1 bod dotyku kružnic k_A, k_C (viz obr. 4). Jelikož je bod P'_A bodem dotyku přímky k'_A a kružnice k'_C, zobrazí se bod B_1 v uvažované kruhové inverzi na bod P'_A. Body C_1, B_1, P'_A tudíž leží na jedné přímce.

Označme Q průsečík úseček C_1B_1 a OA, kde O je střed kružnice v vepsané trojúhelníku ABC, a dále označme P průsečík úsečky $P'_AP'_B$ a kolmice na úsečku AB procházející bodem C_1.



Obr. 4. Zobrazení bodů v kruhové inverzi

Protože je trojúhelník B_1AC_1 rovnoramenný a přímka $OA = QA$ je osou jeho vnitřního úhlu B_1AC_1, je úsečka AQ jeho výškou na základnu B_1C_1, a tudíž platí $|\sphericalangle AQB_1| = |\sphericalangle AQP'_A| = |\sphericalangle OQP'_A| = 90°$. Jelikož jsou tečny k'_A, k'_B kružnice k'_C kolmé na úsečku AB, jsou úsečky $P'_AP'_B$ a AB rovnoběžné. Proto je rovněž $|\sphericalangle OPP'_A| = 90°$ a platí

$$|\sphericalangle OQP'_A| + |\sphericalangle OPP'_A| = 90° + 90° = 180°.$$

Z toho vyplývá, že čtyřúhelník $QOPP'_A$ je tětivový, a lze mu tedy opsat kružnici.

Jelikož se bod B_1 zobrazí v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(C_1, r_\omega)$ na bod P'_A, platí na základě definice kruhové inverze

$$\begin{aligned} r_\omega^2 &= |C_1B_1| \cdot |C_1P'_A|, \\ r_\omega^2 &= 2 \cdot |C_1Q| \cdot |C_1P'_A|. \end{aligned} \tag{10}$$

Z vlastností mocnosti bodu C_1 ke kružnici opsané čtyřúhelníku $QOPP'_A$ dále plyne

$$\begin{aligned} |C_1Q| \cdot |C_1P'_A| &= |C_1O| \cdot |C_1P|, \\ |C_1Q| &= \frac{|C_1O| \cdot |C_1P|}{|C_1P'_A|}, \end{aligned}$$

a tedy dosazením do rovnosti (10) získáme

$$\begin{aligned} r_\omega^2 &= 2 \cdot |C_1O| \cdot |C_1P|, \\ r_\omega^2 &= 2 \cdot r_v \cdot v_c. \end{aligned} \tag{11}$$

Protože $S_\triangle = \frac{c \cdot v_c}{2}$, plyne ze vzorce (4) rovnost

$$v_c = \frac{2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b}. \tag{12}$$

Dosazením rovností (9) a (12) do vztahu (11) a následně využitím rovnosti (7) dostáváme

$$r_\omega^2 = 2 \cdot \frac{S_\triangle}{r_a + r_b + r_c} \cdot \frac{2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b} = \frac{4 \cdot (r_a + r_b + r_c) \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{(r_a + r_b + r_c) \cdot (r_a + r_b)},$$

a tedy

$$r_\omega^2 = \frac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}. \tag{13}$$

Uvažujme nyní libovolnou kružnici l, která se v kruhové inverzi zobrazí opět na kružnici a současně není samodružná. Budeme potřebovat znát vztah mezi poloměrem takovéto kružnice l a poloměrem jejího obrazu l'.

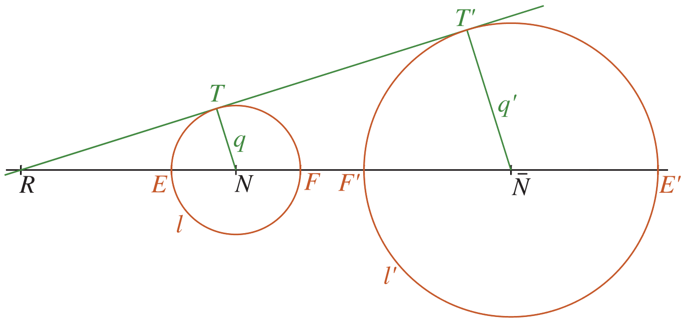
Mějme kružnici $l(N, q)$ a její obraz $l'(\bar{N}, q')$ v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(R, r_\omega)$ (viz obr. 5[14]). Průsečíky přímky $N\bar{N} = RN = R\bar{N}$ s kružnicí l označme E, F (jejich obrazy E', F' jsou průsečíky přímky $N\bar{N}$ s kružnicí l') a body dotyku jedné ze společných tečen kružnic l a l' vedené bodem R označme T a T'. Potom

$$|RF| - |RE| = 2q \qquad \text{a} \qquad |RE'| - |RF'| = 2q'.$$

Pro poměr poloměrů q a q' kružnic l a l' tedy platí

$$\frac{q}{q'} = \frac{|RF| - |RE|}{|RE'| - |RF'|}. \tag{14}$$

[14] Obrázek je pro případ, v němž $q' > q$. Pokud by platilo $q' < q$, došli bychom stejnými úvahami ke zcela identickým výsledkům.



Obr. 5. Odvození poměru poloměrů kružnic

Z definice kruhové inverze máme vztahy

$$|RE| = \frac{r_\omega^2}{|RE'|}, \qquad |RF| = \frac{r_\omega^2}{|RF'|}. \tag{15}$$

Dosazením vyjádření (15) do vztahu (14) získáváme poměr

$$\frac{q}{q'} = \frac{\dfrac{r_\omega^2}{|RF'|} - \dfrac{r_\omega^2}{|RE'|}}{|RE'| - |RF'|} = \frac{r_\omega^2 \cdot \dfrac{|RE'| - |RF'|}{|RE'| \cdot |RF'|}}{|RE'| - |RF'|},$$

a proto

$$\frac{q}{q'} = \frac{r_\omega^2}{|RE'| \cdot |RF'|}. \tag{16}$$

S využitím mocnosti bodu R ke kružnici l' a Pýthagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník $R\bar{N}T'$ dostáváme

$$m = |RE'| \cdot |RF'| = |RT'|^2 = |R\bar{N}|^2 - |T'\bar{N}|^2,$$

a tedy

$$|RE'| \cdot |RF'| = |R\bar{N}|^2 - q'^2. \tag{17}$$

Pomocí rovností (16), (17) vyjádříme poměr poloměrů q, q' kružnic l a l':

$$\frac{q}{q'} = \frac{r_\omega^2}{|R\bar{N}|^2 - q'^2}$$

a následně

$$q = q' \cdot \frac{{r_\omega}^2}{|R\bar{N}|^2 - q'^2}. \tag{18}$$

Nyní máme vše připravené k vyjádření poloměrů vnitřní a vnější Soddyho kružnice.

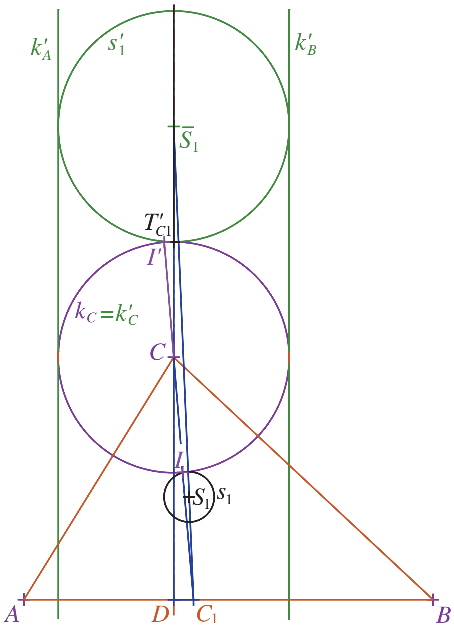
4.1. Poloměr vnitřní Soddyho kružnice

Pro poloměr vnitřní Soddyho kružnice $s_1(S_1, r_1)$, jejímž obrazem v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(C_1, r_\omega)$ je kružnice $s'_1(\bar{S}_1, r_c)$, pomocí vztahu (18) získáváme

$$r_1 = r_c \cdot \frac{r_\omega^2}{|C_1\bar{S}_1|^2 - r_c^2}. \tag{19}$$

Označíme-li D patu kolmice vedené bodem C na stranu AB trojúhelníku ABC (viz obr. 6), jsou trojúhelníky DC_1C a $DC_1\bar{S}_1$ pravoúhlé a podle Pýthagorovy věty platí

$$|C_1C|^2 = |C_1D|^2 + |CD|^2 \qquad \text{a} \qquad |C_1\bar{S}_1|^2 = |C_1D|^2 + |\bar{S}_1D|^2.$$



Obr. 6. Pravoúhlé trojúhelníky

Odečteme od sebe druhé mocniny délek přepon obou trojúhelníků:

$$\begin{aligned} |C_1\bar{S}_1|^2 - |C_1C|^2 &= |C_1D|^2 + |\bar{S}_1D|^2 - (|C_1D|^2 + |CD|^2) = \\ &= |\bar{S}_1D|^2 - |CD|^2 = (|\bar{S}_1D| - |CD|) \cdot (|\bar{S}_1D| + |CD|). \end{aligned}$$

Je-li T'_{C1} bod dotyku kružnic s'_1 a k'_C, platí

$$(|\bar{S}_1D| - |CD|) \cdot (|\bar{S}_1D| + |CD|) = |\bar{S}_1C| \cdot 2 \cdot |T'_{C1}D| = 2 \cdot r_c \cdot 2 \cdot (r_c + v_c).$$

Tudíž

$$|C_1\bar{S}_1|^2 - |CC_1|^2 = 4 \cdot r_c \cdot (r_c + v_c). \tag{20}$$

Označme I a I' průsečíky přímky C_1C s kružnicí $k_C = k'_C$. Jelikož je kružnice k_C v uvažované kruhové inverzi slabě samodružná, je obrazem bodu I právě bod I'. Proto podle definice kruhové inverze je

$$r_\omega^2 = |C_1I| \cdot |C_1I'|.$$

Odtud plyne

$$r_\omega^2 = (|C_1C| - r_c) \cdot (|C_1C| + r_c) = |C_1C|^2 - r_c^2$$

a následně

$$|C_1C|^2 = r_\omega^2 + r_c^2. \tag{21}$$

Dosazením vztahu (21) do rovnosti (20) získáme

$$|C_1\bar{S}_1|^2 - (r_\omega^2 + r_c^2) = 4 \cdot r_c \cdot (r_c + v_c)$$

a po úpravě

$$|C_1\bar{S}_1|^2 - r_c^2 = r_\omega^2 + 4 \cdot r_c \cdot (r_c + v_c). \tag{22}$$

Dosadíme-li rovnosti (13), (22) do vztahu (19) a využijeme-li poté vyjádření (12), dostáváme

$$\begin{aligned}
r_1 &= r_c \cdot \frac{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}}{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b} + 4 \cdot r_c \cdot (r_c + v_c)} = \\
&= r_c \cdot \frac{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}}{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b} + 4 \cdot {r_c}^2 + 4 \cdot r_c \cdot \dfrac{2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b}} = \\
&= \frac{4 \cdot r_c \cdot \dfrac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}}{4 \cdot r_c \cdot \dfrac{r_a \cdot r_b + r_c \cdot r_a + r_c \cdot r_b + 2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b}} = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c + 2 \cdot S_\triangle}.
\end{aligned}$$

Pro poloměr r_1 vnitřní Soddyho kružnice tedy platí vztah

$$r_1 = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c + 2 \cdot S_\triangle}.$$

Pokud do něj dosadíme za $S_\triangle$ z rovnosti (7), získáme poloměr vnitřní Soddyho kružnice vyjádřený pouze v závislosti na poloměrech určujících kružnic:

$$r_1 = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c + 2 \cdot \sqrt{(r_a + r_b + r_c) \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}.$$

4.2. Poloměr vnější Soddyho kružnice

V případě poloměru r_2 vnější Soddyho kružnice bychom postupovali zcela analogicky jako u poloměru r_1 vnitřní Soddyho kružnice. Dospěli bychom ke vztahu

$$r_2 = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c - 2 \cdot S_\triangle}.$$

Pokud bychom chtěli vyjádřit poloměr r_2 pouze v závislosti na poloměrech určujících kružnic, je příslušný vztah

$$r_2 = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c - 2 \cdot \sqrt{(r_a + r_b + r_c) \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}.$$

Povšimněme si, že vyjádření poloměrů r_1, r_2 Soddyho kružnic se liší jen ve znaménkách u obsahu trojúhelníku $S_\triangle$. Pro poloměry r_1 a r_2 tedy platí následující souhrnný vztah:

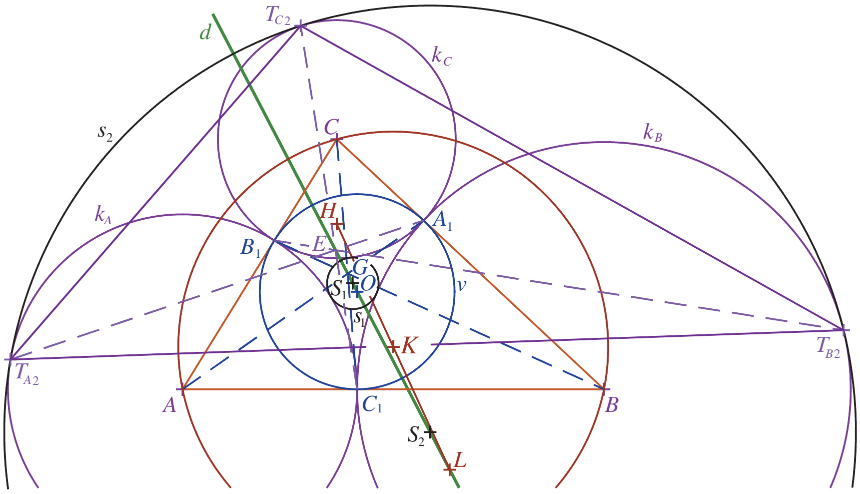
$$r_{1,2} = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c \pm 2 \cdot S_\triangle}.$$

5. Další Soddyho útvary[15]

V této části uvedeme přehled (bez důkazů) dalších geometrických útvarů, které nesou příjmení Fredericka Soddyho a souvisejí se Soddyho kružnicemi.

5.1. Soddyho přímka

Definice 4. Nechť S_1, S_2 jsou středy Soddyho kružnic příslušejících týmž určujícím kružnicím. Potom se přímka $d = S_1S_2$ nazývá *Soddyho přímka* (viz obr. 7).



Obr. 7. Soddyho přímka

[15]Při zpracování této kapitoly byly využity texty [17], [19], [25], [20] a [21].

Na Soddyho přímce leží několik bodů definovaných pro libovolný trojúhelník, tedy i pro trojúhelník ABC. Z těch nejznámějších bodů jmenujme (viz obr. 7) střed O kružnice vepsané trojúhelníku, tzv. *Gergonnův bod* G (průsečík přímek AA_1, BB_1, CC_1, kde A_1, B_1, C_1 jsou body dotyku stran trojúhelníku a kružnice trojúhelníku vepsané), tzv. *de Longchampsův bod* L (obraz ortocentra H trojúhelníku ve středové souměrnosti, jejímž středem je střed K kružnice trojúhelníku opsané) či tzv. *první Eppsteinův bod* E (průsečík přímek $T_{A2}A_1$, $T_{B2}B_1$, $T_{C2}C_1$, kde T_{A2}, T_{B2}, T_{C2} jsou body dotyku určujících kružnic a vnější Soddyho kružnice).[16]

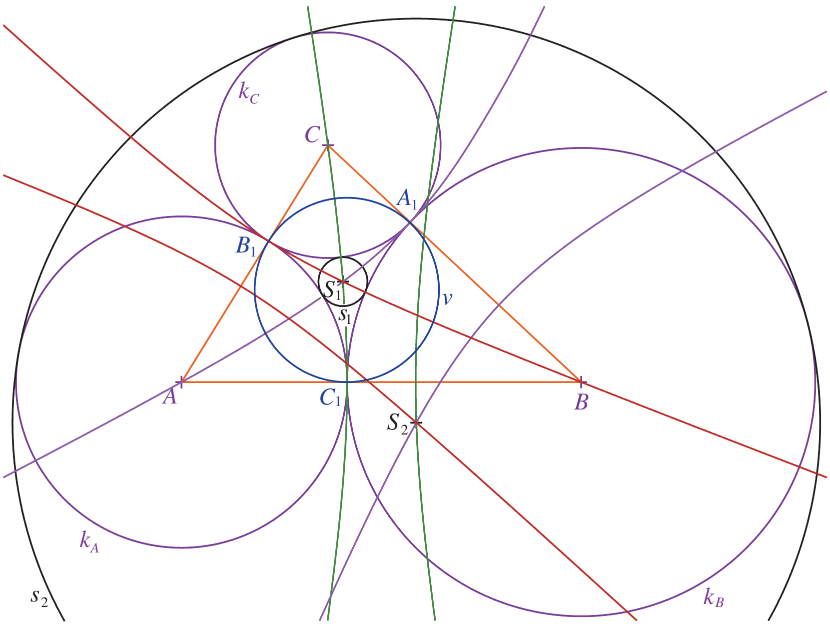
5.2. Soddyho trojúhelníky

Definice 5. Mějme určující kružnice a vnitřní, resp. vnější Soddyho kružnici. Potom trojúhelník, jehož vrcholy jsou body dotyku určujících kružnic se Soddyho vnitřní, resp. vnější kružnicí, se nazývá *Soddyho trojúhelník*.

Soddyho trojúhelníky existují dva. Soddyho trojúhelník $T_{A2}T_{B2}T_{C2}$ je na obr. 7. Vrcholy T_{A1}, T_{B1}, T_{C1} a T_{A2}, T_{B2}, T_{C2} obou trojúhelníků jsou již na obr. 2.

5.3. Soddyho hyperboly

Definice 6. Uvažujme trojúhelník ABC. Hyperbola s ohnisky B, C, která prochází bodem A, se nazývá *Soddyho hyperbola* nebo též přesněji *a-Soddyho hyperbola* (viz obr. 8).



Obr. 8. Soddyho hyperboly

[16] Další body ležící na Soddyho přímce viz např. [20].

Obdobně bychom definovali i další Soddyho hyperboly: *b-Soddyho hyperbolu* mající ohniska A, C a procházející bodem B a *c-Soddyho hyperbolu* mající ohniska A, B a procházející bodem C.

Z definice vyplývá, že strany trojúhelníku ABC leží na hlavních osách Soddyho hyperbol, jejichž středy splývají se středy těchto stran.

Pro Soddyho hyperboly platí, že jeden z vrcholů každé z nich je bodem dotyku A_1, resp. B_1, resp. C_1 kružnice v vepsané trojúhelníku ABC a jeho příslušné strany. Jedná se o vrchol Soddyho hyperboly, který leží na její větvi procházející vrcholem A, resp. B, resp. C trojúhelníku ABC.

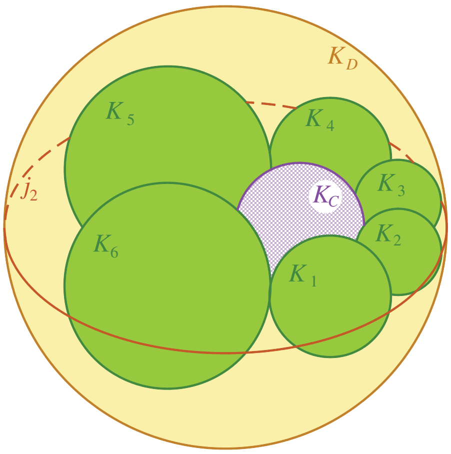
Velmi překvapující je, že existují právě dva body, v nichž se všechny tři hyperboly protínají. Tyto průsečíky jsou středy Soddyho kružnic.

5.4. Soddyho hexlet

Nyní se věnujme Soddyho hexletu, který můžeme vnímat jako rozšíření pojmu Soddyho kružnice do třírozměrného prostoru.

Definice 7. Nechť K_A, K_B, K_C jsou koule, které se vzájemně dotýkají. Potom lze sestrojit šest koulí K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, které tvoří řetězec (tj. koule K_i se dotýká koulí K_{i-1} a K_{i+1}, $i = 2, 3, 4, 5$, a koule K_6 se dotýká koulí K_5 a K_1) a z nichž každá má vnější dotyk s každou z koulí K_A, K_B, K_C. Seskupení koulí K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 se nazývá *Soddyho hexlet* nebo též zkráceně *hexlet* (viz obr. 9).

Na obr. 9 je znázorněna pouze jedna z koulí K_A, K_B, K_C, a to K_C, zbylé dvě koule K_A, K_B kvůli přehlednosti uvedeny nejsou.



Obr. 9. Soddyho hexlet

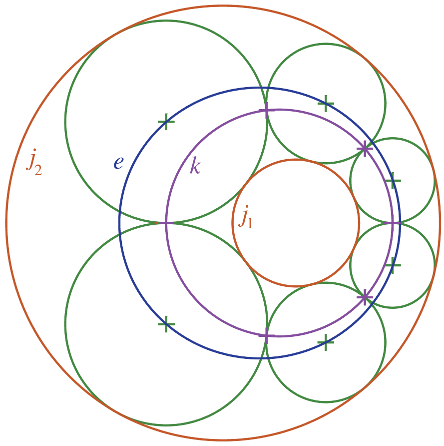
Budeme uvažovat pouze případy, v nichž mají koule K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 hexletu konečný poloměr, tj. povrch žádné z nich nebude rovinou.

Koule hexletu mají nejen dotyk s koulemi (kulovými plochami) K_A, K_B, K_C, ale mají i dotyk s další, tj. čtvrtou kulovou plochou, kterou označme K_D (viz obr. 9). S ní však mají dotyk vnitřní.

Někdy se Soddyho hexlet definuje pomocí kulových ploch K_D, K_a, K_b, kde K_a, K_b mají vnější dotyk a každá z nich má vnitřní dotyk s kulovou plochou K_D.[17] Soddyho hexlet je poté zaveden jako řetězec koulí, které mají vnější dotyk s kulovými plochami K_a, K_b a vnitřní dotyk s kulovou plochou K_D.

Pro koule Soddyho hexletu platí, že jejich středy leží v jedné rovině, a to na elipse. Tuto skutečnost dokázal až v roce 1990 americký matematik a námořník Charles Stanley Ogilvy[18] (1913–2000) v práci [17].

Uvědomme si, že Soddyho hexlet je také trojrozměrné zobecnění tzv. *Steinerova řetězce šesti kružnic* (viz obr. 10), který je pojmenován po již zmíněném Jakobu Steinerovi (viz 2. kapitola). Steinerův řetězec n kružnic je řetězec n kružnic, z nichž každé dvě, které v řetězci sousedí, mají vnější dotyk a zároveň se každá kružnice Steinerova řetězce dotýká dvou daných kružnic j_1, j_2, které se neprotínají (viz obr. 10).



Obr. 10. Steinerův řetězec

Kružnice Steinerova řetězce šesti kružnic jsou řezy povrchů koulí Soddyho hexletu rovinou obsahující středy těchto koulí. Kružnice j_2 je řezem kulové plochy K_D touto rovinou. Na kružnici j_2 leží body dotyku jednotlivých koulí K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 Soddyho hexletu a kulové plochy K_D (viz obr. 9). Na obr. 10 je vidět elipsa e, na níž leží středy kružnic Steinerova řetězce. Jedná se o výše zmíněnou elipsu, na níž leží středy koulí Soddyho hexletu. Obdobně kružnice k, na níž leží body dotyku kružnic Steinerova řetězce, je kružnicí, na níž leží body dotyku koulí Soddyho hexletu.

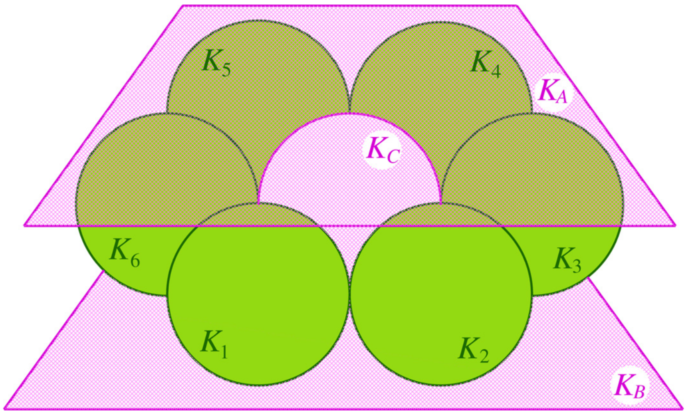
Frederick Soddy přišel na to, že nezávisle na volbě tří vzájemně se dotýkajících koulí K_A, K_B, K_C lze Soddyho hexlet vždy najít. Soddyho hexletů přitom pro dané tři koule existuje nekonečno mnoho. Pro dané kružnice j_1, j_2 totiž existuje nekonečně mnoho Steinerových řetězců šesti kružnic (šestice kružnic „rotuje“ v oblasti

[17] Raději výslovně upozorněme, že koule K_A a K_B nemají vnitřní dotyk s kulovou plochou K_D.

[18] Ogilvyho životní vášní byla nejen matematika, ale i plachtění. Sepsal řadu publikací z obou odvětví. Byl uznávaným profesorem matematiky na Hamilton College v New Yorku a současně se několikrát zúčastnil mistrovství světa v plachtění. Jeho nejlepší umístění je druhé místo z roku 1947, kdy závodil společně s Hilary Smart (1925–2000).

mezi kružnicemi j_1, j_2; sestrojením některé z nekonečně mnoha kružnic, které se dotýkají kružnic j_1, j_2, je jednoznačně určena pětice zbývajících kružnic Steinerova řetězce) a každému z nich přísluší jeden Soddyho hexlet.

Pokud bychom připustili, že dvě z koulí K_A, K_B, K_C mají nekonečně velký poloměr, potom vzniká speciální případ hexletu, který se v anglicky psané literatuře nazývá *annular hexlet* a my ho budeme nazývat *prstencový hexlet* (viz obr. 11). Pokud mají nekonečně velký poloměr například koule K_A, K_B, jedná se o dvě navzájem rovnoběžné roviny dotýkající se koule K_C.



Obr. 11. Prstencový hexlet

Je-li r_{K_c} poloměr koule K_C, je vzdálenost rovin K_A, K_B rovna $2 \cdot r_{K_c}$ a koule Soddyho hexletu jsou navzájem shodné koule o poloměru r_{K_c} (jsou shodné i s koulí K_C).

Obálkou šesti koulí Soddyho hexletu je plocha, která se nazývá *Dupinův cyklid.*[19] Zaveden byl francouzským matematikem, ekonomem a politikem Charlesem Dupinem (1784–1873) v roce 1803 v jeho závěrečné vysokoškolské práci vedené Gaspardem Mongem (1746–1818), francouzským matematikem a politikem, který je považován za zakladatele deskriptivní geometrie. V případě prstencového hexletu je Dupinovým cyklidem anuloid neboli torus.

Skutečnost, že koulí v řetězci je právě šest, se dokazuje pomocí sférické inverze, na níž můžeme pohlížet jako na obdobu kruhové inverze v třírozměrném prostoru. Inverze se zvolí tak, aby se povrchy koulí K_A, K_B zobrazily na dvě rovnoběžné roviny, které mají vnější dotyk se samodružnou koulí K_C. Nyní se hledají koule, které se dotýkají obrazů povrchů koulí K_A, K_B, K_C, tj. dvou rovnoběžných rovin a povrchu koule K_C. Sestrojujeme tedy koule prstencového hexletu. Skutečnost, že jich bude právě šest, plyne z tzv. *hexagonal circle packing. Circle packing* je uspořádání kruhů v rovině takové, že se žádné dva kruhy neprotínají a při zvětšení poloměru některého z kruhů by došlo k překrytí s jiným kruhem. Uspořádání kruhů v rovině, při němž kruhy pokrývají maximální možnou část roviny, je hexagonální, v němž jsou kruhy vepsány do šestiúhelníků, které zcela pokrývají rovinu.

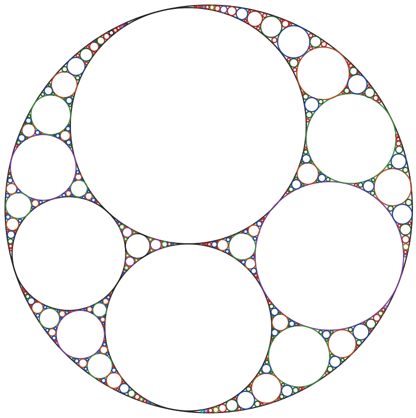
[19] Obrázek Dupinova cyklidu viz např. `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cyclide.png`

Na závěr této části podotkněme, že hexlet byl již více než 100 let před Soddym zaveden v Japonsku, což dokazují matematické tabulky sangaku z roku 1822. Tyto starší poznatky však nebyly Soddymu známy, k pojmu dospěl nezávisle na nich.

6. Apollóniův fraktál[20]

V poslední kapitole představíme geometrický útvar, který sice příjmení Fredericka Soddyho nenese, ale vznikne opakovanou konstrukcí Soddyho kružnic.

Definice 8. Uvažujme tři kružnice m_1, m_2, m_3, které se po dvou (ne však v jediném bodě) dotýkají. Připouštíme jak případ, kdy se po dvou dotýkají vně, tak i případ, v němž se dvě kružnice dotýkají vně a každá z nich má vnitřní dotyk s kružnicí třetí (tj. dvě z kružnic leží ve vnitřní oblasti třetí kružnice). Nyní sestrojme dvě kružnice m_4, m_5, které se kružnic m_1, m_2, m_3 dotýkají. Těchto pět kružnic je od sebe odděleno šesti oblastmi, z nichž každá je ohraničena třemi kružnicovými oblouky ležícími na třech z pěti dosud sestrojených kružnic. Do každé z oblastí vepíšeme kružnici, která se příslušných tří kružnic dotýká. Po vepsání šesti kružnic vznikne osmnáct oblastí, které všechny dosud zmíněné kružnice oddělují. Do každé z oblastí opět vepíšeme kružnici, která se dotýká tří kružnic, které oblast ohraničují. Pokud takto postupujeme do nekonečna, nazývá se vzniklý obrazec *Apollóniův fraktál* (viz obr. 12).



Obr. 12. Apollóniův fraktál

Pokud mají výchozí kružnice m_1, m_2, m_3 po dvou vnější dotyky, jsou kružnicemi určujícími a kružnice m_4, m_5 jsou kružnicemi Soddyho.

V prvním kroku po sestrojení kružnic m_4, m_5 sestrojujeme $6 = 2 \cdot 3$ kružnic, v druhé potom $18 = 2 \cdot 3^2$ kružnic, ve třetím $54 = 2 \cdot 3^3$ kružnic atd.; obecně v n-tém kroku $2 \cdot 3^n$ kružnic. Po n-tém kroku tudíž máme v obrazci celkem

$$3 + 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + 2 \cdot 3^n = 3 + 2 + 3 \cdot (3^n - 1) = 2 + 3^{n+1}$$

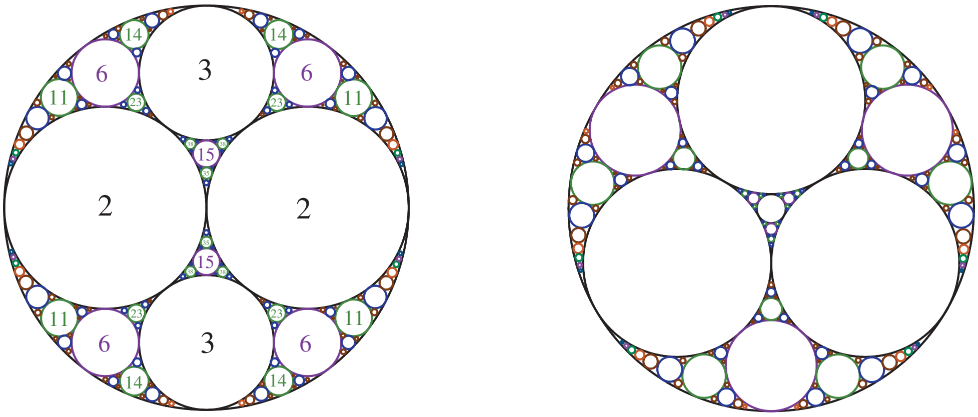
kružnic.

[20] Při zpracování této kapitoly byly využity texty [10], [15], [1] a [16].

Pro každou nově zkonstruovanou kružnici m_i, $i = 4, 5, \ldots$, která se dotýká tří již sestrojených kružnic m_{i-3}, m_{i-2}, m_{i-1} musí platit zobecnění Descartesovy věty, tj. pro křivosti každé takové čtveřice kružnic musí platit vztah

$$(k_{i-3} + k_{i-2} + k_{i-1} + k_i)^2 = 2 \cdot (k_{i-3}^2 + k_{i-2}^2 + k_{i-1}^2 + k_i^2), \tag{23}$$

v němž křivost kružnice, která má s ostatními kružnicemi vnitřní dotyky, opatříme záporným znaménkem. (Křivosti kružnic jsou u některých Apollóniových fraktálů zaznamenávány do oblastí jejich středů – viz obr. 13 vlevo.)



Obr. 13. Souměrné Apollóniovy fraktály

Na obr. 13 jsou Apollóniovy fraktály, z nichž první je osově souměrný a druhý se skládá ze tří shodných částí. Na obr. 13 vlevo jsou výchozími kružnicemi[21] například dvě kružnice s křivostí 2 a kružnice, která má s nimi vnitřní dotyky a jejíž poloměr je dvakrát větší. Její křivost je tedy -1. Kružnice, která se jich dotýká, tak musí mít křivost k_4 splňující vztah

$$(-1 + 2 + 2 + k_4)^2 = 2 \cdot \left((-1)^2 + 2^2 + 2^2 + k_4^2\right) \quad \text{neboli} \quad k_4^2 - 6k_4 + 9 = 0.$$

Jediným řešením je $k_4 = 3$.

Pokud budeme dále uvažovat například trojici kružnic s křivostmi -1, 2, 3, bude křivost k_5 vepisované kružnice vyhovovat rovnici

$$(-1 + 2 + 3 + k_5)^2 = 2 \cdot \left((-1)^2 + 2^2 + 3^2 + k_5^2\right) \quad \text{neboli} \quad k_5^2 - 8k_5 + 12 = 0,$$

která má dva kořeny 2 a 6. Křivost 2 přísluší výchozí kružnici, sestojíme proto kružnici s křivostí $k_5 = 6$. Takto postupujeme pro další kružnice.

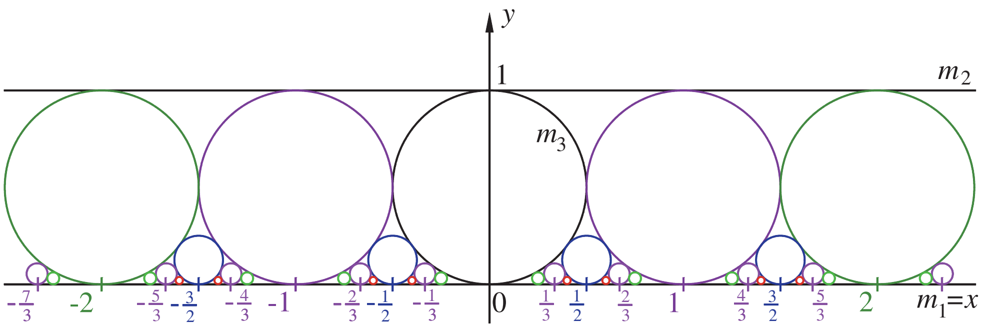
V tomto příkladě prozatím vycházely pro křivosti celočíselné hodnoty. Při dalších výpočtech by vyšly křivosti 15, 11, 14, 23, 35, 38 atd., tj. opět čísla celá. Toto není náhoda. Lze dokázat, že pokud mají první čtyři kružnice celočíselné křivosti, platí totéž i pro všechny kružnice fraktálu.[22]

[21] Tentýž Apollóniův fraktál lze evidentně „vygenerovat“ různými trojicemi výchozích kružnic.

[22] Více o teorii čísel v souvislosti s Apollóniovými fraktály viz např. článek [10].

Na obr. 13 vpravo jsou výchozími kružnicemi například tři shodné kružnice s největším poloměrem.

Uvažujme dále (viz obr. 14) dvě různé, navzájem rovnoběžné přímky m_1, m_2. Na ně se můžeme dívat jako na dvě ze tří výchozích kružnic Apollóniova fraktálu s nekonečně velkými poloměry. Jejich křivosti k_1, k_2 jsou nulové. Zbývající z výchozích kružnic je kružnice m_3 o křivosti k_3, která se těchto přímek dotýká a její průměr je roven vzdálenosti obou přímek. Vztah (23) ze zobecněné Descartesovy věty se v tomto případě zredukuje na rovnici $(k_3 + k_4)^2 = 2 \cdot (k_3^2 + k_4^2)$, z níž plyne $k_3 = k_4$. To odpovídá geometrické představě: součástí fraktálu je nekonečně mnoho kružnic shodných s kružnicí m_3, jejichž středy leží na ose pásu rovnoběžných přímek m_1, m_2 a vzdálenost těchto středů je rovna vzdálenosti přímek.



Obr. 14. Fordovy kruhy

Umístěme nyní přímku m_1 tak, aby splývala s osou x souřadnicového systému, a přímku m_2 tak, aby procházela bodem $[0; 1]$ (viz obr. 14). Kružnici m_3 umístěme tak, aby procházela počátkem souřadnicového systému, tj. aby jejím středem byl bod $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Dále sestrojme kružnice Apollóniova fraktálu, jejichž průměr je jedna. Sestrojíme rovněž další kružnice fraktálu, ale omezíme se jen na takové, které se dotýkají kružnice (přímky) m_1. *Kruhy*, jejichž hraničními kružnicemi jsou kružnice vzniklé uvedeným postupem, se nazývají *Fordovy* (viz obr. 14).

Pomocí nich lze elegantně zavést celá čísla. Sledujme body dotyku kruhů a osy x. Kružnice o průměru 1 se jí dotýkají v bodech, které jsou od sebe vzdáleny 1 jednotku. Tyto body dotyku označme jejich orientovanou vzdáleností od počátku 0 souřadnicového systému: bodům nalevo od počátku přiřaďme znaménko minus, bodům napravo od počátku přiřaďme znaménko plus. Tím jsou na ose x reprezentována všechna celá čísla.

Svoji pozornost přesuneme na Fordovy kruhy s průměry menšími než 1. Fordův kruh dotýkající se osy x v bodě i budeme dále značit F_i. Vzhledem k „periodičnosti“ obrazce přitom studujme pouze kruhy, které se osy x dotýkají mezi body 0 a 1. Fordův kruh, který se dotýká kruhů F_0, F_1, se osy x zřejmě dotýká v bodě, který reprezentuje číslo $\frac{1}{2}$. Pro další kruhy již musíme využít výpočtů, pomocí nichž lze zjistit, že body dotyku kruhů dělí úsečku s krajními body 0 a 1 přesně na třetiny, čtvrtiny, pětiny atd. Body dotyku tak na ose x reprezentují i všechna racionální čísla.

Nakonec uvedeme překvapivou vlastnost bodů dotyku, kterou můžeme pozorovat na obrázku 14. Fordův kruh, který se dotýká kruhů $F_{\frac{p}{q}}$, $F_{\frac{p'}{q'}}$, bude kruhem $F_{\frac{p+p'}{q+q'}}$, tj. příslušný bod dotyku reprezentuje zlomek, jehož čitatel, resp. jmenovatel je roven součtu čitatelů, resp. jmenovatelů zlomků, které jsou reprezentovány body dotyku kruhů, kterých se kruh $F_{\frac{p+p'}{q+q'}}$ dotýká. Například kruhů $F_{\frac{3}{2}}$, $F_2 = F_{\frac{2}{1}}$ se dotýká kruh $F_{\frac{3+2}{2+1}} = F_{\frac{5}{3}}$.

Poděkování. Děkujeme touto cestou doc. Antonínu Slavíkovi za pečlivé přečtení celého textu a následné náměty a rady, jak článek zdokonalit.

Literatura

[1] Apollonian gasket. Wikipedia. The Free Encyclopedia. Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonian_gasket`

[2] Beecroft, P.: *Properties of circles in mutual contact.* The Lady's and Gentleman's Diary 139 (1842), 91–96.

[3] Bos, E.-J.: *Princess Elizabeth of Bohemia and Descartes' letters (1650–1665).* Hist. Math. 37 (2010), 485–502.

[4] Circular inversion. Art of Problem Solving. Dostupné z: `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Circular_Inversion`

[5] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to geometry.* Second edition, John Wiley, New York–London–Sydney–Toronto, 1969.

[6] Dergiades, N.: *The Soddy circles.* Forum Geom. 7 (2007), 191–197.

[7] Princess Elisabeth of Bohemia, Descartes, R.: *The correspondence between Princess Elisabeth of Bohemia and René Descartes.* Editor a překladatel Lisa Shapiro. The Other Voice in Early Modern Europe, Chicago University Press, Chicago, 2007.

[8] Fleck, A.: *Frederick Soddy, 1877–1956.* The Royal Society Publishing, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, 1957. Dostupné z: `https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsbm.1957.0014`

[9] Frederick Soddy. The Nobel Prize. Dostupné z: `https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1921/soddy/facts/`

[10] Graham, R. L., Lagarias, J. C., Mallows, C. L., Wilks, A. R., Yan, C. H.: *Apollonian circle packings: number theory.* J. Number Theory 100 (2003), 1–45.

[11] Hartshorne, R.: *Geometry: Euclid and beyond.* Springer, New York, 2000.

[12] Holubář, J.: *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů.* Cesta k vědění, svazek 47. JČSMF, Praha, 1948.

[13] Leischner, P.: *Polibky kružnic: René Descartes a Alžběta Falcká.* Matematika-fyzika-informatika 24 (2015), 17–23.

[14] Liška, J.: *Apolloniova úloha.* Bakalářská práce. PřF MU, Brno, 2007. Dostupné z: `https://is.muni.cz/th/150476/prif_b/`

[15] Mackenzie, D.: *A tisket, a tasket, an Apollonian gasket.* American Scientist 98 (2010), 1.

[16] Matykání IX: *Mají zlomky rodiče?* Dostupné z: `https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-ix-maji-zlomky-rodice`

[17] Ogilvy, Ch. S.: *Excursions in geometry.* Dover Publications, New York, 1990.

[18] Soddy, F.: *The Kiss Precise.* Nature 137 (1936), 1021.

[19] Soddy, F.: *The bowl of integers and the hexlet.* Nature 139 (1937), 77–79.

[20] Soddy line. Wolfram MathWorld.
Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/SoddyLine.html

[21] Soddy's hexlet. Wikipedia. The Free Encyclopedia.
Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Soddy%27s_hexlet

[22] Steiner, J.: *Fortsetzung der geometrischen Betrachtungen.* J. Reine Angew. Math. 1 (1826), 252–288.

[23] Tupan, A.: *On the complex Descartes Circle Theorem.* Amer. Math. Monthly 129 (2022), 876–879.

[24] Urbánková, K.: *Soddyho kružnice.* Bakalářská práce. MFF UK, Praha, 2023.
Dostupné z: https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/bp-urbankova.pdf

[25] Yiu, P.: *Introduction to the geometry of the triangle.* Florida Atlantic University, 2002.
Dostupné z: http://math.fau.edu/Yiu/GeometryNotes020402.pdf