Jana Kopfová

Hrajeme si s pravděpodobností

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 3, 1–5

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151840`

Hrajeme si s pravděpodobností

Jana Kopfová, MÚ SU Opava a Mendelovo gymnázium Opava

Abstrakt. Ukážeme si jednoduchou hru s pravděpodobností, která v sobě skrývá jednoduché, středně těžké až hodně náročné problémy. Ty poslední mohou být vhodným námětem pro práci SOČ. V následujícím příspěvku popíšu aktivitu, která vám může zpestřit hodiny matematiky, jste-li učitelé matematiky, nebo si úlohy můžete sami vyřešit a najít v nich potěšení, jste-li studenti.

Pravidla hry

Dva hráči hrají následující hru: Do pytlíku umístíme b bílých a m modrých kuliček. Hráči zavřou oči a každý si vytáhne z pytlíku jednu kuličku. První hráč vyhrává, pokud jsou obě kuličky stejné barvy, druhý hráč vyhrává, pokud jsou kuličky různé barvy. Které kombinace barev vytvoří férovou hru? Pro větší srozumitelnost dalšího textu označme hru s b bílými a m modrými kuličkami jako $h(b,m)$. První pozorování nám říká, že hra $h(b,m)$ je stejná jako hra $h(m,b)$, a proto v dalším budeme uvažovat jen $b \geq m$.

Trénink

Úloha je hodně komplexní, proto se nejdříve podíváme na jednodušší situace, které pomůžou lépe pochopit celé zadání.

Úloha 1. Je hra $h(6,1)$ férová ve smyslu, že oba hráči mají stejnou šanci na výhru?

Podívejme se, v kolika situacích má šanci na výhru první hráč. Je to zřejmě jenom tehdy, když oba hráči vytáhnou dvě bílé kuličky, bílých kuliček je 6, a proto počet příznivých možností pro prvního hráče je 6×5, tedy 30. Druhý hráč může vyhrát, jenom když jeden z hráčů vytáhne modrou kuličku, k ní je možné vytáhnout druhou kuličku 6 způsoby, dohromady je to tedy 12 možností.

Poměr vítězných her je $30 : 12 = 5 : 2$ ve prospěch prvního hráče. Poznamenejme, že pokud by někdo uvažoval nad tím, že nezáleží na tom, který z hráčů vytáhne jakou kuličku, tak možností by bylo v obou případech dvakrát méně, ale poměr by zůstal stejný. Toto může některé studenty zmást a je dobré si to vyjasnit již na začátku.

Tato hra není férová. Alternativně se dá spočítat pravděpodobnost výhry prvního hráče jako

$$\begin{aligned}\Pr(\text{stejné}) &= \Pr(\text{bb}) + \Pr(\text{mm})\\ &= \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6} + 0 = \frac{5}{7}.\end{aligned}$$

(je 6 způsobů, jak vybrat první bílou kuličku, a 5 způsobů, jak vybrat druhou bílou kuličku) a pravděpodobnost výhry druhého hráče jako

$$\begin{aligned}\Pr(\text{různé}) &= \Pr(\text{bm}) + \Pr(\text{mb})\\ &= \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\cdot 1 = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

Hra $h(6,1)$ je výhodná pro prvního hráče. Pro jaké b a m je hra férová? Ještě možná není ten správný čas tuto otázku zodpovědět, ale možná někoho napadne, že by mohla být pro $b = m$, tedy když je počet bílých a modrých kuliček stejný.

Úloha 2. Rozmyslete si řešení problému pro $b = m = 2$.

Podobným uvažováním jako v první úloze dojdeme tady k možná překvapivému závěru, že větší šanci na výhru má druhý hráč. Podrobněji je to $2 : 4 = 1 : 2$, ve prospěch druhého hráče, tady je snadné všechny situace i vypsat. Pokud si kuličky označíme jako m_1, m_2 a b_1, b_2, první vyhraje jenom při výběru $\{m_1, m_2\}$ a $\{b_1, b_2\}$, druhý má možností, kdy vyhraje, více: $\{m_1, b_1\}$, $\{m_1, b_2\}$, $\{m_2, b_1\}$ a $\{m_2, b_2\}$. Kdybychom vypisovali možnosti, kde záleží na pořadí vytažených kuliček, tedy uspořádané dvojice, tak jich bude dvakrát tolik. Např. příznivé možnosti pro prvního hráče budou (m_1, m_2), (m_2, m_1), (b_1, b_2), (b_2, b_1). Tím se výsledný poměr nezmění.

Rozehřívací kolo

Podívejme se, kdy je hra $h(b, m)$ férová pro malý počet kuliček.

Úloha 3. Pro jaké b a m, obě menší než 7, je hra $h(b, m)$ férová?

Tady je pořád dobré dát si dostatečný prostor a čas pro experimentování. Možná se někomu povede přijít na to, že hra $h(3,1)$ je férová. To jistě povzbudí k dalšímu objevování. Někteří možná začnou úlohu řešit hned obecně pomocí písmenek a pravděpodobností, ale taková cesta tak brzy ke konkrétním konfiguracím nevede. Někomu možná bude stačit ověření, že hra $h(3,1)$ je opravdu férová.

$$\begin{aligned}\Pr\,(\text{stejné}) &= \Pr\,(\text{bb}) + \Pr\,(\text{mm})\\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(jsou 3 způsoby, jak vybrat první bílou kuličku, a 2 způsoby, jak vybrat druhou bílou kuličku).
Pro kontrolu spočteme pravděpodobnost výběru různých kuliček.

$$\begin{aligned}\Pr\,(\text{různé}) &= \Pr\,(\text{bm}) + \Pr\,(\text{mb})\\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Hra $h(3,1)$ je opravdu férová.

Je ještě nějaká další férová hra pro b a m menší než 7? Ano je, a je to $h(6,3)$. Tady necháme výpočet a ověření na čtenáři. Můžeme postupovat jakýmkoliv způsobem uvedeným výše. Můžeme počítat pravděpodobnosti pro každého hráče, nebo počítat možnosti, nebo si dokonce zkusit všechny možnosti vypsat.

Okresní přebor

Jak to bude pro obecné b a m?

Úloha 4. Umíte najít všechna b a m taková, že hra $h(b,m)$ bude férová? Pokuste se svoji hypotézu i dokázat.

Možná někdo pomocí pokusů objeví celou řadu vyhovujících her $h(3,1)$, $h(6,3)$, $h(10,6)$, $h(15,10)$, $h(21,15)$ atd. Další to možná dokážou zobecnit: Mohly by vyhovovat dvojice po sobě jdoucích tzv. trojúhelníkových čísel, tj. čísel ve tvaru $\frac{k(k-1)}{2}$ (více informací viz [1]). Někdo možná naopak zjistí, že pro férovou hru musí počty b bílých a m modrých kuliček splňovat vztah

$$\frac{b(b-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} = m\cdot b. \tag{1}$$

K vztahu (1) můžeme dojít buď úvahou jako výše, že je $\frac{b(b-1)}{2}$ způsobů, jak vybrat dvě bílé kuličky, a $\frac{m(m-1)}{2}$ způsobů, jak vybrat dvě modré kuličky, a $m \cdot b$ způsobů, jak vybrat jednu bílou a jednu modrou kuličku, nebo přes počítání pravděpodobností, což je o něco složitější:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{stejné}) &= \Pr(\text{různé}) \\ \Pr(\text{bb}) + \Pr(\text{mm}) &= \Pr(\text{bm}) + \Pr(\text{mb}) \\ \tfrac{b}{b+m} \cdot \tfrac{b-1}{b+m-1} + \tfrac{m}{b+m} \cdot \tfrac{m-1}{b+m-1} &= \tfrac{b}{b+m} \cdot \tfrac{m}{b+m-1} + \tfrac{m}{b+m} \cdot \tfrac{b}{b+m-1}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že oba způsoby počítání vedou k stejné rovnici, ale v prvním případě počítáme neuspořádáné dvojice, ve druhém uspořádané (uvažujeme, kterou kuličku vybíráme jako první). Z (1) se snadno po úpravě odvodí, že

$$(b-m)^2 = b + m. \tag{2}$$

Poměrně jednoduše se potom dá dosazením za $b = \frac{k(k+1)}{2}$ a $m = \frac{k(k-1)}{2}$ do (2) ověřit, že po sobě jdoucí trojúhelníková čísla skutečně vyhovují. Ale máme tím náš problém opravdu už vyřešený? Jak víme, že žádná další b a m nevyhovují? Dá se na to přijít například tak, že se podíváme na vztah (2) upravený do tvaru

$$b^2 - b(1 + 2m) + m^2 - m = 0$$

jako na kvadratickou rovnici v proměnné b a m bude parametr. My chceme, aby tato kvadratická rovnice měla celočíselná řešení. Její diskriminant je $1 + 8m$, což musí být druhá mocnina přirozeného čísla ℓ, aby odmocnina byla celočíselná, tj. $8m = \ell^2 - 1$. To bude platit jenom pro ℓ liché, tj. $\ell = 2k - 1$, kde k je přirozené, což nám již dává $m = \frac{k(k-1)}{2}$. Poté b dopočítáme snadno z kvadratické rovnice a bude ve tvaru $b = \frac{k(k+1)}{2}$, tj. opravdu jenom po sobě jdoucí trojúhelníková čísla dávají férovou hru. (Podrobněji řečeno: kvadratická rovnice bude mít ještě druhé řešení, které odpovídá ale b menšímu než m.)

Tato druhá část řešení je moc pěknou úlohou na řešení kvadratické rovnice s parametrem v kombinaci s hledáním celočíselných řešení.

Krajské kolo

A jak by vypadalo zobecnění úlohy pro více barev a případně i hráčů? Začněme s tím nejjednodušším. Uvažujme situaci ze začátku příspěvku. Tentokrát budeme mít kuličky tří různých barev a dva hráče. Hru zapíšeme jako $h(b, m, c)$.

Úloha 5. Umíte najít takový počet kuliček jednotlivých barev, aby hra byla pro 2 hráče férová?

Ač vybavení zkušeností z předchozích úloh brzy zjistíte, že úloha je příliš náročná. Byť i objevit jedinou možnou férovou hru dá docela dost práce a hledání. Možná vás napadne se pokusit najít vyhovující hru ve tvaru $h(1,3,?)$. Po dlouhém zkoušení a odhadování se vám možná povede najít hru $h(1,3,9)$. A možná i $h(1,9,18)$. Jak ale vypadají všechny férové hry $h(1,3,?)$. Podobně jako v jednodušší úloze se dá i tady sestavit rovnice

$$\frac{b(b-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{c(c-1)}{2} = m \cdot b + m \cdot c + b \cdot c,$$

kde c značí počet kuliček třetí barvy, třeba červené. Najít všechna řešení je složitý problém, ale můžete se pokusit najít alespoň některá řešení.

Úloha 6. Najděte všechny férové hry $h(b,m,?)$, kde (b,m) tvoří dvojici po sobě jdoucích trojúhelníkových čísel, tj. dvojici, pro kterou je hra $h(b,m)$ pro dva hráče férová.

To vede k řešení $h(b,m,2(b+m)+1)$, kde b a m jsou po sobě jdoucí trojúhelníková čísla.

Mnohem náročnější je najít všechny férové hry $h(b,m,c)$, pro které je hra pro dva hráče férová. Možná vás napadne napsat si program, který vám vypíše všechna řešení pro malé b, m a c. Z toho se dá vypozorovat, že každá dvojice z úlohy pro kuličky dvou barev, tj. dvojice po sobě jdoucích trojúhelníkových čísel, se dá doplnit na hledanou trojici třetím číslem c. Taky pro dané c lze řešit podobně jako v případě dvou barev kvadratickou rovnici s parametrem a hledat její celočíselná řešení.

Národní liga

Můžeme se rovněž pokusit o zobecnění úlohy pro kuličky q barev a pro p hráčů. Hledání kompletního řešení zobecněného problému může být hezkým námětem na práci SOČ.

Literatura

[1] Sedláček, J.: *Faktoriály a kombinační čísla.* 6. kapitola, Trojúhelníková čísla, Mladá fronta, Praha, 1964, s. 60–71. `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403521`.