Vlastimil Dlab

Trojúhelníkový kulečník (podobnost trojúhelníků a analytická geometrie)

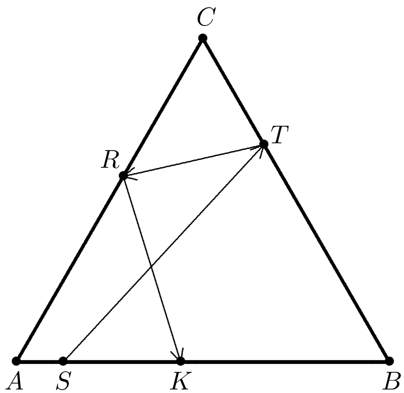
Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 4, 31–38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152002

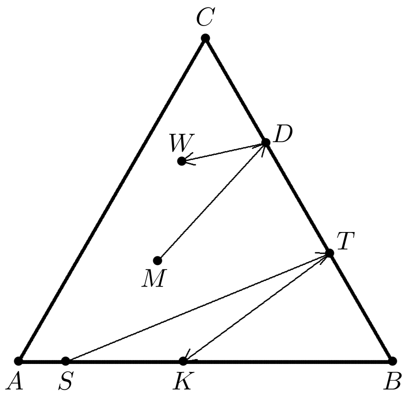
Trojúhelníkový kulečník (podobnost trojúhelníků a analytická geometrie)

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Mnohé z našich příspěvků jsou inspirovány specifickými příklady z literatury. Je totiž škoda nevyužít příklady zadané na různých soutěžích a formulovat je obecně tak, aby přispěly k porozumění souvislostí mezi často zdánlivě nesouvisejícími problémy. Dnes v tomto duchu využijeme úlohu určit polohu bodů odrazu T a R při kulečníkovém strku z bodu S do bodu K, či bodu odrazu D při strku z bodu M do W, na trojúhelníkovém stole, jak ukazují obr. 1 a 2. Zdůrazněme, že kulečníkový stůl má tvar rovnostranného trojúhelníku ABC. Připomeňme, že při každém strku je úhel dopadu na mantinel stolu roven úhlu odrazu, jak obrázky znázorňují. Tedy, na obr. 1 máme $|\sphericalangle STB| = |\sphericalangle CTR|$ a $|\sphericalangle TRC| = |\sphericalangle ARK|$ a na obr. 2 platí $|\sphericalangle KTB| = |\sphericalangle CTS|$ a $|\sphericalangle MDB| = |\sphericalangle CDW|$.



Obr. 1

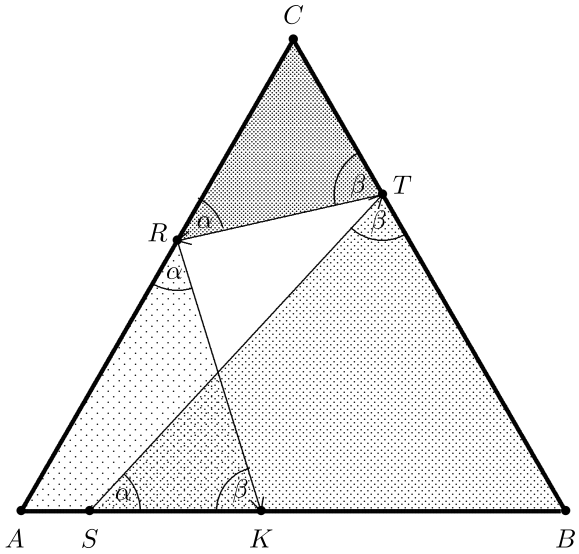


Obr. 2

Věříme, že na základě řešení těchto úloh a jejich speciálních případů se pobavíte i dalšími podobnými úlohami, které si můžete lehce formulovat.

Řešme úlohu na obr. 1: Nechť strana rovnostranného trojúhelníku ABC má délku a. Dány jsou vzdálenosti $|AS| = s$, $|AK| = k$. Nalezněte vzdálenost $|BT| = t$, tj. polohu bodu T, a $|CR| = r$, tj. polohu bodu R. Připomeňme, že $|\sphericalangle STB| = |\sphericalangle CTR|$ a $|\sphericalangle TRC| = |\sphericalangle ARK|$. Je jasné, že užitím analytické geometrie tak, jak je vyučována na dnešních školách, je možné úlohu řešit. Jde pouze o to, vyjádřit rovnice přímek určených úsečkami ST, TR, RK a určit průsečíky s příslušnými stranami trojúhelníku ABC. Výpočty lze ulehčit volbou ortonormální souřadnicové soustavy $B = (0,0)$, $C = (a,0)$, $A = (\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$. Ale i tak jsou výpočty velmi komplikované. Proto využijeme podobnost trojúhelníků, jak naznačuje obr. 3. V něm jsou označeny úhly α a β, které nás ihned dovedou k podobnosti trojúhelníků AKR, BTS a CTR. Odtud dostáváme rovnost zlomků

$$\frac{a-r}{k} = \frac{a-s}{t} \quad \text{a} \quad \frac{a-s}{t} = \frac{r}{a-t}. \tag{1}$$



Obr. 3

Z rovností (1) dostáváme

$$-rt = k(a-s) - at, \qquad rt = (a-s)(a-t),$$

sečtením $0 = (a-s)(k+a-t) - at$, neboli $0 = (a-s)(a+k) - t(2a-s)$, a tedy

$$t = \frac{(a+k)(a-s)}{2a-s}. \tag{2}$$

V kombinaci s první rovností v (1) dostáváme po úpravách také

$$r = \frac{a(a-k)+ks}{a+k}. \tag{3}$$

Zaznamenejme hodnoty t a r v následujících speciálních případech:
(i) Je-li $s = 0$, dostáváme

$$t = \frac{a+k}{2} \quad \text{a} \quad r = \frac{a(a-k)}{a+k}.$$

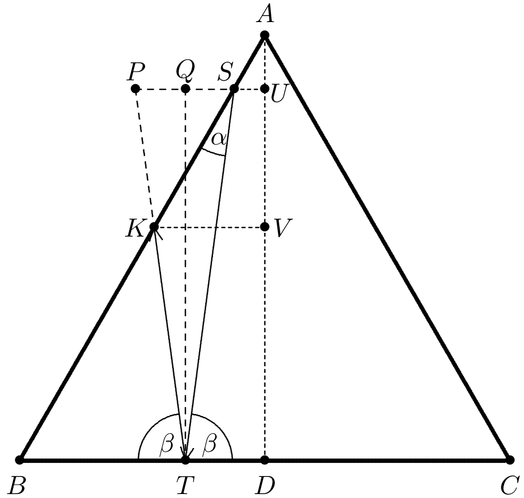
(ii) Je-li $k = a$, dostáváme

$$t = \frac{2a(a-s)}{2a-s} \quad \text{a} \quad r = \frac{s}{2}.$$

(iii) Je-li $k = s$, dostáváme

$$t = \frac{a^2-s^2}{2a-s} \quad \text{a} \quad r = \frac{(a-s)^2+as}{a+s}.$$

Popišme nyní strk $S \to T \to K$ vyznačený na obr. 2; úlohu si usnadníme otočením kulečníkového stolu o $-120°$ kolem těžiště, dostaneme tak obr. 4.



Obr. 4

Opět označme $|AB| = a$, $|AS| = s$, $|AK| = k$ a $|BT| = t$. Nyní zvolíme ortonormální souřadnicovou soustavu tak, že $B = (0, 0)$ a $C = (a, 0)$. Potom $A = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Sestrojme na výšce AD body U a V tak, že $SU \parallel BC$ a $KV \parallel BC$. Jelikož $|SU| = \frac{s}{2}$ a $|KV| = \frac{k}{2}$, máme $U = \left(\frac{a}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2}\right)$, $V = \left(\frac{a}{2}, \frac{(a-k)\sqrt{3}}{2}\right)$, $D = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$, a tedy $S = \left(\frac{a-s}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2}\right)$ a $K = \left(\frac{a-k}{2}, \frac{(a-k)\sqrt{3}}{2}\right)$. Jelikož $T = (t, 0)$, máme $Q = \left(t, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2}\right)$, a proto $P = \left(2t - \frac{a-s}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2}\right)$.

Přímka určená body P a T je popsána rovnicí

$$y = \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2t-a+s}(x-t).$$

Jelikož bod K na této přímce leží, dostáváme pro t rovnici

$$(a-k)(2t-a+s) = (a-s)(a-k-2t),$$

jejímž řešením je

$$t = \frac{(a-k)(a-s)}{2a-k-s}.$$

Jelikož je tento výraz v závislosti na k klesající, je omezen hodnotami pro $k = a$ a $k = 0$. Pro dané s je tedy

$$0 \leq t \leq \frac{a(a-s)}{2a-s}.$$

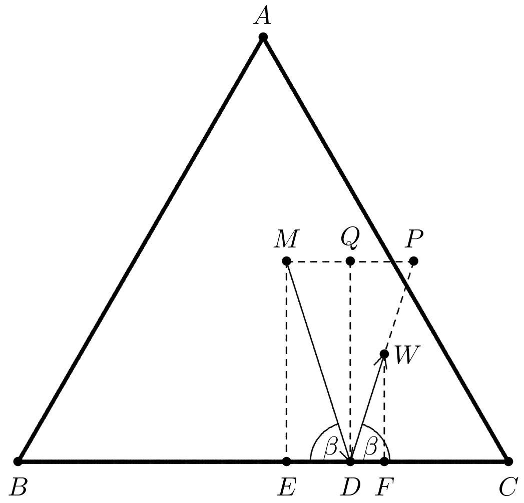
Pro $s = 0$ je

$$t = \frac{a(a-k)}{2a-k}.$$

Pro $s = k$ dostáváme

$$t = \frac{a-s}{2}.$$

Třetí úlohu, karambol z pozice M do W, opět vyřešíme ve výhodné volbě kulečníkového trojúhelníku, jak ukazuje obr. 5.



Obr. 5

Opět zvolme ortonormální souřadnicovou soustavu tak, že $B = (0,0)$, $C = (a,0)$, a tedy $A = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Nechť $D = (d,0)$. Dány jsou výchozí pozice $M = (p,q)$ a cílová pozice $W = (u,v)$. Je tedy $Q = (d,q)$ a $P = (2d-p,q)$. Směrnice přímky dané body M a D se rovná opačné směrnici přímky určené body W a D, což znamená, že

$$\frac{v}{u-d} = \frac{q}{d-p},$$

odkud

$$d = \frac{pv+qu}{q+v}.$$

Zde možná někoho ze čtenářů překvapilo, jak jednoduchá byla řešení druhé a třetí úlohy. Hlavním důvodem je bezpochyby, v porovnání s první úlohou, že se jedná pouze o jeden odraz od mantinelu (v bodě T, resp. D). V obou případech bylo nutné, vzhledem k zadání na obr. 2, otočit trojúhelník o $-120°$ kolem jeho těžiště. To je ale v případě rovnostranného trojúhelníku pro body ležící na stranách trojúhelníku (jak je tomu v druhé úloze) velice snadné. Ty jsou zde určeny pomocí vzdáleností od vrcholů trojúhelníka. Otočení o $-120°$ tedy v našem značení znamená, že trojúhelník ABC se zobrazí na trojúhelník BCA. Po vyřešení úlohy se vrátíme do původní situace otočením o $120°$. Situace je zcela jednoduchá.

Poněkud jiný problém nastává v případě třetí úlohy. Jedná se opět o otočení (tedy rotaci) o $-120°$ do polohy vyobrazené na obr. 5. Popis tohoto zobrazení je opět možný několika způsoby. Snadný postup najdete např. na straně 258 publikace [1]. Zvolíme-li ortonormální souřadnicovou soustavu tak, že $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, a tedy $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, potom je obrazem bodu (g, h) bod

$$(\overline{g}, \overline{h}) = \left(\frac{a}{2} - \frac{g}{2} + \frac{h\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{g\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{2}\right).$$

Označíme-li $D = (e, f)$, znamená to, že strk z pozice $M = (p, q)$ do pozice $W = (u, v)$ je určen předpisem

$$e = a - \frac{\overline{p}\,\overline{v} + \overline{q}\,\overline{u}}{2(\overline{q} + \overline{v})}, \qquad f = \frac{\overline{p}\,\overline{v} + \overline{q}\,\overline{u}}{2(\overline{q} + \overline{v})}\sqrt{3},$$

kde

$$\overline{p} = \frac{a}{2} - \frac{p}{2} + \frac{q\sqrt{3}}{2}, \qquad \overline{q} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{p\sqrt{3}}{2} - \frac{q}{2},$$

$$\overline{u} = \frac{a}{2} - \frac{u}{2} + \frac{v\sqrt{3}}{2}, \qquad \overline{v} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{u\sqrt{3}}{2} - \frac{v}{2}.$$

Závěrem ještě ukažme, že je možné řešit první úlohu postupem, který jsme užili při řešení druhé úlohy. K tomu nám pomůže obr. 6, který slouží dvěma aplikacím, jak naznačuje značení bodů v závorkách. V první aplikaci volíme

$$0 < |CS| = s < a, \quad 0 < |BR| = r < a, \quad |AT| = t,$$

a tedy $S = \left(\frac{a-s}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2}\right)$, $R = \left(\frac{2a-r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$, $T = (t, 0)$, $Q = \left(t, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2}\right)$. Jelikož je Q středem úsečky SP, je $P = \left(\frac{4t-a+s}{2}, \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2}\right)$. Rovnice přímky určené body T a P je tedy

$$y = \frac{(a-s)\sqrt{3}}{2t - a + s}\,(x - t).$$

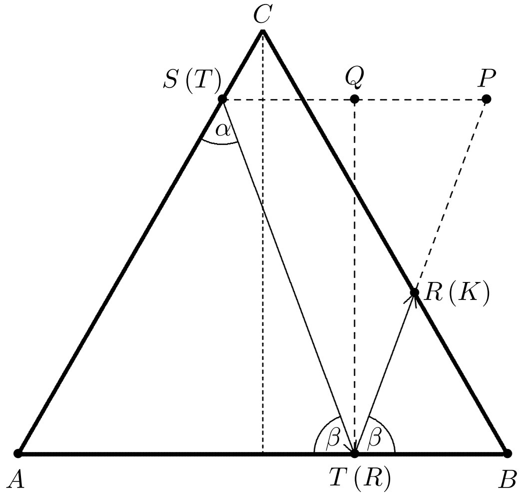
Bod R leží na této přímce a proto

$$\frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{(a-s)\sqrt{3}(2a - r - 2t)}{2(2t - a + s)},$$

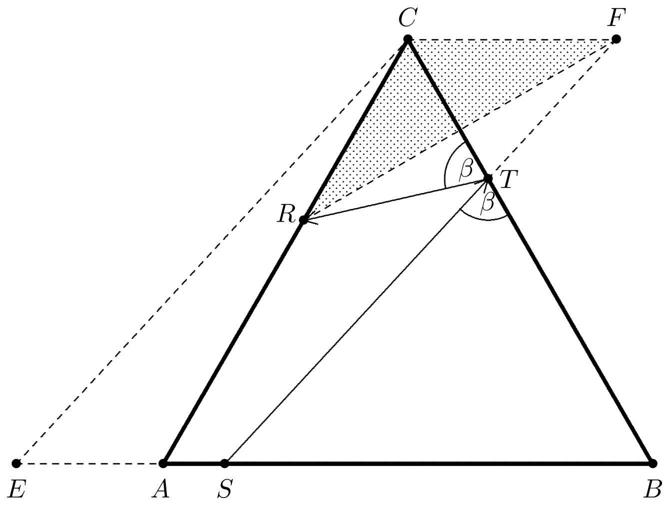
odkud dostáváme úpravou

$$t = \frac{a(a-s)}{a+r-s},$$

tj. po úpravě výraz (2).



Obr. 6



Obr. 7: $EC \parallel SF$

V druhé aplikaci, kdy volíme značení

$$0 < |CT| = t < a, \quad 0 < |BK| = k < a, \quad |AR| = r,$$

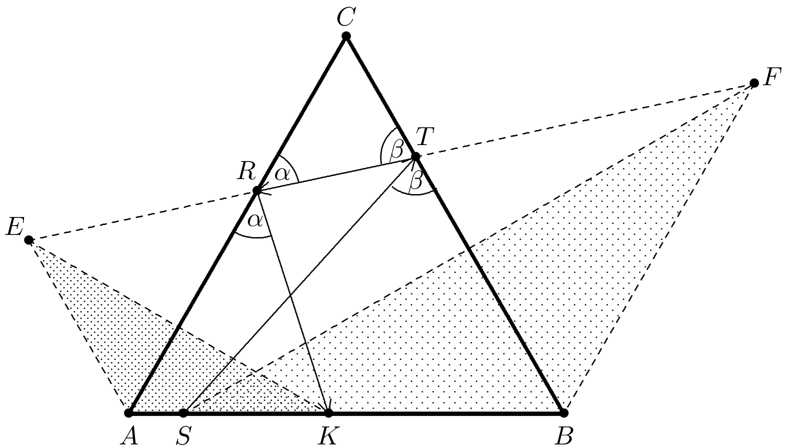
dostáváme naprosto stejným postupem vztah

$$r = \frac{a(a-t)}{a+k-t},$$

tj. výraz (3).

Přidejme nakonec několik slov ohledně konstrukce bodů odrazů T, R a D, jak je vidíme na obr. 1 a 2. Ty jsou zcela jednoduché. Jak ukazuje obr. 7, v druhé úloze postačí sestrojit rovnoramenný trojúhelník CRF a bod odrazu T je průsečíkem úsečky FS a strany BC. Vztah $t = |BT|$ plyne z podobnosti trojúhelníků SBT a EBC. Podobně je tomu s konstrukcí bodu D v třetí úloze. Kombinací této konstrukce potom nacházíme body T a R v první úloze zcela bezprostředně, jak ilustruje obr. 8.

Zakončeme úlohou: Odvoďte vzdálenosti $t = |BT|$ a $r = |CR|$, tj. (2) a (3), užitím této konstrukce.



Obr. 8

Literatura

[1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.